'EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES', SERIE 1

A retourner à M. Tobias Schmid la prochaine semaine.

Exercice 1 Soit $c > 0$ une quantité positive fixe. Soit $\triangle t > 0$ une petite quantité(qu'on va varier plus tard) et considérons la suite de valeurs définies inductivement par

$$y(k\triangle t) = y((k-1)\triangle t) \cdot (1 + c\triangle t),\ k = 1, 2, \ldots$$

Montrer que si $T = N\triangle t$, $N \geq 1$, alors

$$y(T) = y(0) \cdot e^{cT} \cdot (1 + g(\triangle t, T, c)),$$

où l'on a pour une constante adéquate (dependant de c)

$$\big|g(\triangle t, T, c)\big| \leq C \cdot \triangle t \cdot T$$

pourvu que $\triangle t$ est suffisamment petit.

Exercice 2 Montrer que si $\mathbf{x}(t)$ est une fonction de classe $C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^3 \backslash \{\mathbf{0}\})$ et satisfait le système

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = -Gm\frac{\mathbf{x}(t)}{\|\mathbf{x}(t)\|^3}$$

alors il existe un plan fixe $\mathbf{E} \subset \mathbb{R}^3$ tel que $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{E}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. Soit $\mathbf{A}(x) \in C^0(\mathbb{R}; \mathrm{Mat}(2 \times 2; \mathbb{R}))$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ prenant valeurs dans l'espace des matrices de type 2×2. Montrer que le système de édos

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y}(x),\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$$

où $\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$ admet une solution unique de classe C^1 qui peut être obtenue par itération de Volterra, en écrivant le problème différentiel de manière intégrale

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{y}(0) + \int_0^x \mathbf{A}(s) \cdot \mathbf{y}(s)\, ds$$

et utilisant une réitération adéquate. Montrer que vous arrivez à une formule

$$\mathbf{y}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{y}_j(x),\ \mathbf{y}_0(x) = \mathbf{y}_0,$$

où les $\mathbf{y}_j(x)$ sont des fonctions de classe C^1, et avec

$$\big|\mathbf{y}_j(x)\big| \leq \frac{C^j(x)}{j!},$$

$$\big|\mathbf{y}(x) - \sum_{n=0}^{N} \mathbf{y}_j(x)\big| \leq \frac{C^{N+1}(x)}{(N+1)!},$$

pour une fonction continue et positive $C(x)$.