'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES', SÉRIE 5

A retourner la semaine prochaine.

Exercice 1: Soit (X, ρ) un espace métrique complet, et soient $T_{1,2}$ deux contractions sur X avec constante de contraction $\alpha \in [0, 1)$. Supposons que

$$\rho(T_1(x), T_2(x)) < \delta$$

pour tout $x \in X$. Montrer que si $x_{1,2}$ sont les points fixes de $T_{1,2}$, alors l'on a

$$\rho(x_1, x_2) < \frac{\delta}{1-\alpha}.$$

Exercice 2: Soit $f(x, y) \in C^0(I \times \mathbb{R})$ localement Lipschitz par rapport à y, $I = [\xi, \xi + a]$. Supposons que la solution du problème initial

$$y'(x) = f(x, y(x)),\ y(\xi) = \eta$$

existe sur I. Montrer qu'étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $|\widetilde{\eta} - \eta| < \delta$, alors la solution du problème initial

$$\widetilde{y}'(x) = f(x, \widetilde{y}(x)),\ \widetilde{y}(\xi) = \widetilde{\eta}$$

existe sur I et satisfait

$$\big|y(x) - \widetilde{y}(x)\big| < \varepsilon$$

pour tout $x \in I$.

Indication: réduire au cadre d'une fonction $\widetilde{f}$ globalement Lipschitz par rapport à y, et ensuite utiliser exercice 1, après reformulation comme équation intégrale.