Série 21 : Corrigé

Exercice 1

(a) On a

$$J_{\mathbf{v}}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+y} & -\frac{x}{(1+y)^2} \\ -\frac{y^2}{(1+xy)^2} & \frac{1}{(1+xy)^2} \\ -\frac{2}{1+x} & 0 \end{pmatrix}.$$

Au point $a(1,3)$ on obtient l'approximation du 1er ordre suivante :

$$\mathbf{v}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \\ -2\ln(2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{9}{16} & \frac{1}{16} \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \end{pmatrix}$$

(b) On a

$$J_{\mathbf{v}}(x_1,x_2,x_3,x_4) = \begin{pmatrix} 1 & x_3^2 - \frac{2x_3}{x_2^3} & 2x_2x_3 + \frac{1}{x_2^2} & 0 \\ \frac{\sqrt{x_4}}{2\sqrt{x_1}}e^{\sqrt{x_1x_4}} & 0 & -2x_3x_4\sin(x_3^2x_4) & \frac{\sqrt{x_1}}{2\sqrt{x_4}}e^{\sqrt{x_1x_4}} - x_3^2\sin(x_3^2x_4) \end{pmatrix}.$$

Au point $a(1,1,0,1)$ on obtient l'approximation du 1er ordre suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(x_1,x_2,x_3,x_4) &= \begin{pmatrix} 1 \\ e+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}e & 0 & 0 & \frac{1}{2}e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1-1 \\ x_2-1 \\ x_3 \\ x_4-1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+(x_1-1)+x_3 \\ 1+e+\frac{1}{2}e\cdot(x_1-1)+\frac{1}{2}e\cdot(x_4-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_3 \\ 1+\frac{1}{2}e\cdot x_1+\frac{1}{2}e\cdot x_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(c) On a

$$J_{\mathbf{v}}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\frac{y}{2}} & -\frac{\sqrt{x}}{2}e^{-\frac{y}{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{y}{2}} & \frac{\sqrt{x}}{2}e^{\frac{y}{2}} \end{pmatrix}.$$

Au point $a(1,0)$ on obtient l'approximation du 1er ordre suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(x,y) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1+x-y \\ 1+x+y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le jacobien de $\mathbf{v}$ au point a vaut $\det(J_{\mathbf{v}}(a)) = \frac{1}{2} \neq 0$. Ainsi la fonction est localement inversible en a.
De manière générale, le jacobien vaut

$$\det(J_{\mathbf{v}})(x,y) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

et donc la fonction est localement inversible partout.
En fait elle est globalement inversible (sur les ensembles donnés). Si on pose $u = \sqrt{x}e^{-\frac{y}{2}}$ et $v = \sqrt{x}e^{\frac{y}{2}}$ alors on obtient

$$x = uv \qquad \text{et} \qquad y = \ln v - \ln u.$$

et donc

$$\mathbf{v^{-1}}(u, v) = \begin{pmatrix} uv \\ \ln v - \ln u \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

(a) On a $v_1(x, y, z) = x^2y + z$, $v_2(x, y, z) = xyz$ et $v_3(x, y, z) = \frac{1}{z}$. En appliquant la définition du rotationnel, on obtient

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\mathbf{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 - xy \\ 1 - 0 \\ yz - x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -xy \\ 1 \\ yz - x^2 \end{pmatrix}.$$

(b) Posons $\mathbf{v}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) \end{pmatrix}$. On applique alors la définition du rotationnel avec $v_1 = f_x$, $v_2 = f_y$ et $v_3 = f_z$. On obtient

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\mathbf{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_z}{\partial y}(a) - \frac{\partial f_y}{\partial z}(a) \\ \frac{\partial f_x}{\partial z}(a) - \frac{\partial f_z}{\partial x}(a) \\ \frac{\partial f_y}{\partial x}(a) - \frac{\partial f_x}{\partial y}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{yz}(a) - f_{zy}(a) \\ f_{zx}(a) - f_{xz}(a) \\ f_{xy}(a) - f_{yx}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

car $f(x, y, z)$ est de classe C^2.

Exercice 3

(a) On a

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \sin\theta\cos\phi + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \sin\theta\sin\phi + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \cos\theta.$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot r\cos\theta\cos\phi + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot r\cos\theta\sin\phi - \frac{\partial f}{\partial z} \cdot r\sin\theta.$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \phi} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \phi} = -\frac{\partial f}{\partial x} \cdot r\sin\theta\sin\phi + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot r\cos\sin\cos\phi.$$

Matriciellement ce n'est rien d'autres que

$$\begin{pmatrix} \tilde{f}_r \\ \tilde{f}_\theta \\ \tilde{f}_\phi \end{pmatrix} = J_{\mathbf{v}}(r, \theta, \phi) \cdot \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$$

(b) Si $\tilde{f}(r, \theta, \phi) = r\cos^2\phi + \theta$,
on a $\tilde{f}_r = \cos^2\phi$, $\tilde{f}_\phi = -2r\cos\phi\sin\phi$ et $\tilde{f}_\theta = 1$.
Au point $P\left(r = 2,\, \theta = \frac{\pi}{2}, \phi = \frac{\pi}{4}\right)$ ceci donne

$$\tilde{f}_r\left(2, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$
$$\tilde{f}_\theta\left(2, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) = 1$$
$$\tilde{f}_\phi\left(2, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) = -2$$

Le système sous (a) devient, au point $P\left(r=2,\,\theta=\frac{\pi}{2},\phi=\frac{\pi}{4}\right)$:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \cdot \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$$

En inversant la matrice A, on obtient

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}}_{=A^{-1}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On a ainsi pu calculer le gradient usuel (cartésien) d'une fonction donnée en coordonnées sphériques sans calculer explicitement la fonction $f(x,y,z)$ correspondante.