'EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES', SERIE 2

A retourner à M. Tobias Schmid la prochaine semaine.

Exercise 1 (Walter, p. 24) Déterminer toutes les solutions (de régularité C^1) de

$$y' = \sqrt{|y|(1-y)},\ y \leq 1$$

Ésquisser les solutions. Trouver toutes conditions initiales $\xi, y(\xi) = \eta$ pour lesquelles la solution n'est pas unique autour de ξ.

Exercise 2 (Walter, p. 24) Résoudre le problème initial

$$y' = \frac{e^{-y^2}}{y(2x+x^2)},\ y(2) = 0$$

Trouver l'intervalle maximale d'existence de la solution.

Exercise 3 Appelons une fonction $y(t) \in C^0[0,\infty)$ une *solution faible* du problème $y'(t) = cy(t)$, $y(0) = a$, $a, c \in \mathbb{R}$, sur $[0,\infty)$, pourvu que pour tout $\phi \in C_0^1(\mathbb{R})$ (veut dire de support compacte) on a

$$\int_0^\infty (\phi'(s) + c\phi(s))y(s)\,dt = -a\phi(0).$$

Montrer qu'alors on a $y \in C^\infty([0,\infty))$ et y est une solution classique(au sense discuté en classe). *Suggestion: choisir ϕ de manière adéquarte pour montrer la différentiabilité de y.*

Exercise 4 (i) Pour chaque $k \geq 1$ donner une équation différentielle ordinaire séparable

$$y' = g(y) \cdot f(x),\ g,\ f \in C^0,$$

avec condition initale adéquate et une infinité de solutions de classe C^k pour ce problème de Cauchy.
(ii) Même problème avec C^∞.