BONJOUR et BIENVENUE

Intervenants : **Eric DAVALLE**, Dr Ingénieur civil EPFL

Chef du Service de l'électricité de la Ville de Lausanne

avec les assistants du LSMS

Programme des semaines 1 à 4

Semaines N°	Jour	Chapitres	Titres
1	Mardi	7.10 et suivants	Propriétés mécaniques des matériaux
		14.1 - 14.3	Traction plastique
	Jeudi	15,4	Flexion plastique plane
		15.5 - 15.9	Flexion plastique plane
2	Mardi	8.1 - 8.7	Torsion uniforme
	Jeudi	8.8 - 8.10	Torsion uniforme
		9.1 - 9.3	Contraintes dues à l'effort tranchant
3	Mardi	9.4 - 9.8	Contraintes dues à l'effort tranchant
	Jeudi	9.9 - 9.12	Contraintes dues à l'effort tranchant
		MS (V3) 7.1 - 7.10	Formes intégrales d'équilibre et cinématique - Travaux virtuels
4	Mardi	13.1 - 13.6	Énergie (forces et déformations associées)
		10.1 - 10.2	Déformation des poutres soumises à la flexion simple
	Jeudi	10.3	Déformation des poutres soumises à la flexion simple

15. Flexion plastique plane

Hypothèses de travail

- Flexion dans un plan moyen
- Flexion pure (M seul)

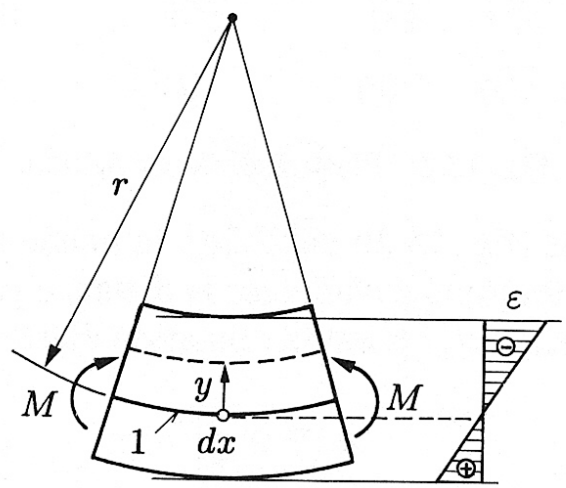


Fig. 15.1 Cinématique en flexion pure (1 : fibre ou plan neutre).

Cinématiquement :

- sections restent planes (loi de Bernoulli)

$$\varepsilon = -\psi\, y = -\frac{y}{r} \quad \text{avec } \psi = \frac{1}{r} \quad \text{la courbure}$$

En élastique linéaire, on a donc :

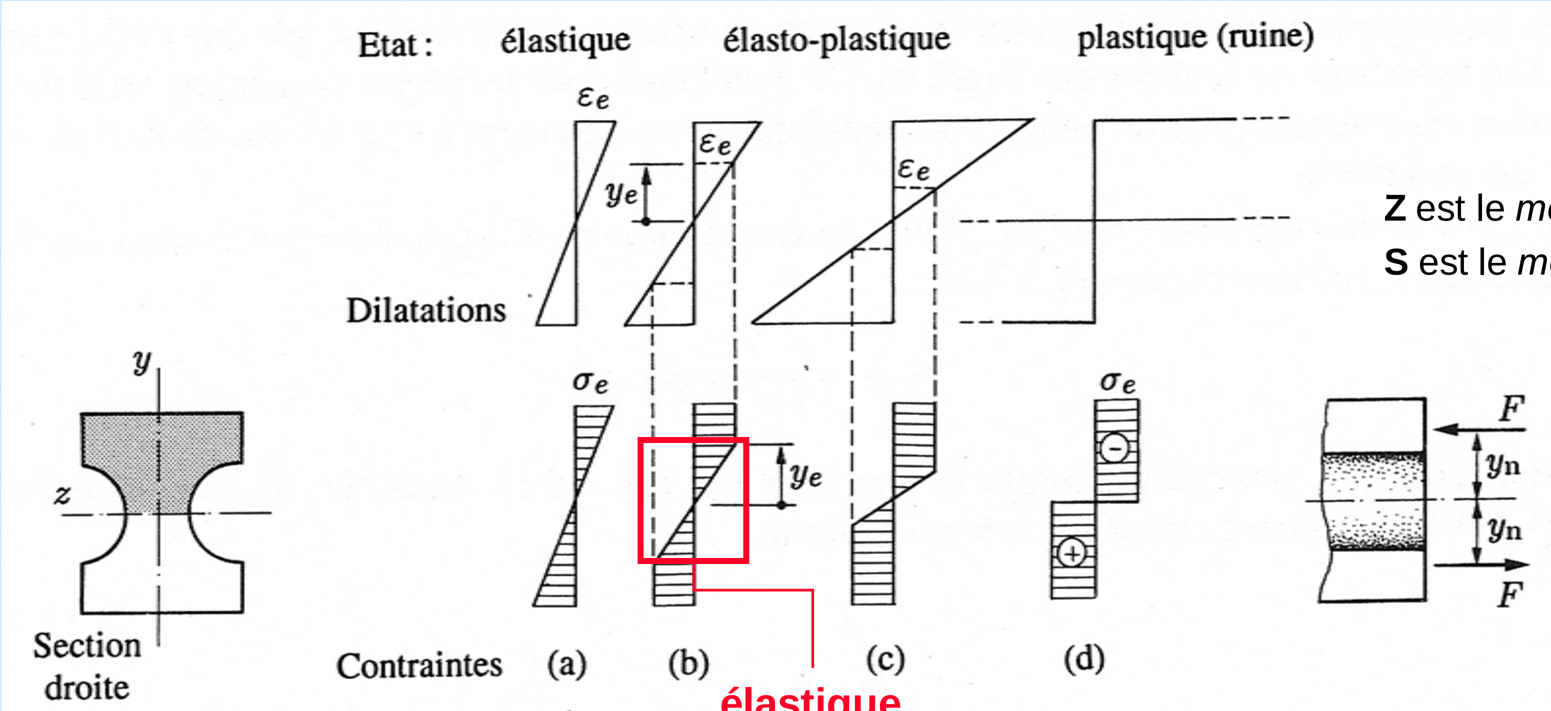
$$M_e = W\sigma_e$$

$$\psi_e = \frac{M_e}{E\,I}$$

Equations statiques

(principe d'équivalence)

Moment et module plastiques



Z est le *module plastique*

S est le *moment statique*

élastique

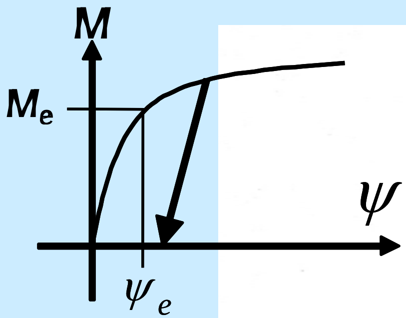
$$M_{pl} = \int_A \sigma\, y\, dA \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \sigma = -\sigma_e & \text{avec } y > 0 \\ \sigma = \sigma_e & \text{avec } y < 0 \end{cases}$$

$$N = \int_A \sigma\, dA = 0 \Rightarrow \text{axe neutre centré}$$

$$M_{pl} = \sigma_e \int_A |y|\, dA = \sigma_e \Big(2 \int_{\frac{A}{2}} |y|\, dA\Big) = Z\, \sigma_e$$

$Z = 2\, S_{demi}$ [mm³]

Déchargement en flexion inverse



$$\sigma_{rsd} = \left| \sigma_e - \frac{M}{W} \right|$$

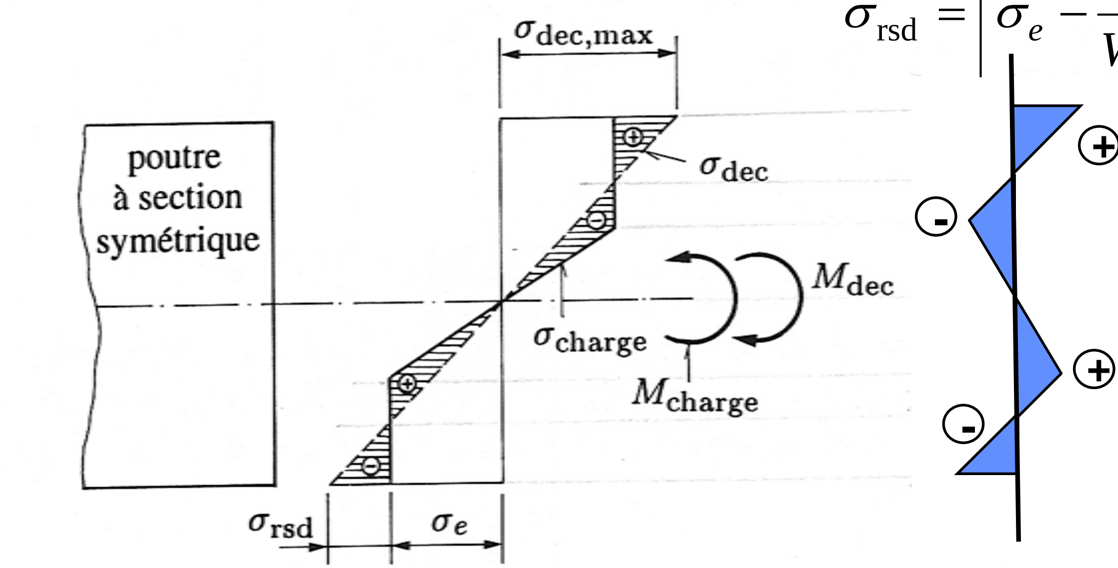


Fig. 15.4 Contraintes résiduelles après flexion élasto-plastique.

Persistance **d'une courbure et de contraintes résiduelles**

Section asymétrique en flexion

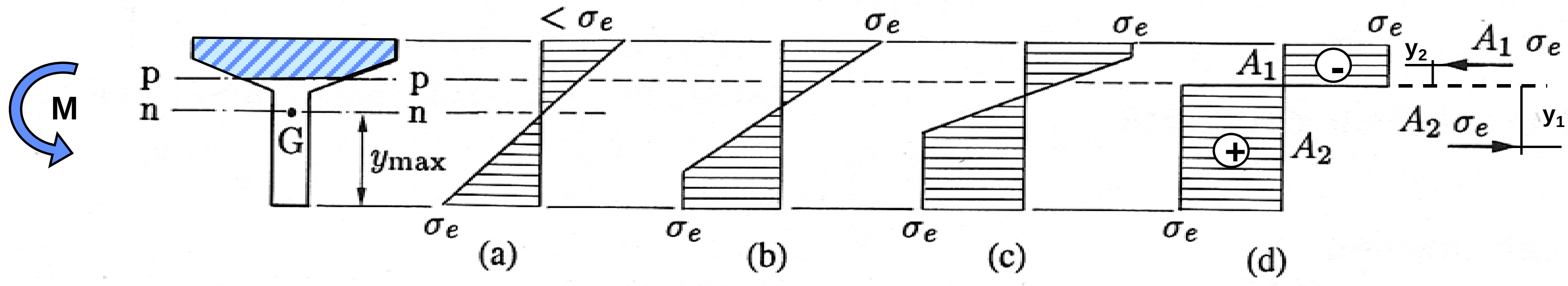


Fig. 15.5 Plastification progressive d'une section non symétrique (n-n : axe neutre de flexion élastique sous l'action de M_e ; p-p : axe neutre de flexion plastique sous l'action de M_{pl}).

Calcul élastique :

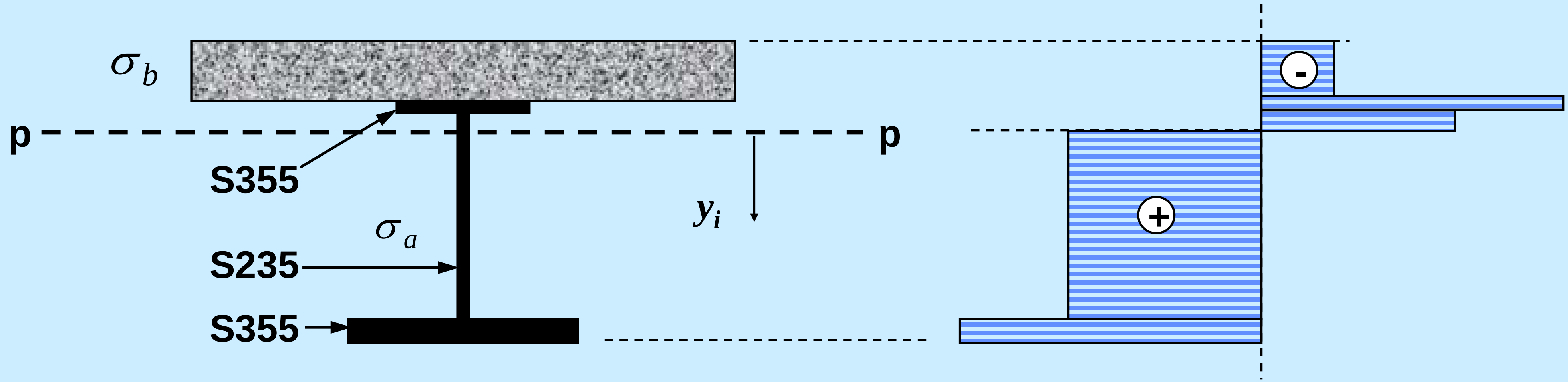
$$M_e = \sigma_e \frac{I}{y_{\max}}$$

Calcul plastique :

$$N = \int_A \sigma \, dA = -A_1\sigma_e + A_2\sigma_e = 0 \Rightarrow A_1 = A_2 = \frac{A}{2}$$

$$M_{pl} = A_1\sigma_e y_1 + A_2\sigma_e y_2 = \frac{A}{2}(y_1 + y_2)\sigma_e = Z\,\sigma_e$$

Section composée en flexion



Calcul de l'axe neutre plastique :

$$N = \int_A \sigma \, dA = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_i A_i \sigma_{e_i} = 0$$

Calcul du moment plastique :

$$M_{pl} = -\sum_i A_i \sigma_{e_i} y_i$$

3. Traction plastique

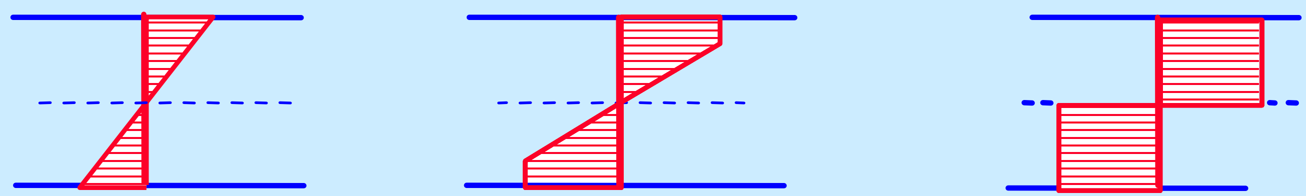
Mots-clés à retenir impérativement

- **3 piliers** de l'analyse des structures (**voir § 1 et 2**):
  - principe d'équivalence (*équilibre statique entre efforts intérieurs et contraintes*)
  - conditions cinématiques (*conservation des sections planes*)
  - loi constitutive (*matériaux*)
- Théorie de l'**élasticité**
- Théorie de la **plasticité** (modèle élastique parfaitement plastique)
- En plasticité:
  - charge de ruine ou d'effondrement, dite **charge limite**
  - **gain** de résistance par le processus de plastification de la section
  - la **ruine** d'une structure correspond à de **grands déplacements**
  - **décharge élastique** et création de contraintes résiduelles
- Propriétés vues sont valables quelque soit la complexité de la structure

Loi moment-courbure

On s'intéresse à : $\frac{M}{M_e} = f\left(\psi / \psi_e\right)$ avec : $M = EI\psi$

Exemple : section rectangulaire



$\sigma \leq \sigma_e$ — σ_e — σ_e

ELASTIQUE — **ELASTO - PLASTIQUE** — **PLASTIQUE**

$$\frac{M}{M_e} = \frac{\psi}{\psi_e}$$

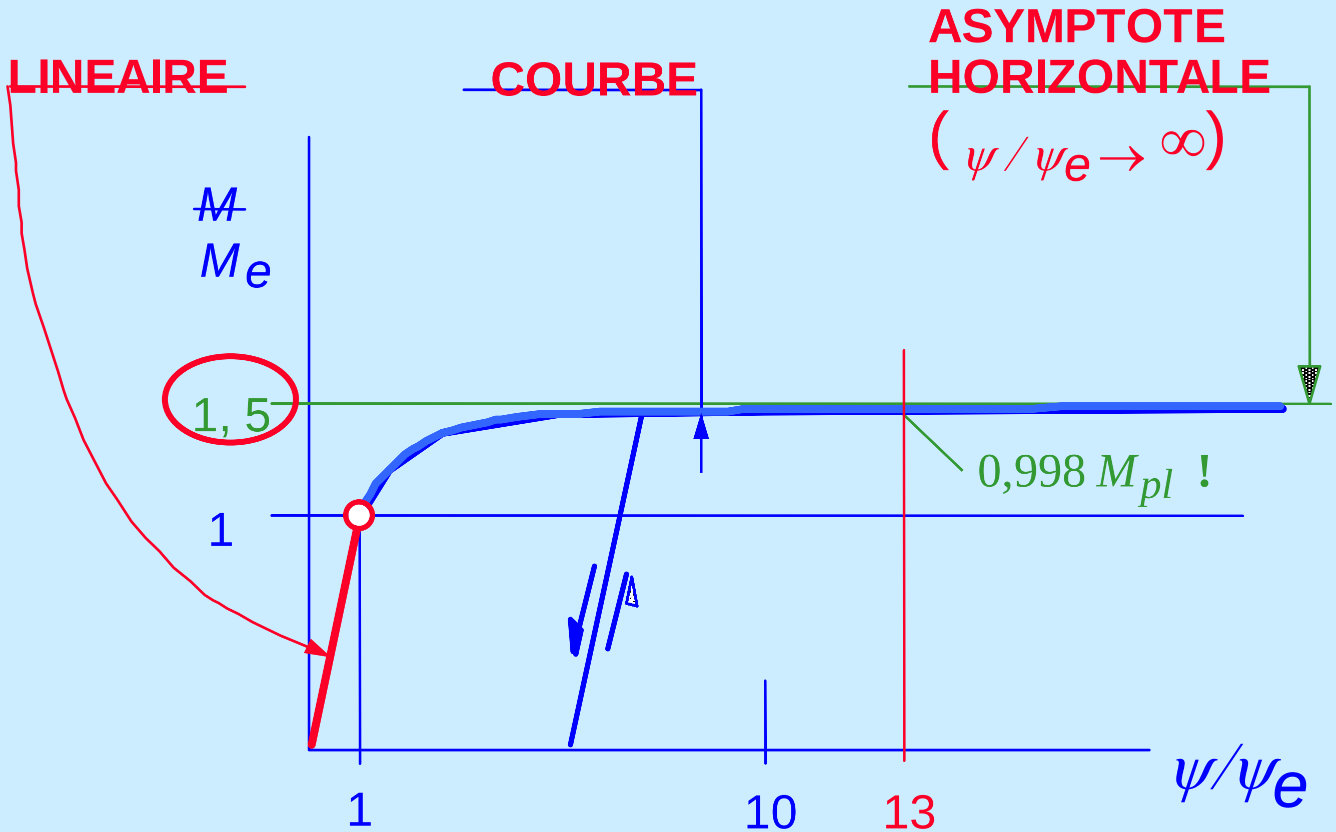
$$\frac{M}{M_e} = \frac{M_{pl}}{M_e}\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\psi_e}{\psi}\right)^2\right]$$

$$\frac{M}{M_e} \rightarrow \frac{M_{pl}}{M_e} = 1,5$$

Cette fonction dépend de la forme de la section droite

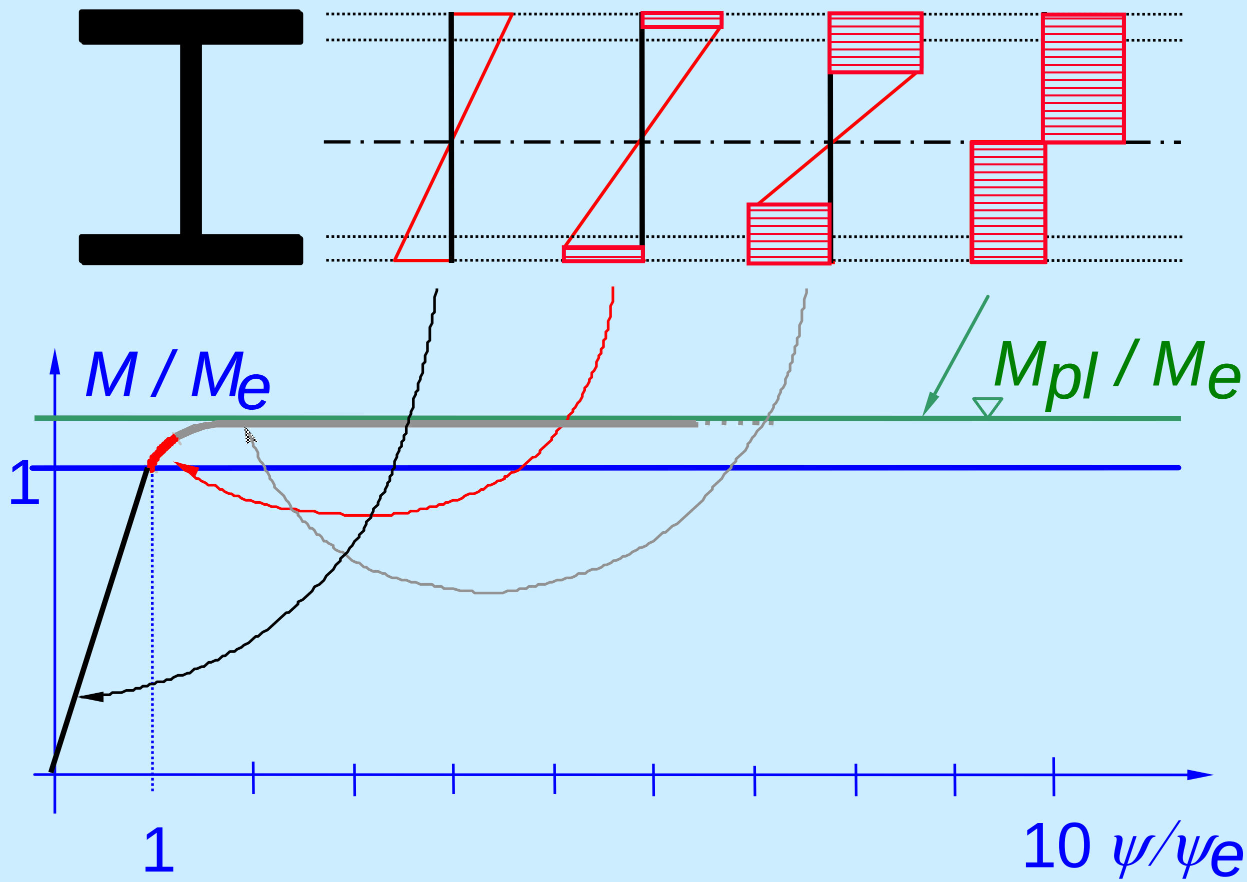
Loi moment-courbure *(section rectangulaire)*

On s'intéresse à : $$\frac{M}{M_e} = f\left(\psi / \psi_e\right)$$



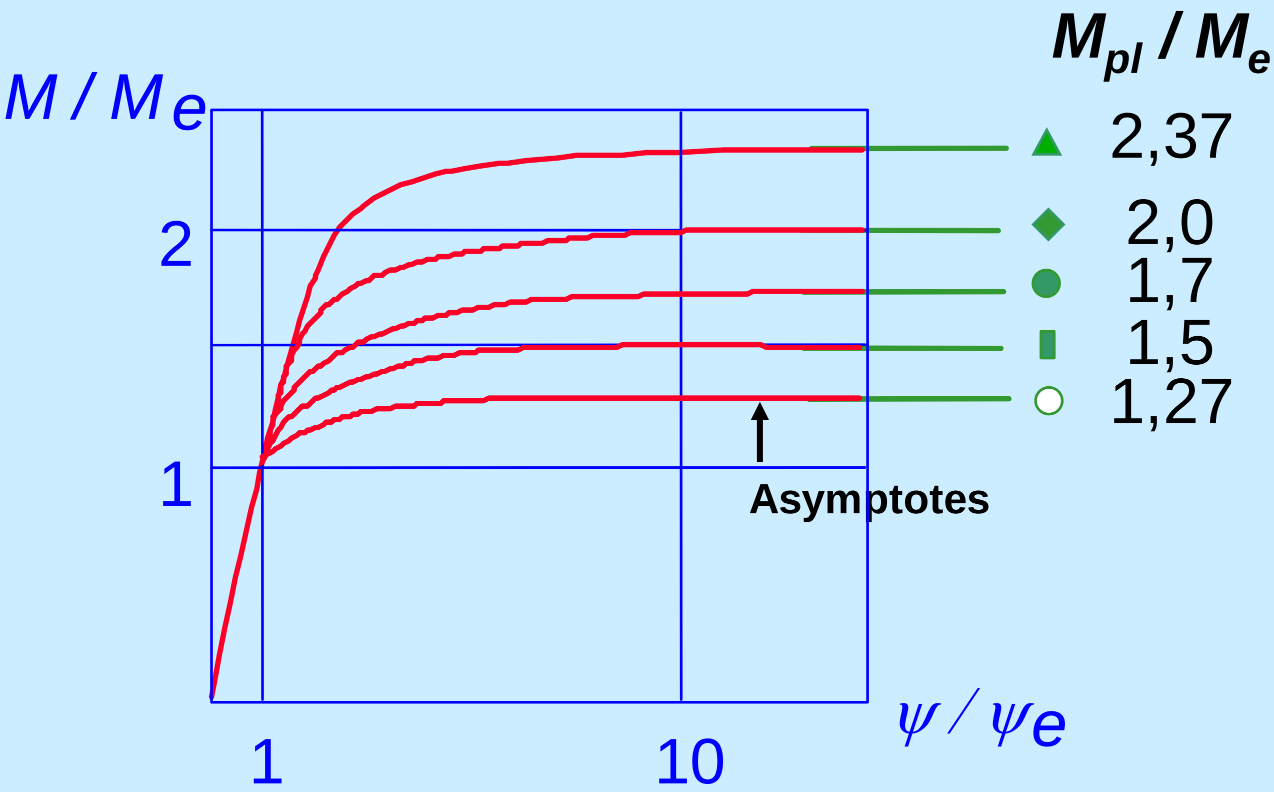
Propriété de la loi moment-courbure

La **loi (M , ψ)** peut être simplifiée par deux droites. Exemple **poutre laminée I**



$$M_{pl} / M_e = 1{,}15$$

Loi moment – courbure *(cas généraux)*



Gain dû à la plastification de la section droite

$$\alpha = \frac{M_{pl}}{M_e} = \frac{Z}{W}$$

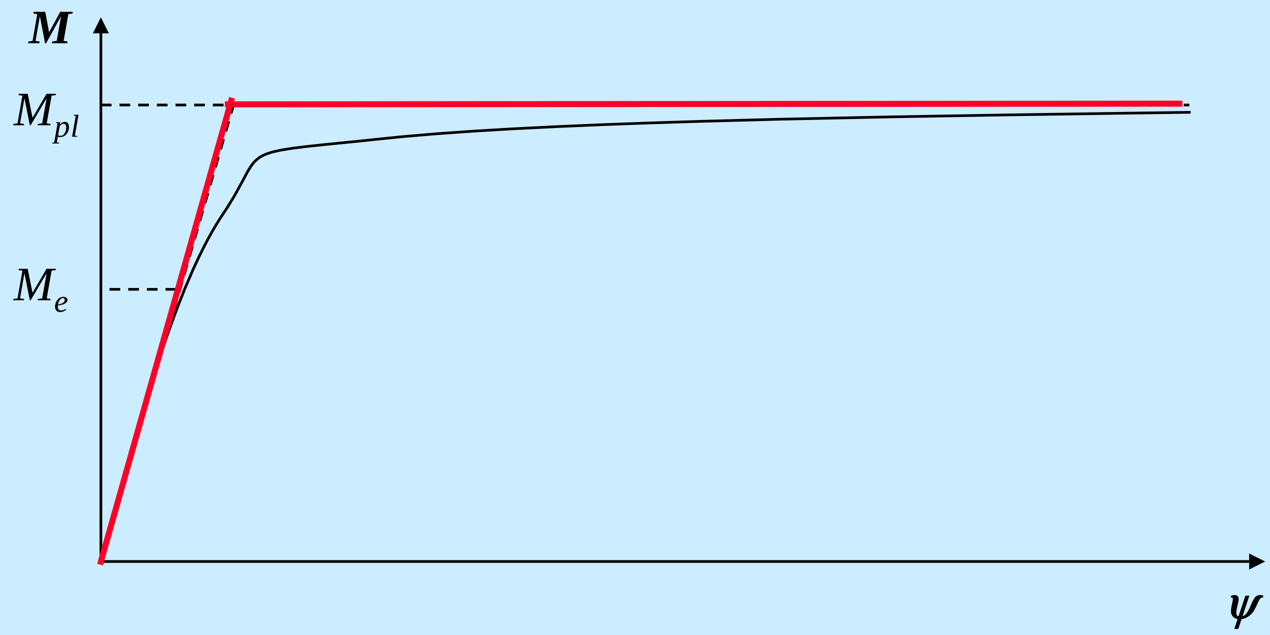
C'est le " facteur de forme ".

On constate un fort gain quand la section se concentre au voisinage de l’axe neutre

Propriété de la loi moment-courbure

La **loi (** $\boldsymbol{M}$ **,** $\boldsymbol{\psi}$ **)** peut être simplifiée par deux droites .

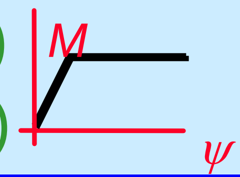
- l'une $0 \leq M \leq M_{pl}$ par la loi de **Hooke**
- l'autre $M = M_{pl}$ selon une loi **parfaitement plastique**



Notion de rotule plastique

1. Flexion pure => $M_{pl} = Z\,\sigma_e$ (a)

=> loi (M,ψ) simplifiée (b)



2. Valable en flexion simple

si $\boldsymbol{V}$ ne domine pas (usuel)

3. Valable en flexion composée

- si $\boldsymbol{N}$ reste faible ($N < 0{,}15\,N_{pl}$)
- sinon correction

Donc (a) et (b) s'appliquent aux **structures planes en poutres usuelles.**

Notion de rotule plastique

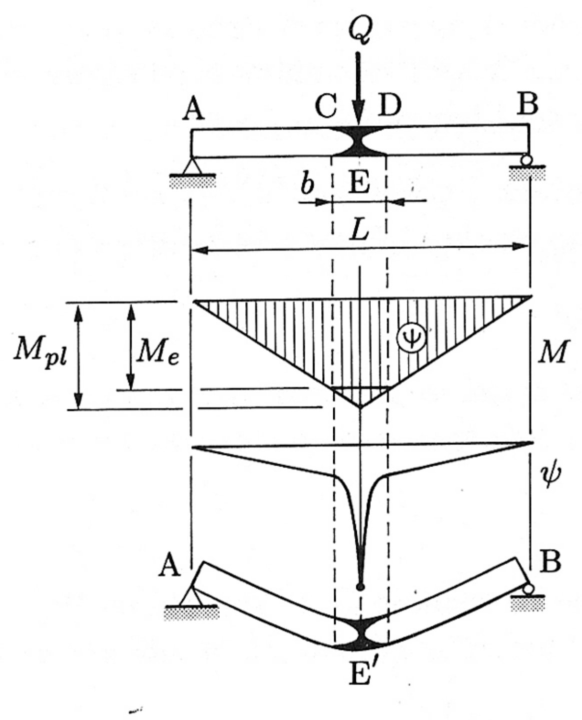


Fig. 15.13 Poutre simple sous force concentrée ; plastification et déformation pour la loi moment-courbure réelle.

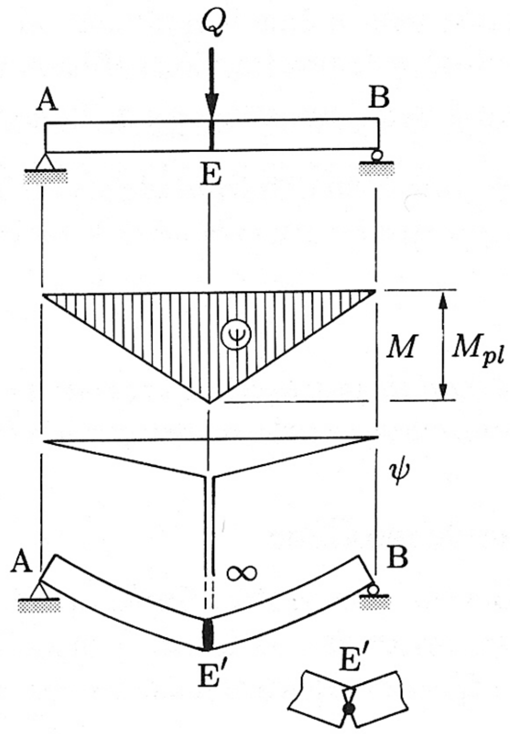
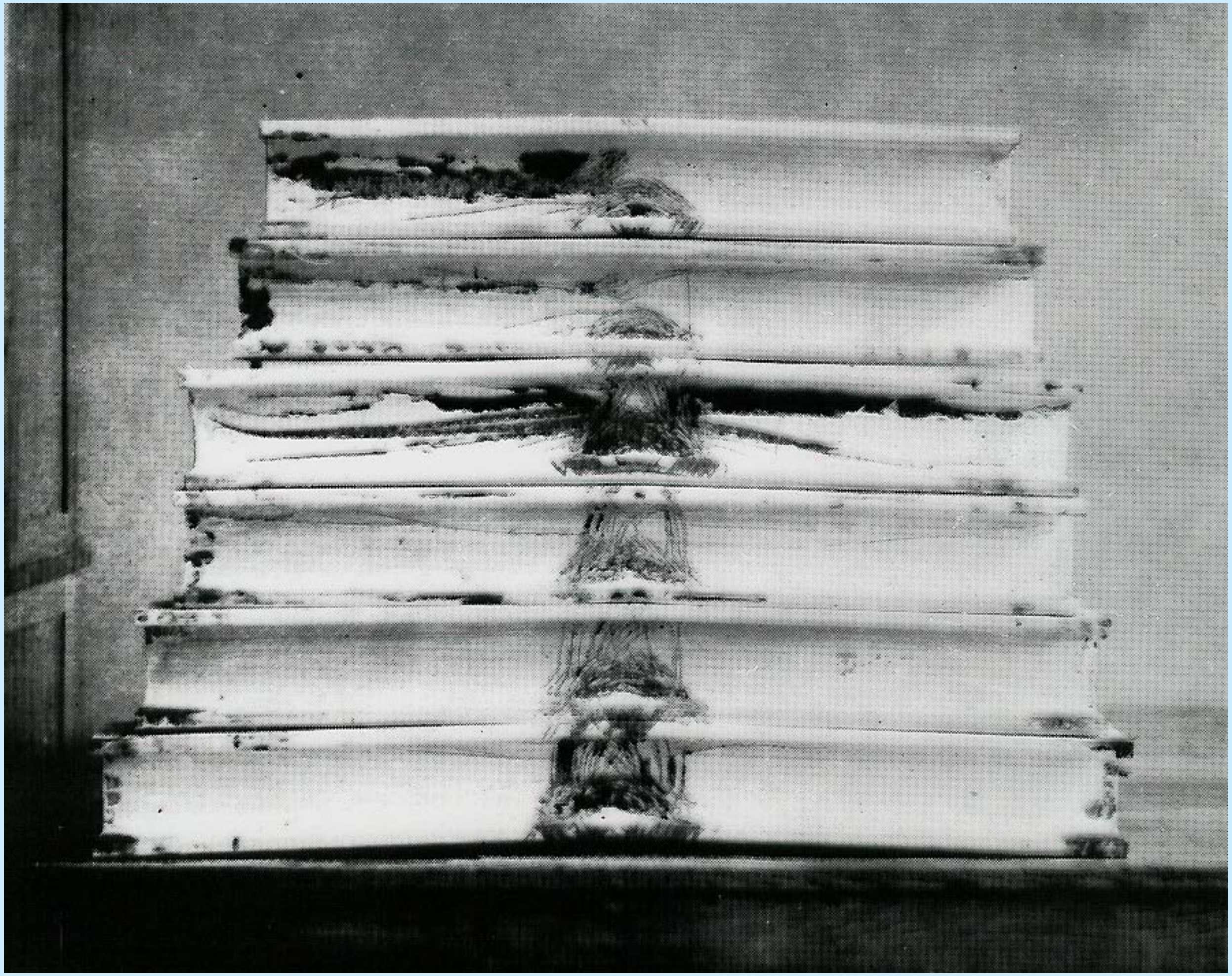


Fig. 15.14 Poutre simple sous force concentrée ; plastification et déformation pour la loi moment-courbure modélisée par deux droites.

Notion de rotule plastique



Flexion plastique plane

Mots-clés à retenir impérativement

- la résistance limite plastique en flexion vaut : $\boldsymbol{M_{pl} = Z\, \sigma_e}$
- ce M_{pl} dépend de la **propriété du matériau** et de la **forme de la section**
- la plasticité permet un **gain de résistance** d'environ **15%** (au-delà de la limite élastique pour des profils standards)
- une **rotule plastique** se forme à l'endroit où se produit le moment maximal
- dans ce cas, à une rotule (articulation) s'oppose un M_{pl}