

BONJOUR et BIENVENUE

Intervenants : **Eric DAVALLE**, Dr Ingénieur civil EPFL

Chef du Service de l'électricité de la Ville de Lausanne



avec les assistants du LSMS

Programme des semaines 1 à 4

Semaines N° Jour		Chapitres	Titres
1	Mardi	7.10 et suivants 14.1 - 14.3	Propriétés mécaniques des matériaux Traction plastique
	Jeudi	15,4 15.5 - 15.9	Flexion plastique plane Flexion plastique plane
2	Mardi	8.1 - 8.7	Torsion uniforme
	Jeudi	8.8 - 8.10	Torsion uniforme
		9.1 - 9.3	Contraintes dues à l'effort tranchant
3	Mardi	9.4 - 9.8	Contraintes dues à l'effort tranchant
	Jeudi	9.9 - 9.12	Contraintes dues à l'effort tranchant
		MS (V3) 7.1 - 7.10	Formes intégrales d'équilibre et cinématique - Travaux virtuels
4	Mardi	13.1 - 13.6 10.1 - 10.2	Énergie (forces et déformations associées) Déformation des poutres soumises à la flexion simple
	Jeudi	10.3	Déformation des poutres soumises à la flexion simple

9. Contraintes dues à l'effort tranchant



Présentation du cours


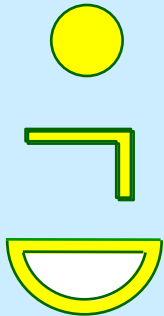



TABLE DES MATIERES (1)



N° semaines	Chapitres (vol. 2)	Titres
1	14.1 - 14.3	Traction plastique
	15.4	Flexion plastique plane
2	15.5 - 15.9	Flexion plastique plane
	7.10 et compléments	Propriétés mécaniques des matériaux
3	8.1 - 8.7	Torsion uniforme
4	8.8 - 8.10	Torsion uniforme
	9.1 - 9.3	Contraintes dues à l'effort tranchant
5	9.4 - 9.8	Contraintes dues à l'effort tranchant
6	9.9 - 9.12	Contraintes dues à l'effort tranchant
	10.1 - 10.2	Déformée des poutres soumises à flexion simple
7	MS (vol. 3) 7.1 - 7.10	Formes intégrales d'équilibre et cinématique - Travaux virtuels
	13.1 - 13.6	Energie
8	10.3	Déformée des poutres soumises à flexion simple
	11.1	Sollicitations composées
	12.1 - 12.5 et 12.7	Principes des travaux virtuels et calcul des déplacements

CALCUL des CONTRAINTES dans les POUTRES

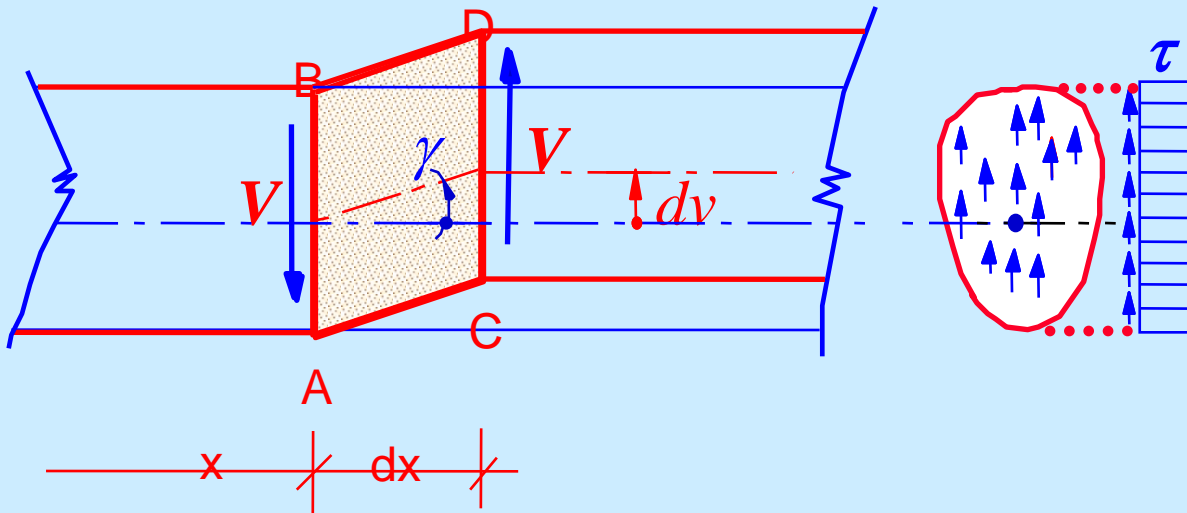
	N	V	M	T
CONTRAINTES	$\sigma = \frac{N}{A}$		$\sigma = -\frac{M}{I} y$	$\tau = \begin{cases} \frac{T}{I_p} r \\ \frac{T}{J} t \\ \frac{T}{2\Omega t} \end{cases}$ 
CINÉMATIQUE	BERNOULLI Sections planes		BERNOULLI-NAVIER Sections planes	Les sections GAUCHISSENT ⇒ théorie exacte de Saint - Venant

LIAISON ! (toujours !)

Théorie élémentaire

Issu des équations d'équilibre on sait en **flexion simple** que :

$$V = -\frac{dM}{dx}$$



$$\gamma = \frac{dv}{dx} = \text{cste}$$

$\Rightarrow \gamma$ seuls (losange) $\Rightarrow \tau$ uniformes

$$\Rightarrow \tau = \frac{V}{A} \qquad \gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{V}{GA}$$

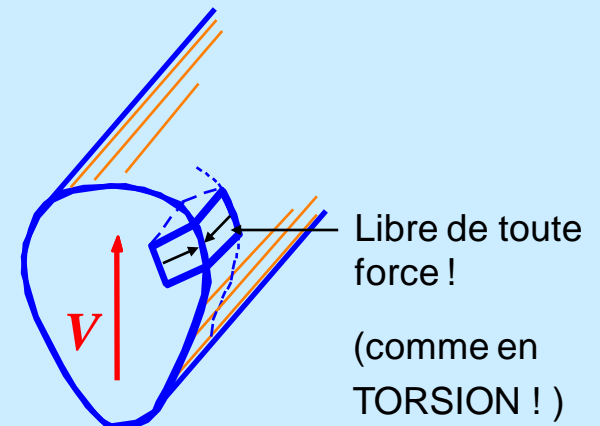
(Hooke)

Section CD glisse en restant plane



théorie pas admissible !!!

Problème de réciprocity des τ

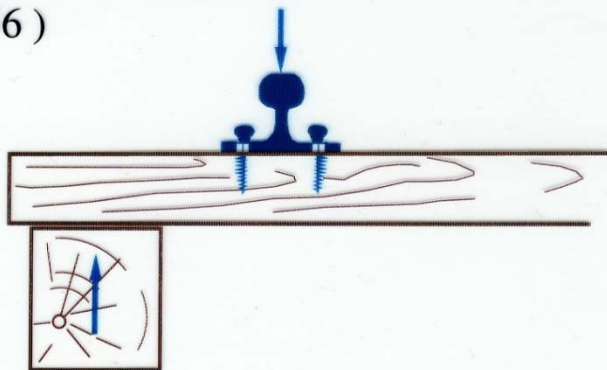


Théorie relative à l'effort rasant (**Equilibre**)

On constate donc :

- **pas de loi simple** pour représenter la déformation : les sections **gauchissent** (comme en torsion).
- Sachant que $V = - dM / dx \Rightarrow$ on peut procéder par équilibre si **on admet a priori connue** la répartition des σ de flexion (pure)
 - on prend $\sigma = - M y / I$ (Bernoulli & Hooke)
 - on ne fait aucune hypothèse sur la répartition des ε_{ij}
 - on vérifie après coup que ces 2 hypothèses sont **acceptables**

Théorie de JOURAWSKI
(~ 1856)

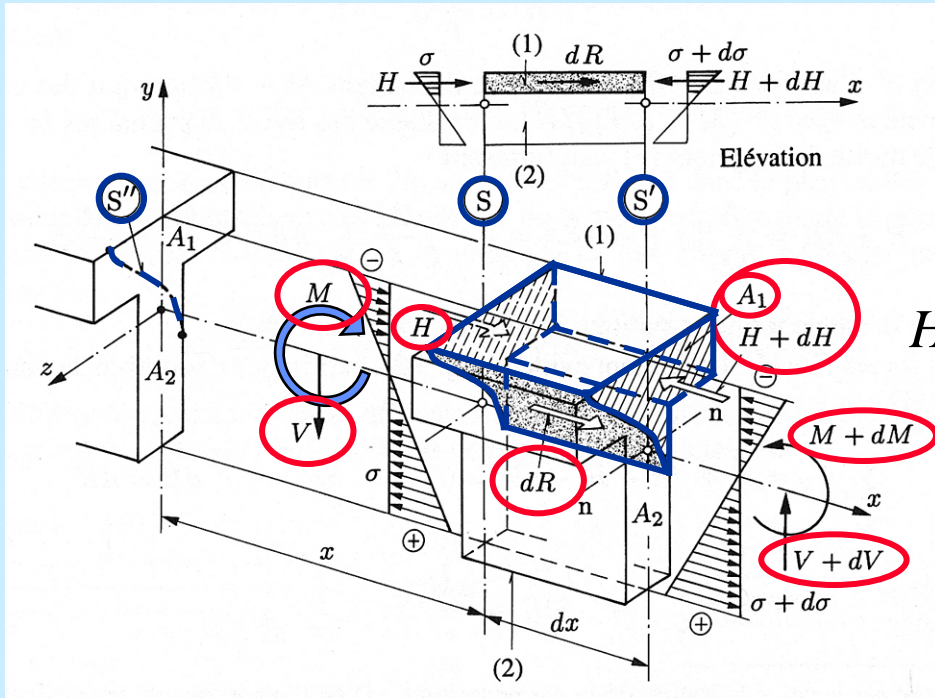


Hypothèses :

- application de la loi de Hooke
- poutre admise prismatique (h pas lentement variable)
- considère que les axes principaux

Théorie relative à l'effort rasant (Equilibre)

Par l'équilibre longitudinal, on fait apparaître l'effort rasant



$$H = \int_{A_1} \sigma dA = \frac{M}{I} \int_{A_1} y dA$$

Par rapport à l'axe n-n

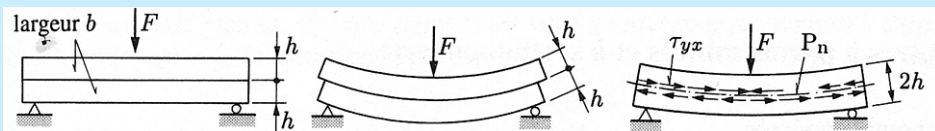
$$H = \frac{M}{I} S \quad \text{où } S \text{ est le moment statique de } A_1$$

$$H + dH = \int_{A_1} \sigma dA = \frac{M + dM}{I} S > H$$

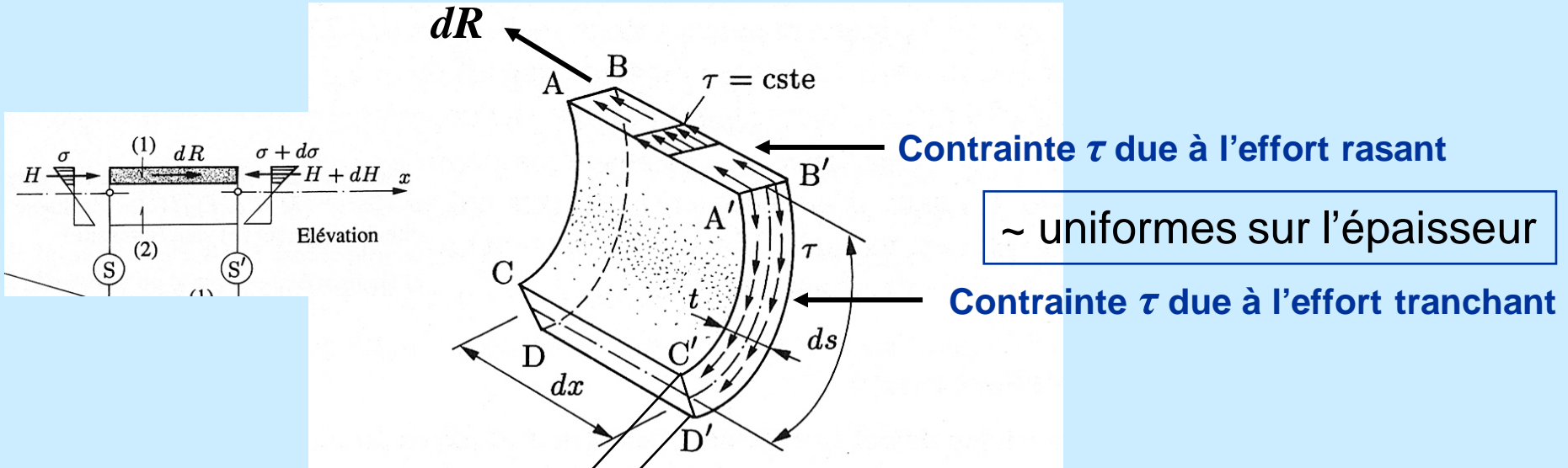
$$\rightarrow dR = dH = \frac{dM}{I} S = \frac{(-V)S}{I} dx$$

dR est appelé l'effort rasant

- il agit dans la coupe S''
- dR opposé à dH et $d\sigma$



Poutres à parois minces



Hyp.: épaisseur t mince

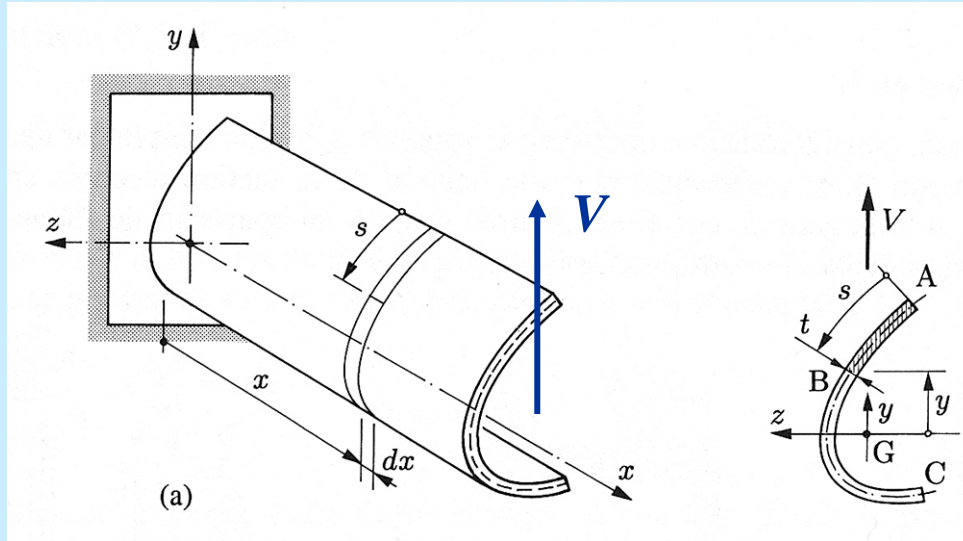
$$\tau = \frac{(-V)S}{I t}$$

$$\tau = \frac{dR}{t dx} \text{ et } dR = \frac{(-V)S}{I} dx$$

le flux de cisaillement f

$$f = \tau t = \frac{dR}{dx} = \frac{(-V)S}{I} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$$

Poutres à parois minces et à section ouverte



$$dR = \frac{(-V)S}{I} dx$$

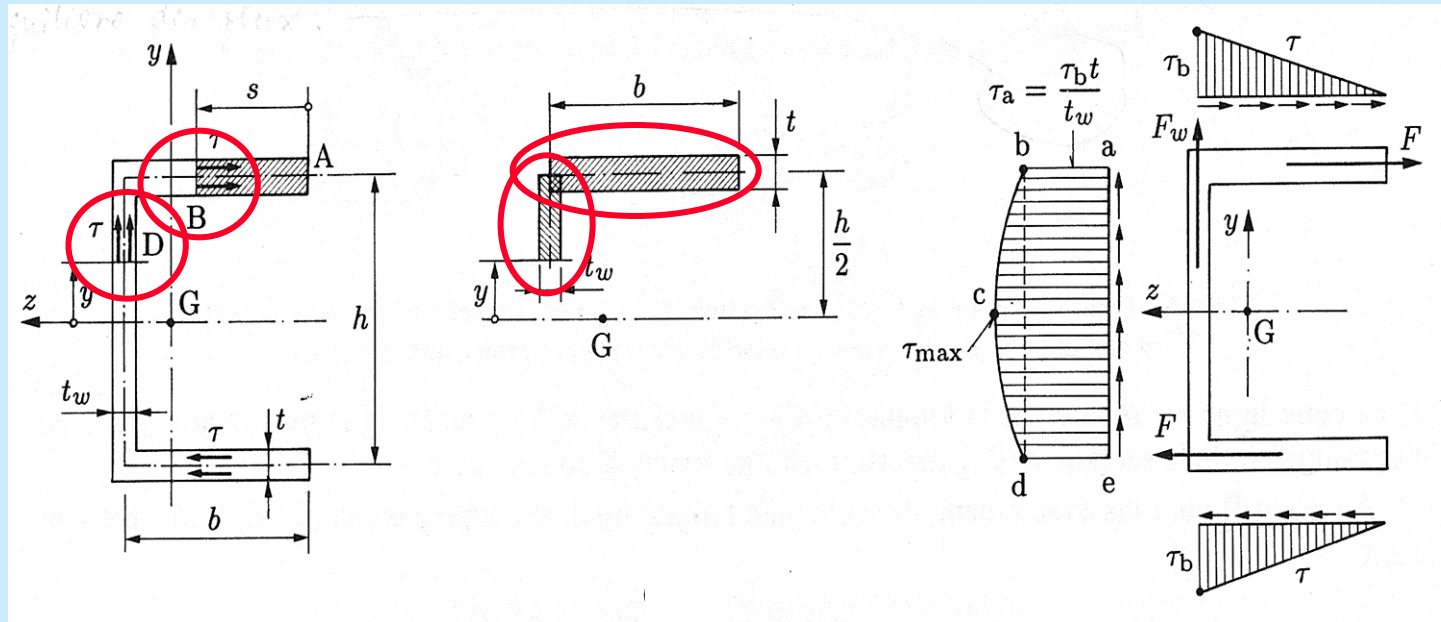
$$\tau = \frac{(-V)S}{I t}$$

$(-V)/I$ est constant

S/t est variable

$$S \cong \int_0^s y(s)t(s) ds$$

Poutres à section en U

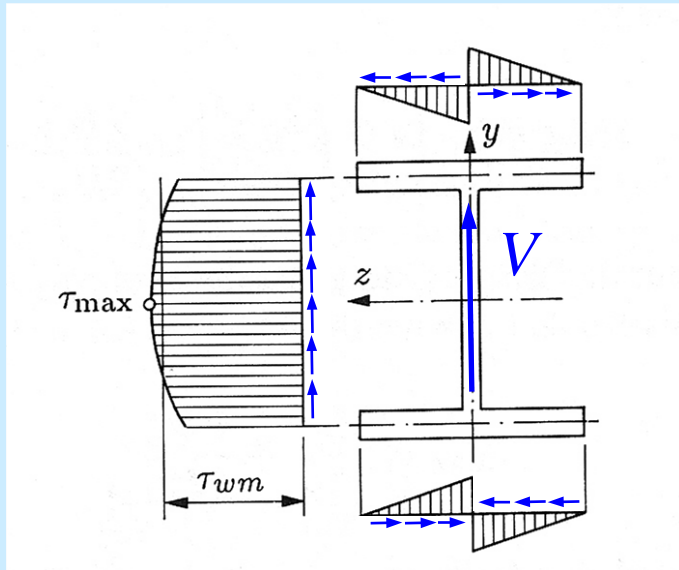


En B : $|\tau| = \frac{V S}{I t}$ et $S = s t (h/2) \Rightarrow |\tau| = \frac{V s t h}{2 I t} = \frac{V s h}{2 I}$ linéaire

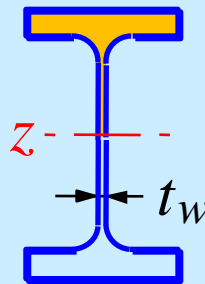
En D : $\tau = \frac{V S_w}{I t_w}$ et $S_w = b t (h/2) + t_w (\frac{h}{2} - y) h'$ où $h' = \frac{1}{2} (h/2 - y) + y$

$$\tau_{\max} = \frac{V h^2}{8 I} + \frac{V b t h}{2 I t_w} \quad \text{parabolique}$$

Poutres âme-semelles



Laminés en acier

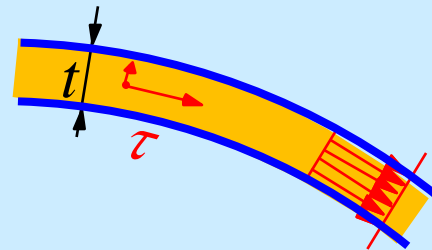


$$\tau_{\max} = \left| \frac{V}{I_z} \frac{S}{t_w} \right|$$

(web \equiv âme)

table !

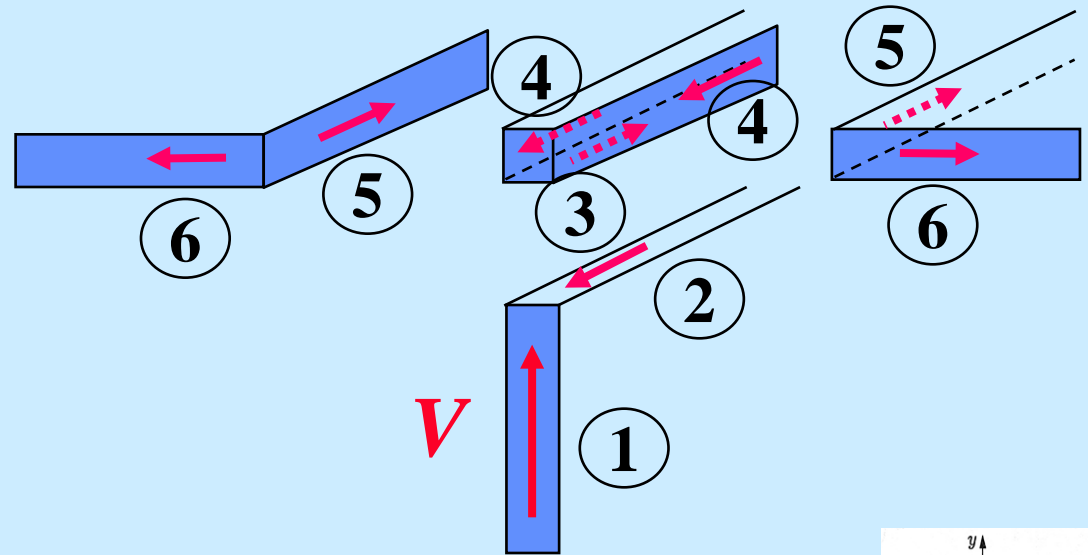
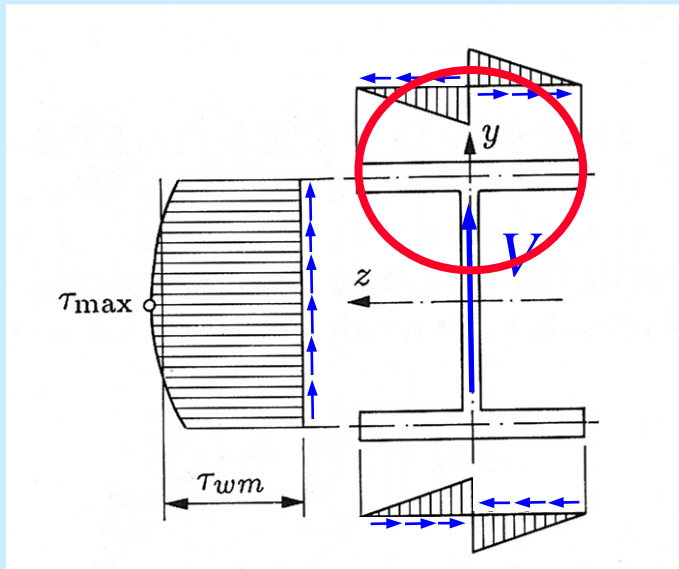
τ sans signe (petites flèches $\tau \perp$ paroi négligé et négligeable si t petit indiquant le sens)



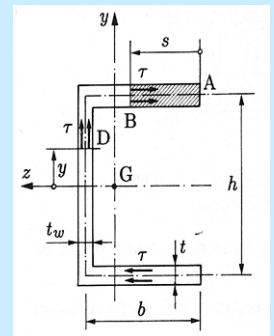
τ constant à travers t

- flux $f = \tau t$
- non constant dans section
- équilibre des flux !

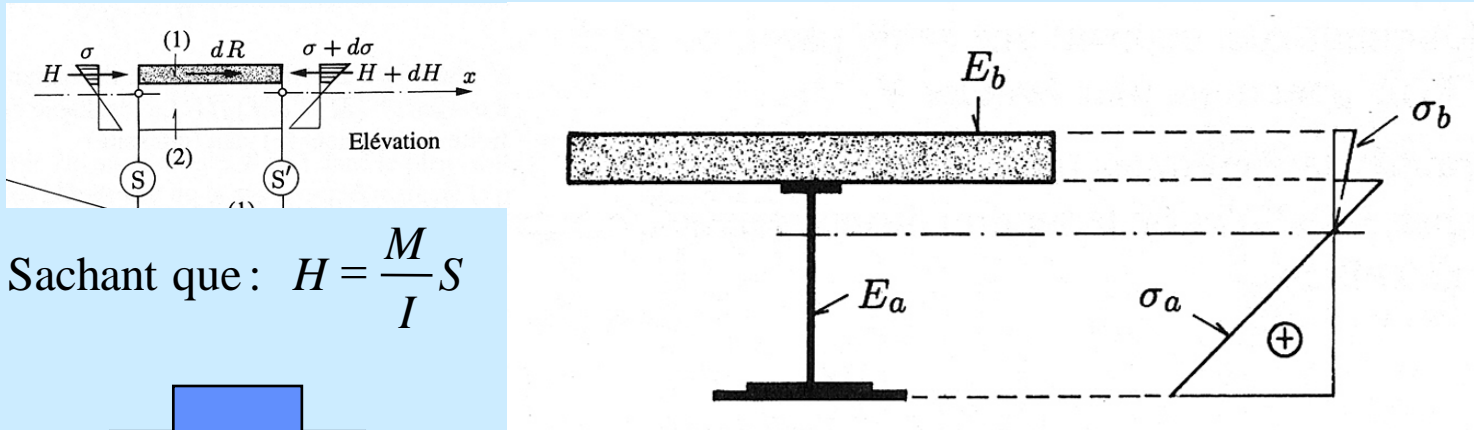
Poutres âme-semelles



Faire l'exemple suivant :



Poutres composée de deux matériaux (admis parois minces)



$$H = H_a + H_b = \int_{A_1} \sigma dA = \int_{A_{1a}} \sigma_a dA + \int_{A_{1b}} \frac{\sigma_a}{n} dA \quad \text{Attention!} \quad \frac{1}{n} = \frac{E_b}{E_a} \quad \text{et non } \frac{1}{m}$$

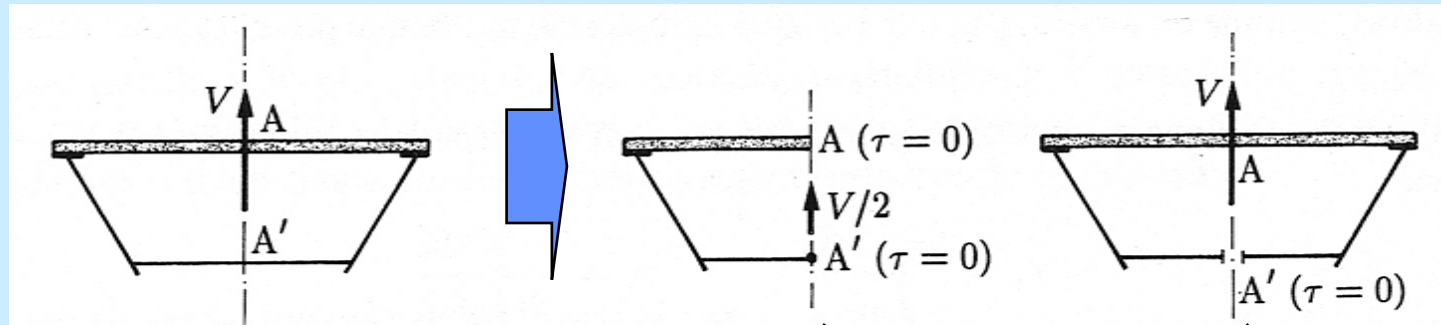
$$H = \frac{M}{\tilde{I}_a} \left(S_a + \frac{1}{n} S_b \right) = \frac{M}{\tilde{I}_a} \tilde{S}_a$$

↑
Moment statique équivalent

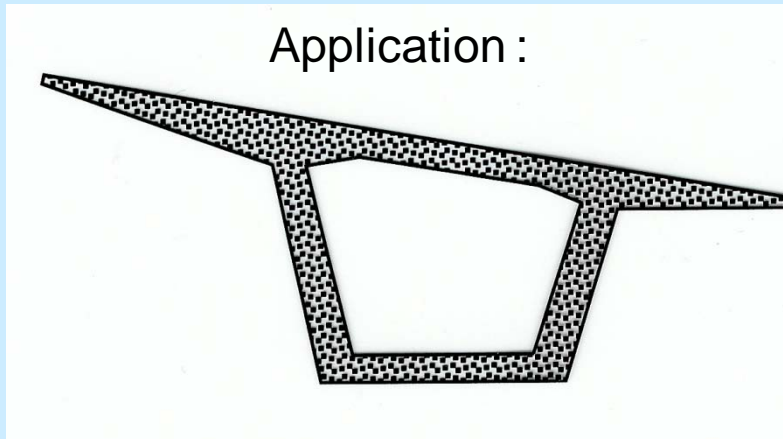
$$\tau_a = \frac{f}{t_a} = \frac{(-V) \tilde{S}_a}{\tilde{I}_a t_a} \quad \tau_b = \frac{f}{t_b} = \frac{(-V) \tilde{S}_a}{\tilde{I}_a t_b}$$

Poutres tubulaires à parois minces

Par symétrie (géométrie et charges) :



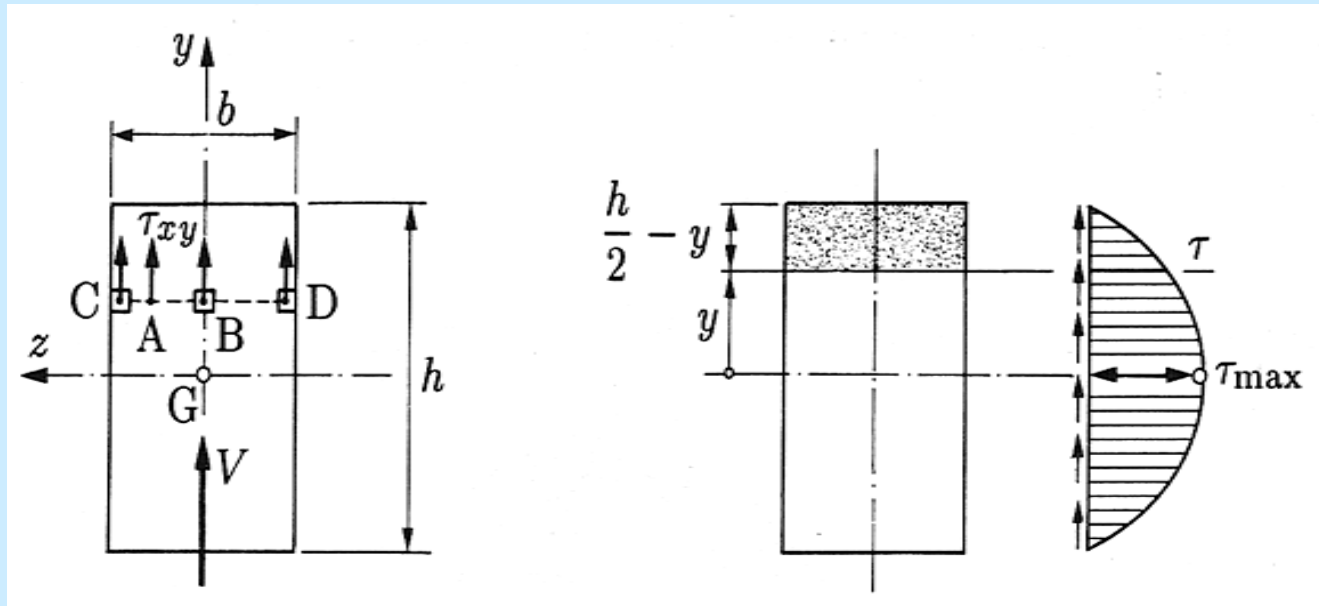
Application :



$$\tau = \frac{(-V) S}{I t}$$

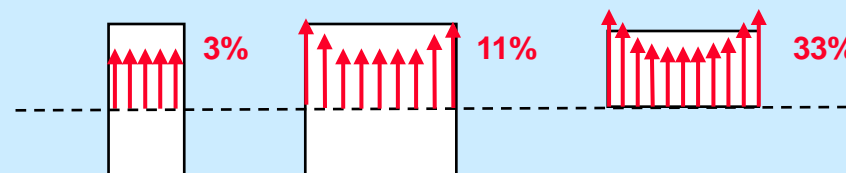
La répartition des contraintes tangentielles est un problème hyperstatique

Section rectangulaire



$$\tau = \frac{(-V)S}{I t} \Rightarrow \tau_{\max} = \alpha \frac{3 V}{2 A} \quad \text{où} \quad \alpha = f(h/b)$$

h/b	α	Erreur
2	1,028	3%
1	1,105	11%
0,5	1,33	33%



Centre de cisaillement ou centre de torsion

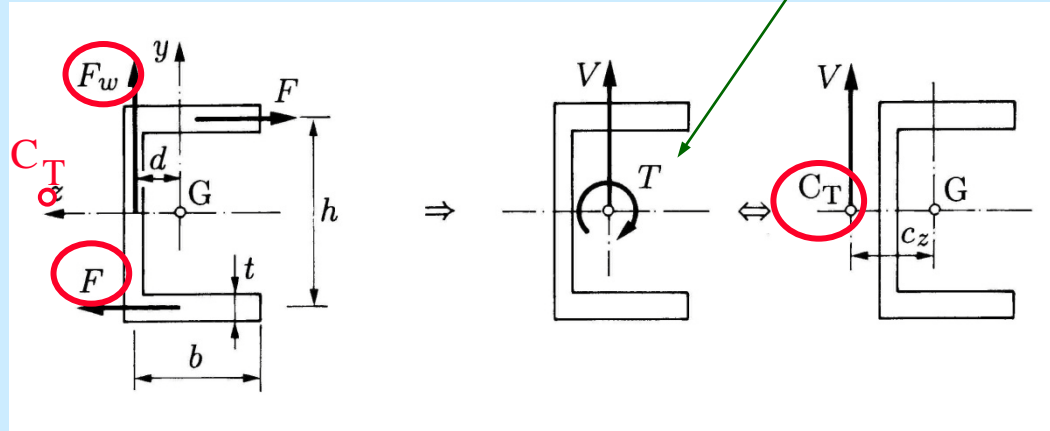
Hypothèse :

Poutre
section en U
en flexion simple

$$F = \frac{V t b^2 h}{4 I}$$

(voir § 9.5.2)

$$F_w = V$$



On cherche où
appliquer V pour
éviter la torsion :
où $T = 0$

Le principe d'équivalence permet d'écrire :

en translation :

$$V_y = \int_A \tau_{xy} dA \Rightarrow V_y = F_w = V$$

$$V_z = \int_A \tau_{xz} dA \Rightarrow V_z = F - F = 0$$

en rotation autour de G :

$$T = \int_A \tau_{xy} z dA + \int_A \tau_{xz} y dA \Rightarrow T = -F_w d - F h \neq 0$$

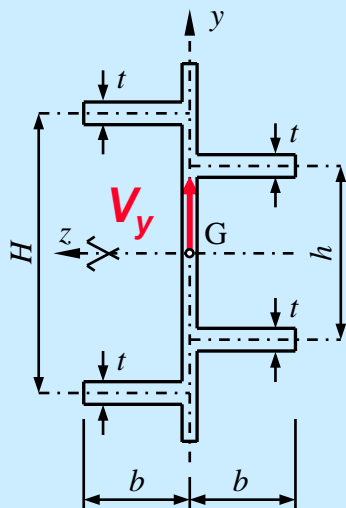
$$\text{donc } c_z = \frac{T}{V} = \frac{T = -F h - F_w d}{V} = \frac{t b^2 h^2}{4 I} + d$$

C_T est le centre de cisaillement ou de torsion

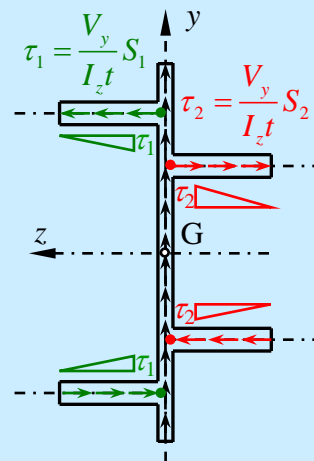
(les 2 centres coïncident selon Th. de réciprocité de Betti)

Centre de cisaillement ou centre de torsion

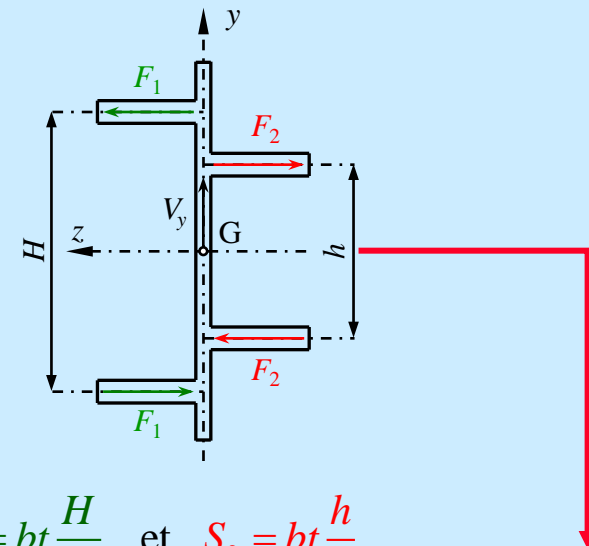
Situation



Sens des flux et τ_{\max} des semelles



Résultantes des flux

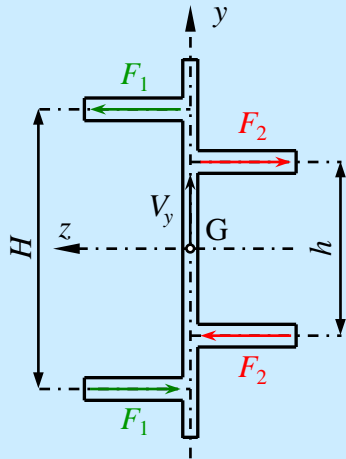


Avec $S_1 = bt \frac{H}{2}$ et $S_2 = bt \frac{h}{2}$,

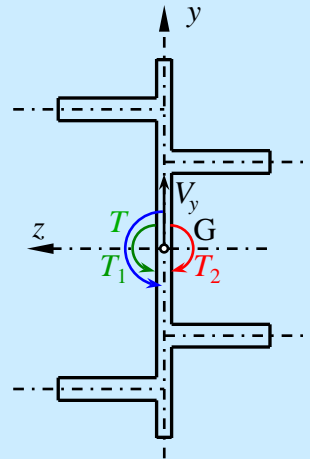
$$\begin{cases} F_1 = \frac{1}{2} \tau_1 bt \\ F_2 = \frac{1}{2} \tau_2 bt \end{cases}$$

Centre de cisaillement ou centre de torsion

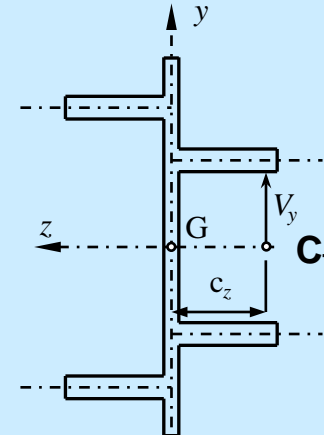
Résultantes
des flux



Système
équivalent



Equivalence
en rotation



Avec $S_1 = bt \frac{H}{2}$ et $S_2 = bt \frac{h}{2}$,

$$F_1 = \frac{1}{2} \tau_1 bt = \frac{V_y}{I_z} \frac{1}{2} S_1 bt = \frac{V_y}{I_z} \frac{1}{2} bt \frac{H}{2} bt = \frac{V_y}{I_z} \frac{1}{4} b^2 t H$$

$$F_2 = \frac{1}{2} \tau_2 bt = \frac{V_y}{I_z} \frac{1}{2} S_2 bt = \frac{V_y}{I_z} \frac{1}{2} bt \frac{h}{2} bt = \frac{V_y}{I_z} \frac{1}{4} b^2 t h$$

$$\Rightarrow T = T_1 - T_2 = F_1 H - F_2 h = \frac{V_y}{I_z} \frac{1}{4} b^2 t (H^2 - h^2)$$

Equivalence en rotation : $V_y c_z = T = T_1 - T_2$

$$\Rightarrow c_z = \frac{T}{V_y} = \frac{T_1 - T_2}{V_y} = \frac{1}{4 I_z} b^2 t (H^2 - h^2)$$

et

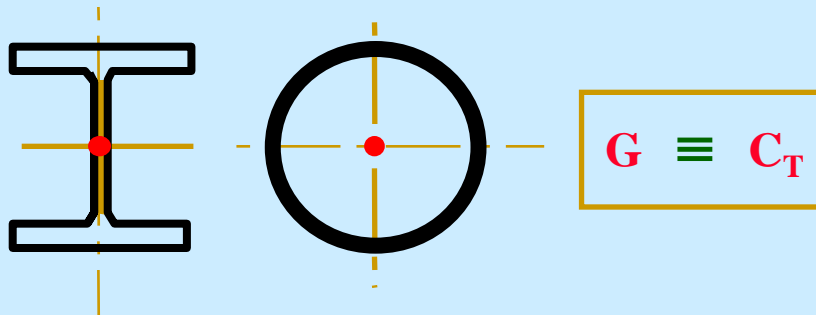
Si $h < H$, $c_z > 0$ et C_T à droite de G

Si $h = H$, $c_z = 0$ et C_T confondu avec G

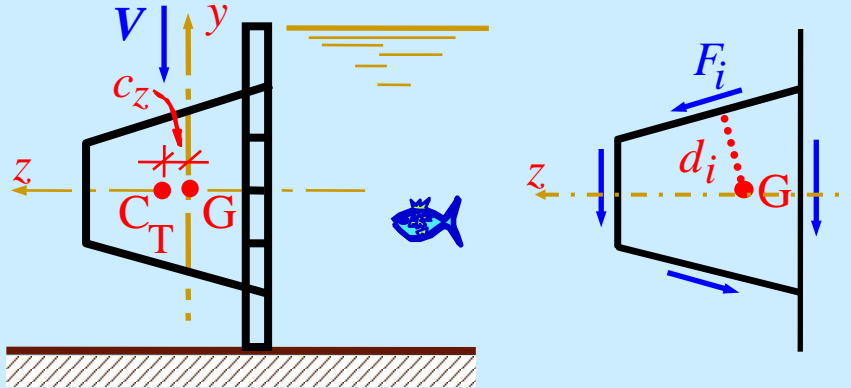
Si $h > H$, $c_z < 0$ et C_T à gauche de G

Centre de cisaillement ou centre de torsion

1. SECTION DOUBLEMENT SYMETRIQUE



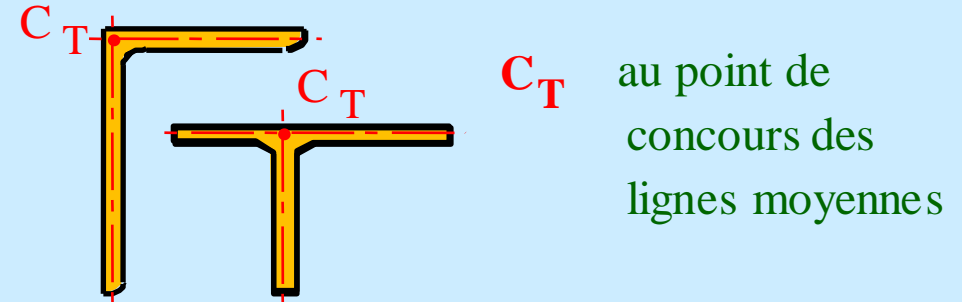
2. SECTION AVEC UN AXE DE SYMETRIE



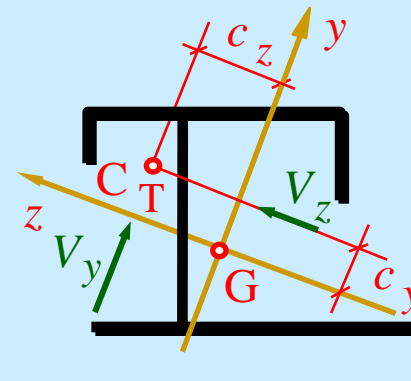
a) C_T sur axe de symétrie

$$b) V c_z = \sum F_i(V) d_i \Rightarrow c_z = \frac{\sum F_i(V) d_i}{V}$$

3. PAROIS PLANES MINCES CONCOURANTES



4. SECTION QUELCONQUE (parois minces)



1. Axes principaux (y,z)
2. Plan xy (V_y) $\Rightarrow c_z$
3. Plan xz (V_z) $\Rightarrow c_y$

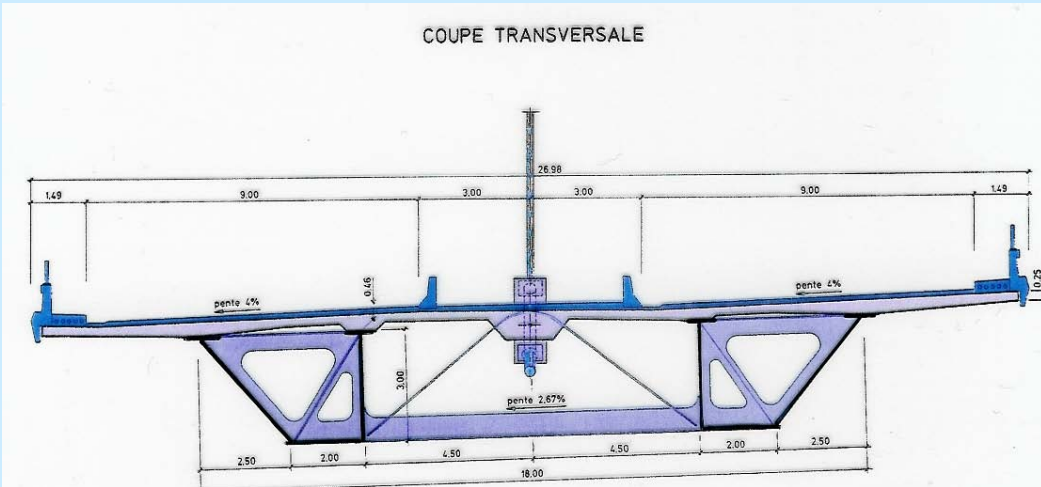
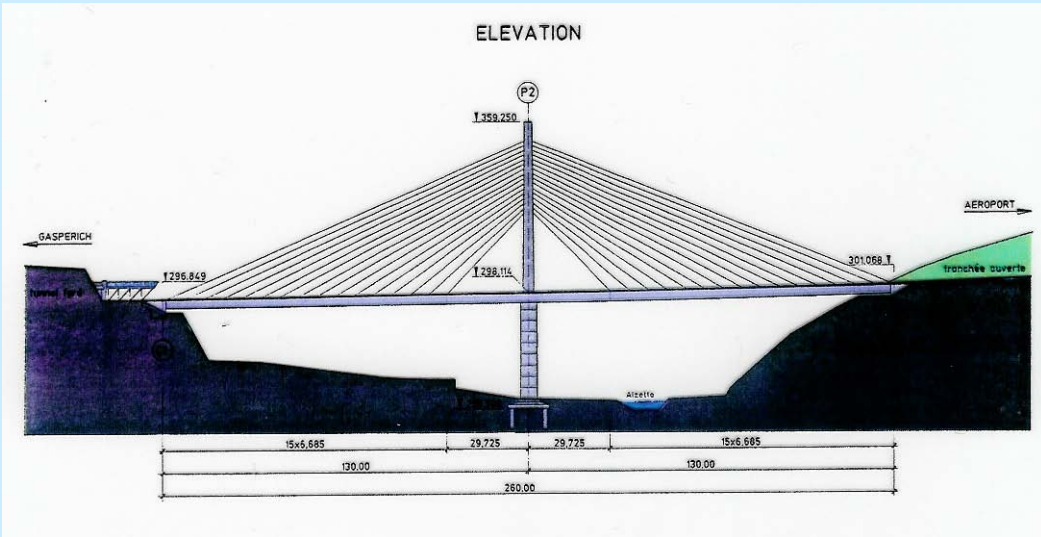
Equivalence en rotation autour de G

N'importe quel autre point peut convenir (BIEN CHOISIR !)

$c_z > 0 \rightarrow C_T$ du côté choisi, $c_z < 0 \rightarrow C_T$ du côté opposé

Response	Percentage
Yes	78%
No	18%
Don't know	4%

Conversion



Viaduc de Millau



$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau \\ \tau & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Etat plan de contrainte bidimensionnel}$$

Tresca, von Mises ($\sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau^2}$) , Mohr-Coulomb...

V peut fréquemment être déterminant pour le dimensionnement

Si nécessaire : • âme(s) // V

- Accroître :
 - ép. âme(s)
 - hauteur âme(s)
 - nombre des âmes soit : matière // V