'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES', SÉRIE 4

A retourner la semaine prochaine.

Exercice 1: Montrer que la fonction $f_\varepsilon(x,y)$ en lemme 1.4 de lecon 3 est continue comme fonction de deux variables.

Exercice 2: Soit $f(x,y) \in C^0(I\times\mathbb{R}), I = [\xi, \xi+a]$ localement Lipschitz par rapport au deuxième argument, et supposons que

$$f(x,y)\cdot y \leq (1+y^2)(|\log|y|| + 1),\ \forall x \in I, y \in \mathbb{R}.$$

Montrer que toute problème initial

$$y' = f(x,y),\ f(\xi) = \eta$$

admet une solution globale unique sur I de classe C^1. Vous pouvez utiliser les théorèmes montrés en classe.

Exercice 3: Soient $f_1 \in C_0^m(\mathbb{R}), f_2 \in C_0^k(\mathbb{R}),\ k, m \geq 0$, où C_0^l représente l'espace de fonctions C^l de support compacte. Montrer que

$$f_1 * f_2$$

est une fonction de régularité C^{m+k}, et qu'on a (avec $\|f\|_{C^k} = \sum_{0\leq i\leq k} \|f^{(i)}\|_{L^\infty}$)

$$\big\|f_1 * f_2\big\|_{C^{m+k}} \leq C\big\|f_1\big\|_{C^k} \cdot \big\|f_2\big\|_{C^m},$$

où C est une constante qui dépend que de la mesure du support de $f_{1,2}$ ainsi que de m, k. Montrer que l'inégalité précédente devient fausse si on remplaçe $m+k$ par $N > m+k$, donc on n'a pas

$$\big\|f_1 * f_2\big\|_{C^N} \leq C\big\|f_1\big\|_{C^k} \cdot \big\|f_2\big\|_{C^m}$$

pour une constante C qui dépend que de N et des mesures de support de $f_{1,2}$.