Série 21

Exercice 1
Pour les fonctions $\mathbf{v}$ suivantes, calculer la matrice jacobienne $J_{\mathbf{v}}$.
En déduire l'approximation du 1er ordre autour du point a donné.

(a) $\mathbf{v}:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \mathbf{v}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{1+y} \\ \frac{y}{1+xy} \\ -2\ln(1+x) \end{pmatrix} \qquad a(1,3).$

(b) $\mathbf{v}:\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \mathbf{v}(x_1,x_2,x_3,x_4) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2x_3^2 + \frac{x_3}{x_2^2} \\ e^{\sqrt{x_1x_4}} + \cos(x_3^2x_4) \end{pmatrix} \qquad a(1,1,0,1).$

(c) $\mathbf{v}:\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \quad \mathbf{v}(x,y) = \begin{pmatrix} \sqrt{x}e^{-\frac{y}{2}} \\ \sqrt{x}e^{\frac{y}{2}} \end{pmatrix} \qquad a(1,0).$

L'application est-elle localement inversible au point a ? Est-ce le cas en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$?

Exercice 2
Soit $\mathbf{v}:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un champ vectoriel de classe C^1 : $\mathbf{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} v_1(x,y,z) \\ v_2(x,y,z) \\ v_3(x,y,z) \end{pmatrix}$.

(a) Pour $\mathbf{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2y+z \\ xyz \\ \frac{1}{z} \end{pmatrix}$, calculer $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\mathbf{v}(x,y,z)$.

(b) Soit $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ un champ scalaire de classe C^2. Montrer que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\nabla f)(a) = \vec{0}$ pour tout $a \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 3
On considère une fonction réelle $f(x,y,z)$ définie sur $\mathbb{R}^3$ et la fonction

$$\mathbf{v} \ :\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

définie par

$$\mathbf{v}(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

(C'est le changement entre coordonnées cartésiennes et sphériques.)
On pose

$$\tilde{f}(r,\theta,\phi) = (f\circ\mathbf{v})(r,\theta,\phi) = f(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta).$$

$\tilde{f}$ est la fonction f décrite en coordonnées sphériques.

(a) En utilisant la règle de composition vue au cours, écrire les 3 dérivées partielles $\tilde{f}_r$, $\tilde{f}_\theta$ et $\tilde{f}_\phi$ en fonctions des 3 dérivées partielles f_x , f_y et f_z.

(b) Application : si

$$\tilde{f}(\rho,\theta,\phi) = \rho\cos^2\phi + \theta$$

calculer, en utilisant les équations trouvées sous (a), $f_x(P)$, $f_y(P)$ et $f_z(P)$ au point $P(\rho = 2,\, \theta = \frac{\pi}{2},\, \phi = \frac{\pi}{4})$.
Il faut inverser une matrice 3×3 et il est préférable de le faire au point P et non de manière générale.