'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES', SÉRIE 3

A retourner la semaine prochaine.

Exercice 1 Trouver une fonction continue $f(x)$ sur $[0, \infty)$ qui n'est localement Lipschitz nulle part. Plus précisément, pour tout $y \geq 0$ et pour tout $\delta > 0$, il n'existe pas de $L \geq 0$ avec

$$|f(y_1) - f(y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

pour tout pair $y_{1,2} \in [y - \delta, y + \delta] \cap [0, \infty)$. *Suggestion: commençer avec* $g(y) = \sqrt{y}$.

Exercice 2: Faisant référence a p. 6 de leçon 2, déterminer $\widetilde{L}$ en fonction de δ, L, M tel que

$$\left|\widetilde{f}(x, y_1) - \widetilde{f}(x, y_2)\right| \leq \widetilde{L}|y_1 - y_2|$$

pour tout $y_{1,2} \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 Soit $f \in C^0(I \times \mathbb{R})$, $I = [\xi, \xi + a]$, $a > 0$, et supposons f que $\max_{x \in I} |f(x, \eta)| = M$. Aussi, on suppose que f est différentiable par rapport à y avec $|f_y(x, y)| \leq K|f(x, y|$ uniformément en $x \in I$. Donner un $\delta > 0$ explicite (en terme de M, K) tel que le problème initial

$$y'(x) = f(x, y(x)),\ y(\xi) = \eta$$

admet une solution de classe C^1 sur $[\xi, \xi + \delta]$.

Exercice 4(Walter, p. 70) Soit $f(x, y)$ continue sur $J \times \mathbf{R}$, $J = [0, a]$, et satisfaisant la condition

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq \frac{q}{x}|y - z|$$

pour tout $0 < x \leq a$ et $y, z \in \mathbf{R}$, aver $q < 1$. Montrer que le problème de données initiales

$$y' = f(x, y),\ y(0) = \eta,\ x \in J$$

admet une solution unique de classe C^1 qui peut être déterminée par itération.
Suggestion: considérer l'espace de Banach $B = \{u \in C^0(J) |\ \sup_{x \in J \setminus \{0\}} \frac{|u(x)|}{x} < \infty\}$. *Formuler un problème de point fixe sur* B.