



# Notice des Travaux Pratiques de Physique Nucléaire

## Notice générale

**Dr Silvia Tentindo Ansermet**  
Laboratoire de Physique des Hautes Energies

septembre 2008



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Rappels sur les réactions nucléaires</b>	<b>1</b>
1.1	Les réactions nucléaires . . . . .	1
1.2	Les rayonnements nucléaires . . . . .	2
1.3	Les émissions ne provenant pas du noyau . . . . .	2
1.4	Les schémas de désintégration . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Les détecteurs de particules</b>	<b>5</b>
2.1	Introduction . . . . .	5
2.2	Chambre d'ionisation . . . . .	6
2.3	Compteur proportionnel . . . . .	7
2.3.1	Fonctionnement . . . . .	7
2.4	Geiger-Müller . . . . .	9
2.5	Détecteur à scintillations . . . . .	11
2.5.1	Le scintillateur . . . . .	12
2.5.2	Le photomultiplicateur (PM) . . . . .	15
2.6	Détecteur à semiconducteur (semicteur) . . . . .	21
2.6.1	Propriétés générales . . . . .	21
2.6.2	Principe du semicteur . . . . .	22
2.6.3	Semicteurs . . . . .	24
2.6.4	Utilisation des détecteurs à semiconducteurs . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Renseignements généraux sur les dispositifs d'analyse et d'en-</b>	
	<b>registrement des impulsions.</b>	<b>29</b>
3.1	Impulsions . . . . .	29
3.2	Systèmes modulaires . . . . .	30
3.3	Amplificateur linéaire d'impulsions . . . . .	32
3.4	Discriminateur d'amplitude . . . . .	32
3.4.1	Utilisation du discriminateur . . . . .	33

3.5	Sélecteur d'amplitude à une bande . . . . .	34
3.6	Analyseur multicanal . . . . .	35
3.7	Compteur d'impulsions . . . . .	36
3.8	Haute tension continue stabilisée (HT) . . . . .	36
3.9	Temps de résolution . . . . .	37
3.9.1	Temps de résolution d'appareils électroniques . . . . .	37
3.9.2	Temps de résolution d'un ensemble d'appareils électro- niques . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Application des notions de statistique à la physique nucléaire</b>	<b>39</b>
4.1	Introduction . . . . .	39
4.2	Lois de distribution . . . . .	40
4.2.1	Définitions . . . . .	40
4.2.2	Loi binômiale . . . . .	41
4.2.3	Loi de Poisson . . . . .	42
4.2.4	Loi de Gauss . . . . .	43
4.2.5	Intervalles de confiance . . . . .	44
4.3	Fonctions de variables aléatoires . . . . .	45
4.3.1	Propagation des erreurs . . . . .	45
4.3.2	Loi de distribution de $\chi^2$ . . . . .	47
4.3.3	Distribution de $\chi^2$ . . . . .	47
4.3.4	Théorème central limite . . . . .	52
4.3.5	Exemple d'une loi de distribution : la loi de Poisson . . . . .	52
4.4	Ajustement de paramètres . . . . .	54
4.4.1	Méthode du maximum de vraisemblance . . . . .	54
4.4.2	Définition de l'erreur statisque . . . . .	55
4.4.3	Application à un phénomène poissonnien . . . . .	56
4.4.4	Problème : mesure d'une source radioactive en présence d'un bruit de fond . . . . .	58
4.4.5	Méthode des moindres carrés . . . . .	58
4.4.6	Un exemple d'estimation paramétrique : détermination des paramètres d'une droite (droite de régression) . . . . .	60
4.5	Test d'hypothèse . . . . .	62
<b>5</b>	<b>Les sources radioactives utilisées au laboratoire</b>	<b>65</b>
5.1	Avertissement . . . . .	65
5.2	Dose absorbée admise pour un être humain . . . . .	66
5.3	Schéma de désintégration . . . . .	66

5.4	Isotopes généralement utilisés comme source de $\gamma$ . . . . .	69
5.5	Isotope utilisé comme source de $\beta^-$ . . . . .	74
5.6	Isotopes utilisés comme sources de particules $\alpha$ . . . . .	75
5.7	Energie de liaison des $e^-$ atomiques . . . . .	78
<b>A</b>	<b>Tabulation de quelques fonctions utilisées en statistique</b>	<b>81</b>
A.1	Loi de Gauss . . . . .	82
A.2	Loi de distribution du $\chi^2$ . . . . .	84
<b>B</b>	<b>Mesure de la durée de vie d'états nucléaires excités</b>	<b>87</b>
<b>C</b>	<b>Notions de radioprotection</b>	<b>91</b>
C.1	Généralités . . . . .	91
C.2	Effets biologiques des rayonnements	
	Unités dosimétriques . . . . .	92
C.3	Les instruments de mesure de dose . . . . .	98
<b>D</b>	<b>Tables</b>	<b>101</b>



# Chapitre 1

## Rappels sur les réactions nucléaires

### 1.1 Les réactions nucléaires

Les processus nucléaires pouvant produire un rayonnement observable sont de plusieurs types :

- Les réactions provoquant un changement de la nature des noyaux ;
- Les réactions permettant simplement aux atomes d'évacuer de l'énergie excédentaire.

Les premiers impliquent une interaction dite du type faible, convertissant par exemple un proton de l'atome en un neutron, un positron et un antineutrino, et aussi une interaction dite du type fort qui, entre autre assure la cohésion du noyau. Une variante de l'interaction faible peut "attraper" un électron des couches profondes de l'atome, pour transformer un proton en neutron : c'est la capture électronique.

Ces genres de réaction produisent, en plus d'une émission principale liée au phénomène, une émission secondaire de photons destinée à stabiliser le nouveau noyau obtenu. Ce sont ces deuxièmes réactions qui nous intéressent plus particulièrement, car ce sont elles qui seront faciles à détecter avec le matériel du laboratoire.

## 1.2 Les rayonnements nucléaires

Les rayonnements issus du noyau qui peuvent se produire spontanément dans la nature, se présentent sous trois formes :

- $\alpha$ , noyaux d'hélium,
- $\beta$ , électrons ou positrons,
- $\gamma$ , photons énergétiques.

Les rayonnements  $\alpha$  sont constitués de noyaux d'hélium ( ${}^4_2\text{He}$ ), éjectés par la force forte que l'on peut représenter par l'échange d'un méson  $\pi$  entre deux nucléons. Les bosons médiateurs responsables de la désintégration  $\beta$  sont les mésons  $W^+$ ,  $W^-$  et  $Z^0$ , porteurs de la force faible.

Le dernier type de rayonnement, le rayonnement  $\gamma$ , provient du réarrangement de la structure des couches nucléaires. A l'instar des électrons, les nucléons peuvent changer d'orbite, pour pouvoir diminuer l'énergie globale du noyau. Ce changement de niveau d'énergie s'accompagne de l'émission d'un photon. C'est ce processus qui intervient souvent après les émissions  $\alpha$  ou  $\beta$ .

## 1.3 Les émissions ne provenant pas du noyau

En plus des différents rayonnements susmentionnés, les atomes ont un autre moyen de retourner vers un état plus stable. Les électrons sur les différentes couches atomiques peuvent changer d'orbites et ainsi, absorber ou émettre des photons. L'énergie de ces photons vaut la différence d'énergie des couches entre lesquelles les électrons ont transités. Il se peut également que des électrons eux-mêmes soient éjectés, emportant une partie de l'énergie sous forme d'énergie cinétique.

Ces émissions ne peuvent pas être séparées du rayonnement nucléaire proprement dit sans autres informations. On peut cependant les reconnaître grâce à leur faible énergie, et au fait qu'elles correspondent exactement à la différence d'énergie de deux niveaux électroniques de l'atome.

## 1.4 Les schémas de désintégration

Voici une illustration de ce qui précède ; une description d'une désintégration spontanée d'un atome entraînant diverses émissions.



La désintégration du cobalt 57 consiste en une capture électronique transformant le cobalt en fer. Sur le schéma, la flèche représentant la capture est dirigée de la droite vers la gauche, indiquant que le noyau a perdu une charge.

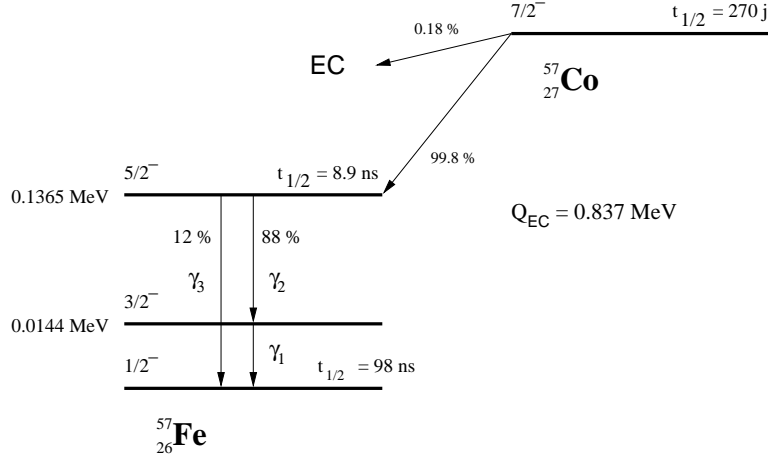


FIG. 1.1 – Schéma de désintégration du  $^{57}\text{Co}$

$$\text{EC} : \text{EC}(L)/\text{EC}(K) = 0.10 \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \gamma : \gamma_1 : 0.0144 \text{ MeV}, (\gamma 8.4\%), e/\gamma = 9.0, K/L_I/L_{II+III} : 110/10/0.9 \\ \gamma_2 : 0.1219 \text{ MeV}, (\gamma 86\%), e_K/\gamma = 0.0245 \\ \gamma_3 : 0.1363 \text{ MeV}, (\gamma 11\%), e_K/\gamma = 0.151 \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$K_\alpha : E_{K_\alpha}(\text{Fe}) = 6.40 \text{ keV} \quad (1.3)$$

Ensuite, pour atteindre un état stable, le noyau émet soit un seul photon dans 12% des cas ( $\gamma_1$ ), soit deux photons successifs dans 88% des cas ( $\gamma_2$  et  $\gamma_3$ ). Les énergies des photons sont reliées par l'équation :

$$E_{\gamma_1} = E_{\gamma_2} + E_{\gamma_3}$$

Les photons sont représentés par des flèches verticales car la charge du noyau ( $^{57}\text{Fe}$ ) ne change pas. Il faut préciser que ces deux canaux de stabilisation de 12% et 88% ne produisent pas uniquement des photons; un phénomène appelé *conversion interne* peut transformer l'émission d'un photon en éjection d'un électron d'énergie équivalente

Le tableau en dessous du schéma détaille les différentes voies de désintégration. La première ligne (1.1) indique les rapports de capture électronique entre les deux couches principales où elle peut se produire. On voit que la capture électronique sur la couche  $K$  est dix fois plus probable que celle sur la couche  $L$ . Une des conséquences de la capture électronique est décrite à la dernière ligne (1.3) : la structure des électrons autour de l'atome va se réarranger pour combler le vide laissé par l'électron absorbé par le noyau. Des électrons vont “descendre” des couches supérieures en émettant des photons  $K_\alpha$ . Le spectre de ce rayonnement  $K_\alpha$  est le même que celui obtenu par un effet photoélectrique sur un atome.

Pour le rayonnement  $\gamma$  (1.2), trois informations sont données :

- l'énergie du photon,
- le pourcentage de photons observés (non-convertis) par rapport au taux de désintégrations du *noyau père*,
- le rapport d'émission entre électrons et photons non-convertis pour ce canal.

Pour  $\gamma_1$ , le rapport d'émissions entre les différentes couches a été ajouté.

On peut grâce à ces informations retrouver les taux d'embranchement de 12% et 88%. Il faut pour cela additionner les contributions des électrons et des photons. Prenons par exemple  $\gamma_3$ . On a une contribution de 11% des photons *non-convertis* et une contribution des électrons.

$$12\% = 11\% + 0.151 \cdot 11\%$$

# Chapitre 2

## Les détecteurs de particules

### 2.1 Introduction

On distingue en physique nucléaire deux types de détecteurs :

- les détecteurs à traces, qui permettent de visualiser la trajectoire suivie par une particule nucléaire (chambres à bulles, chambres à étincelles, chambres à dards, émulsions, ...), et
- les détecteurs électroniques, dans lesquels le passage d'une particule dans un certain volume sensible se traduit par une impulsion électrique.

Tous ces détecteurs ne sont directement sensibles qu'aux particules chargées. Une particule neutre est détectée par l'intermédiaire d'une ou de plusieurs particules chargées qu'elle produit lors d'une interaction avec le milieu détecteur ou avec un "radiateur". Deux exemples :

- Détection des  $\gamma$   
Un  $\gamma$  est détecté soit par l'intermédiaire d'un électron émis lors d'un effet photoélectrique ou Compton, soit par l'intermédiaire des particules  $e^+$ ,  $e^-$  créées lors d'une production de paire.
- Détection des neutrons  
Pour détecter les neutrons, on utilise les réactions nucléaires qu'ils induisent et dans lesquels sont produites des particules chargées. Par exemple, la réaction  $^{10}\text{B}(n, \alpha)^7\text{Li}$  permet de détecter les neutrons lents par l'intermédiaire de la particule  $\alpha$  et du noyau de recul  $^7\text{Li}$ , la réaction  $p(n, n)p^+$  permet de détecter les neutrons rapides par l'intermédiaire du proton de recul.

Examinons le fonctionnement des principaux détecteurs électroniques :

1. Chambre d'ionisation
2. Compteur proportionnel
3. Geiger-Müller
4. Détecteur à scintillations
5. Détecteur semiconducteur.

## 2.2 Chambre d'ionisation

La chambre d'ionisation est essentiellement constituée de deux électrodes, en général planes et parallèles. Ces électrodes sont placées dans une enceinte remplie par un gaz. Lorsqu'une particule chargée rapide traverse le gaz, elle ionise directement un certain nombre de molécules ou d'atomes en cédant à des électrons une énergie supérieure à leur énergie de liaison (**ionisation primaire**) ; ces électrons peuvent avoir une énergie suffisante pour ioniser à leur tour d'autres molécules ou atomes, et ainsi de suite (**ionisation secondaire**). La trajectoire de la particule incidente est ainsi jalonnée de paires d'ions (**électrons négatifs et ions lourds positifs**). L'énergie moyenne  $w$  nécessaire à la création d'une paire d'ions est de l'ordre de 30 eV ; cette énergie ne dépend pratiquement ni de la nature de la particule incidente, ni de son énergie, mais quelque peu de la nature du gaz. Pour faire fonctionner une chambre d'ionisation, il faut appliquer une différence de potentiel entre les électrodes. Cette tension crée un champ électrique sous l'influence duquel les ions se séparent. Les électrons migrent vers l'anode, les ions positifs avec une vitesse beaucoup plus faible vers la cathode. Si la tension appliquée est suffisante, le phénomène de recombinaison devient négligeable, le mouvement des ions et des électrons induit un courant électrique  $i$  dans le circuit extérieur, dont l'intégrale entre l'instant de passage de la particule et l'instant de collection des derniers porteurs de charge est égale à la charge  $Q$  correspondant à l'ionisation du gaz :

$$Q = \int_0^{t_{coll}} i(t) dt = C V_{s,max} \quad (2.1)$$

Le circuit de charge est en général constitué par la capacité parasite  $C$  et par une grande résistance de charge  $R$ . L'amplitude maximum de l'impulsion de sortie sera :

$$V_{s,max} = \frac{Q}{C} = \frac{E}{w} \frac{e}{C} \quad (2.2)$$

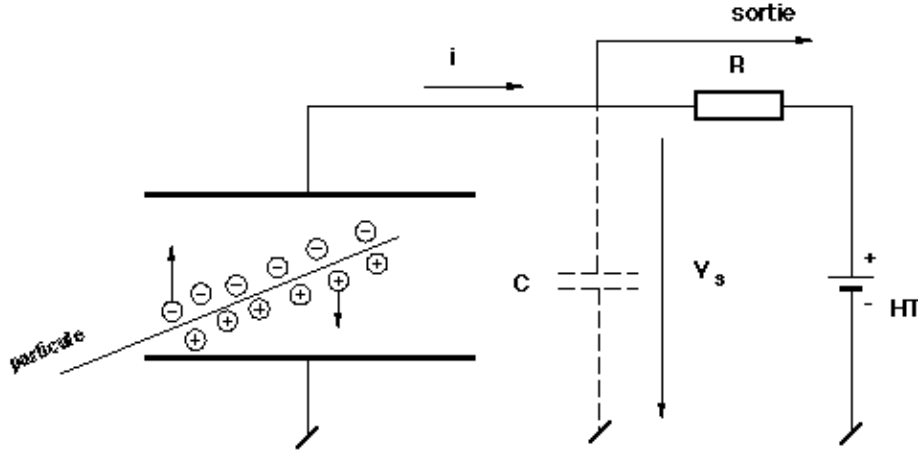


FIG. 2.1 – Chambre d'ionisation

$E$  : énergie perdue par la particule incidente dans la chambre,  
 $e$  : charge de l'électron.

Il ressort de cette relation que la tension de sortie  $V_s$  est proportionnelle à l'énergie  $E$  perdue par la particule. Ce détecteur peut donc être utilisé pour la mesure de l'énergie individuelle de particules chargées. On peut aussi l'utiliser en dosimétrie par la mesure du courant moyen dû à l'ionisation du gaz de la chambre (dose instantanée) ou par la mesure de la décharge de la capacité pendant un certain intervalle de temps (dose intégrée).

## 2.3 Compteur proportionnel

Dans ce détecteur, les électrodes sont cylindriques et concentriques. L'anode est constituée par un fil de faible diamètre  $a$ . Dans une telle géométrie, le champ électrique  $E$  croît rapidement lorsque l'on s'approche de l'anode :

$$E = \frac{V}{r \ln \frac{b}{a}} \text{ (voir 2.2)} \quad (2.3)$$

### 2.3.1 Fonctionnement

Dans leur mouvement de migration vers l'anode, les électrons subissent des chocs avec les molécules gazeuses, au cours desquels ils perdent une par-

tie de leur énergie cinétique. Si la différence de potentiel  $V$  est grande, le champ au voisinage immédiat de l'anode est suffisant pour qu'entre deux chocs successifs, l'électron acquiert l'énergie nécessaire pour ioniser une molécule gazeuse. L'électron produit dans cette ionisation et l'électron incident, accélérés par le champ, ionisent à leur tour une molécule chacun et ainsi de suite jusqu'à l'anode. On a ainsi, déclenchée par chaque électron de l'ionisation primaire, une avalanche par ionisation gazeuse.

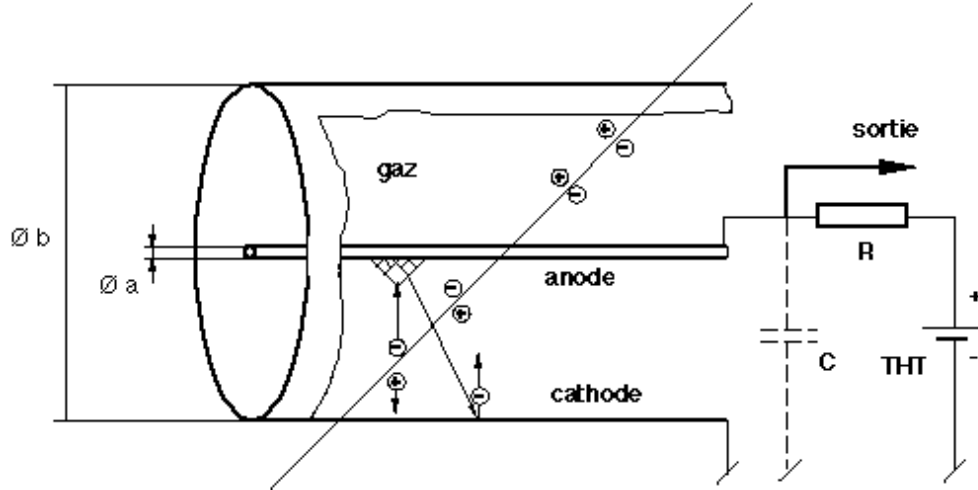


FIG. 2.2 – Compteur proportionnel

Dans une telle avalanche, certaines des collisions inélastiques produisent un état d'excitation atomique ; ces atomes se dés excitent par émission de photons qui peuvent produire des électrons par effet photoélectrique dans le gaz ou sur la cathode. Ces électrons migrent vers l'anode en donnant naissance à de nouvelles avalanches. Appelons  $\varepsilon$  la probabilité de production d'une telle avalanche secondaire et  $n$  le nombre d'électrons issus d'une avalanche. Après qu'un des électrons primaires ait créé une avalanche, le nombre d'électrons à la fin du processus sera, en moyenne :

$$n' = \text{Prob. que } e^- \text{ ne produise pas d'avalanche} \times \text{Nbre d}'e^- \text{ fin procesus} \\ + \text{Prob. que } e^- \text{ produise avalanche} \times \text{Nbre d}'e^- \text{ fin procesus}$$

$$n' = (1 - \varepsilon) \cdot 1 + \varepsilon \cdot (1 + n) = 1 + n\varepsilon \quad (2.4)$$

Pour  $n$  électrons initiaux, on aura, en moyenne, après une avalanche :

$$M_1 = n n' = n(1 + n\varepsilon) \quad (2.5)$$

après une deuxième avalanche :

$$M_2 = n(1 + n\varepsilon n') = n(1 + n\varepsilon(1 + n\varepsilon)) = n(1 + n\varepsilon + n^2\varepsilon^2) \quad (2.6)$$

et après une troisième avalanche :

$$M_3 = n(1 + n\varepsilon(1 + n\varepsilon n')) = n(1 + n\varepsilon + n^2\varepsilon^2 + n^3\varepsilon^3) \quad (2.7)$$

...

Le coefficient d'amplification est donc :

$$M = n + n^2\varepsilon + n^3\varepsilon^2 + \dots = \frac{n}{1 - n\varepsilon} \quad \text{si } n\varepsilon \ll 1 \quad (2.8)$$

C'est au cours de leur migration vers la cathode que les ions positifs induisent sur l'anode une impulsion. Sa forme, qui peut être calculée, dépend de la vitesse de migration des ions positifs et du circuit  $RC$  de charge. Son amplitude maximum sera de  $V = M \cdot \frac{Q}{C}$  avec  $Q$  : charge créée par l'ionisation de la particule incidente, ceci pour autant que la constante de temps  $RC$  soit bien supérieure à la durée de migration des ions positifs. Le compteur proportionnel s'utilise essentiellement dans des mesures de spectrométrie. L'amplitude de l'impulsion récoltée est proportionnelle à l'énergie perdue par la particule dans le gaz du détecteur.

## 2.4 Geiger-Müller

La géométrie de ce détecteur est semblable à celle du compteur proportionnel. Le champ électrique près de l'anode est plus élevé. Le processus "ionisation  $\rightarrow e^- \rightarrow$  avalanche  $\rightarrow$  photons ultraviolets  $\rightarrow$  effet photoélectrique dans le gaz ou sur la cathode  $\rightarrow e^- \rightarrow$  avalanche, ..." est cumulatif ( $n\varepsilon > 1$ ). La décharge se propage sur toute la longueur du fil d'anode et ne s'interrompt que lorsque la charge d'espace formée par les ions positifs autour de l'anode a suffisamment affaibli le champ électrique pour qu'une nouvelle avalanche soit impossible.

L'amplitude de l'impulsion d'anode, proportionnelle au nombre de paires d'ions produits dans la décharge, est **indépendante de l'ionisation** créée

par le passage de la particule, mais augmente avec la différence de potentiel appliquée entre les électrodes. Son temps de montée est de l'ordre de 1 à 5  $\mu\text{s}$ , son temps de descente de 5 à 100  $\mu\text{s}$ .

Après une décharge, la présence de la charge d'espace autour de l'anode rend le compteur absolument insensible à toute nouvelle particule ionisante. La durée de cette insensibilité est le temps mort (100 – 500  $\mu\text{s}$ ).

Avant que les ions positifs n'atteignent la cathode, le champ électrique autour

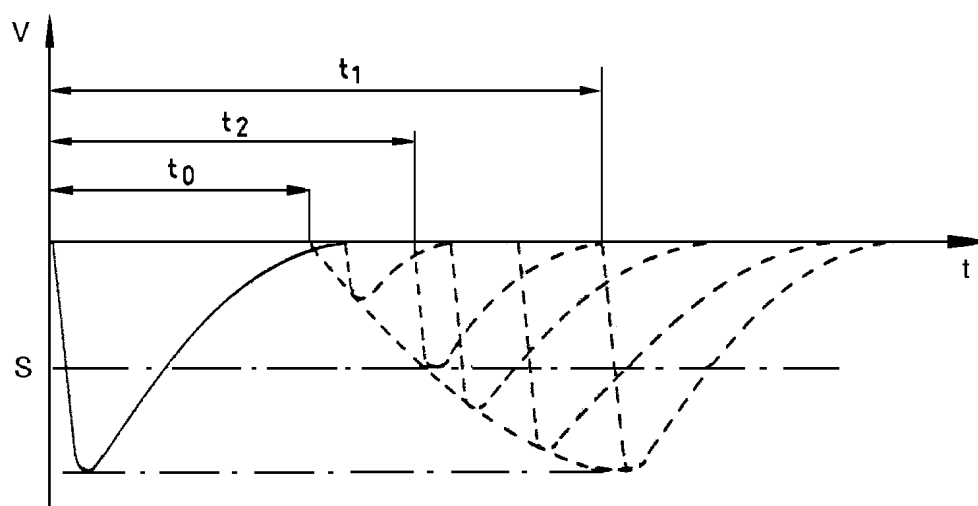


FIG. 2.3 – Impulsions à la sortie d'un GM

$t_o$  : temps mort

$t_1$  : temps de recouvrement

$t_2$  : temps de résolution

S : seuil de discrimination du dispositif électronique

de l'anode s'est suffisamment rétabli pour qu'un événement ionisant provoque à nouveau une décharge d'importance réduite, créant une impulsion de plus faible amplitude. Ce n'est que lorsque les ions sont collectés à la cathode que le champ électrique recouvre sa valeur initiale rendant possible une décharge qui engendre une impulsion d'amplitude normale. Cet intervalle de temps, supérieur au temps mort, est appelé **temps de recouvrement**.

Lors de la neutralisation des ions positifs à la cathode, l'émission de photons ultraviolets pourrait déclencher dans le compteur une nouvelle décharge.



Un moyen communément utilisé pour éviter de tels déclenchements parasites consiste à mélanger au gaz du compteur (généralement de l'argon) une petite quantité de vapeur d'halogène. Les ions  $A^+$  transfèrent alors durant leur migration leur charge à des molécules d'halogène qui se dissocient lors de leur neutralisation sur la cathode. Les photons infrarouges alors émis sont incapables d'arracher des photoélectrons de la cathode.

En résumé, un détecteur à gaz à géométrie cylindrique coaxiale peut fonctionner en chambre d'ionisation, compteur proportionnel ou Geiger-Müller selon la tension appliquée.

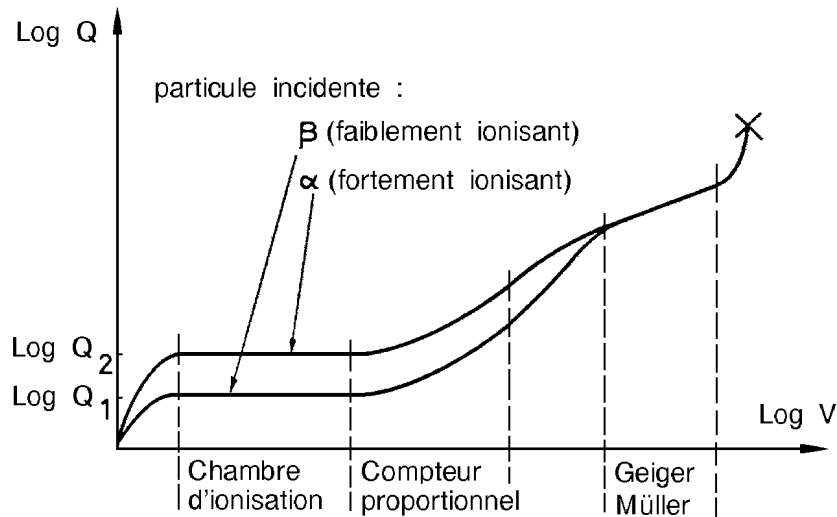


FIG. 2.4 – Différents domaines d'utilisation d'un détecteur à gaz

## 2.5 Détecteur à scintillations

Un détecteur à scintillations est constitué essentiellement de deux éléments distincts. D'une part (Fig.2.5) le **scintillateur**, bloc de matière luminescente qui, lorsqu'il est traversé par une **particule chargée**, émet une impulsion de lumière (scintillation); d'autre part le **photomultiplicateur**,

cellule photoélectrique de très grande sensibilité couplée à un multiplicateur d'électrons. L'ensemble est monté dans une enceinte étanche à la lumière ambiante. Lorsque la source radioactive est à l'extérieur, une "fenêtre" étanche à la lumière mais transparente au rayonnement nucléaire à détecter doit être interposée entre la source et le scintillateur.

### 2.5.1 Le scintillateur

Sans entrer dans les détails du mécanisme de la luminescence, rappelons-en les principales caractéristiques. Toute particule chargée traversant la matière y perd de l'énergie par collisions inélastiques avec les atomes ou molécules du milieu. Lorsque l'énergie acquise par l'électron dans une de ces collisions est supérieure à son énergie de liaison, il y a **ionisation** ; si elle lui est inférieure, il y a **excitation** de l'atome dont fait partie l'électron. Le retour de l'électron à son état fondamental peut dans ce cas s'effectuer soit directement, soit par l'intermédiaire d'un niveau métastable, en donnant lieu à l'émission d'un photon de scintillation dont la fréquence est proportionnelle à l'énergie du niveau d'excitation.

Trois grandeurs sont caractéristiques d'un scintillateur :

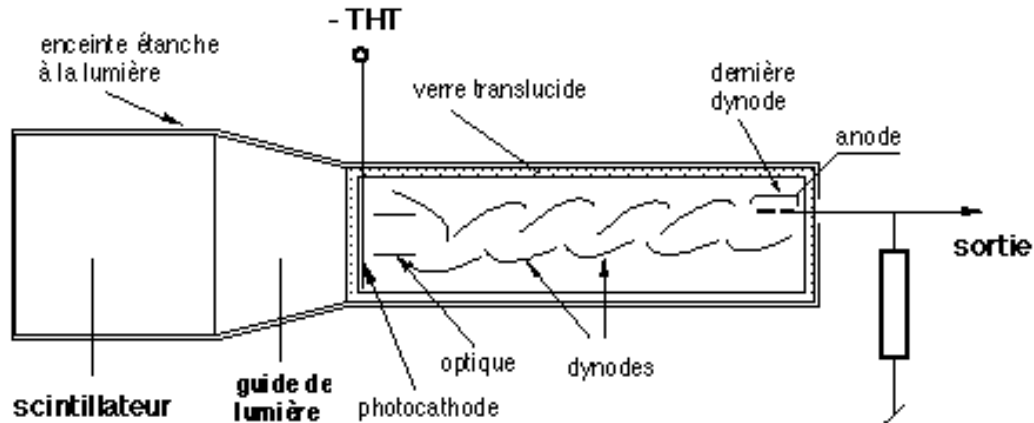


FIG. 2.5 – Détecteur à scintillations

1. Le rendement de scintillation  $\eta$  : exprime la fraction de l'énergie  $E$  perdue par la particule chargée dans le scintillateur, émise sous la forme

d'énergie lumineuse.  $\eta$  est fonction de l'énergie perdue  $E$  et de la particule, dans un scintillateur donné (Fig. 2.6).

2. La longueur d'onde  $\lambda$  de la lumière de scintillation : en général, l'émission lumineuse se fait sous la forme d'un spectre de bandes ; on ne considérera cependant comme seule longueur d'onde que celle de la bande la plus intense qui se trouve, dans la plupart des scintillateurs habituels, située entre 350 et 500 nm.
3. La durée de l'impulsion lumineuse de scintillation  $\tau$  : l'ensemble des photons d'une scintillation ne sont pas émis simultanément et, si l'on néglige le temps, très bref, de passage de la particule dans le scintillateur, on peut admettre que l'émission de lumière suit immédiatement l'excitation par la particule et son intensité décroît de manière quasi exponentielle avec une constante de temps  $\tau$  caractéristique du milieu scintillant.

Si l'origine des temps est choisie à l'instant de passage de la particule chargée, l'intensité lumineuse exprimée en nombre de photons de scintillation émis dans l'intervalle de temps  $(t, t + dt)$  vaudra :

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}} dt \quad \text{pour } t > 0 \quad (2.9)$$

$$N_0 = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{E\eta}{h\nu} \quad (2.10)$$

$\nu$  = fréquence des photons de scintillation ; le nombre total de photons émis dans la scintillation valant ainsi  $N_{ph} = \frac{E\eta}{h\nu}$ . On distingue deux types de scintillateurs :

- Les **scintillateurs inorganiques**, tels que les monocristaux d'halogénure alcalin activé par une impureté, indiquée entre parenthèse (NaI(Tl) ; CsI(Tl) ; LiI(Eu)) et les polycristaux activés (ZnS(Ag)), dans lesquels l'excitation provoquée par la particule chargée fait passer des électrons de la bande de valence à la bande de conduction du cristal. Le retour à la bande de valence s'effectue par l'intermédiaire d'un niveau métastable, créé par les impuretés d'activateur et donnant lieu à l'émission de photons de scintillation pour lesquels le cristal est transparent.
- Les **scintillateurs organiques** (anthracène, stilbène) et les solutions liquides ou solides (plastiques) de composés organiques scintillants, dans lesquels le mécanisme de création des photons de scintillation, plus compliqué que dans le cas précédent, est d'origine moléculaire.

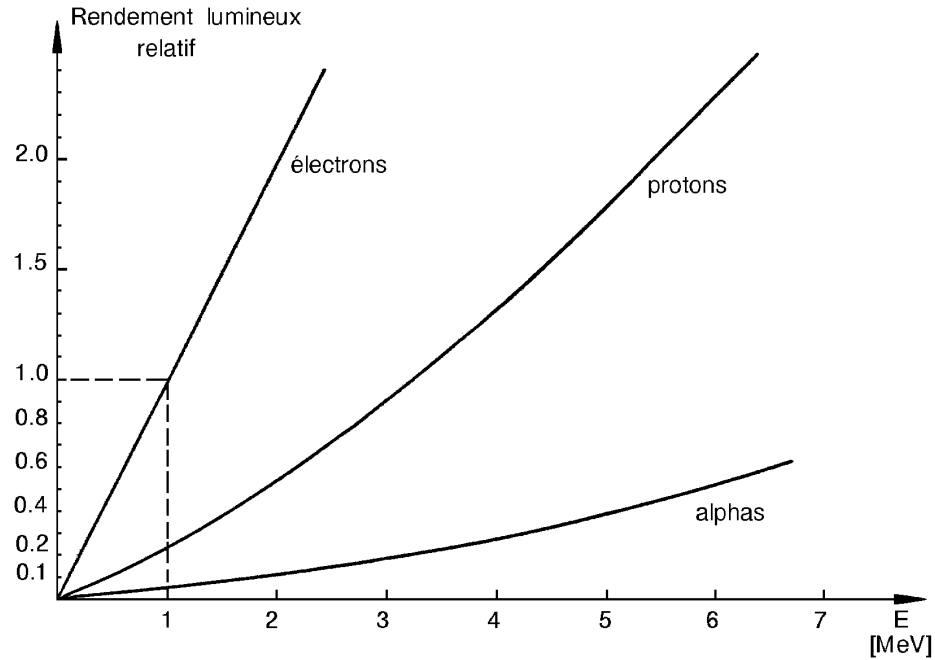


FIG. 2.6 – Rendement relatif de scintillation en fonction de l'énergie perdue dans un scintillateur NE102A par des électrons, protons et alphas. Le rendement absolu pour des électrons est  $\eta=3.7\%$

Le choix d'un scintillateur dépend surtout du type de rayonnement à détecter. Remarquons ici que des particules non chargées peuvent être indirectement détectées par scintillation. La détection se fait ici par l'intermédiaire de particules chargées créées par interaction de la particule neutre dans le scintillateur lui-même. Les photons X ou  $\gamma$  sont ainsi détectés par les électrons qu'ils produisent par effet photoélectrique, Compton ou par création de paires dans le scintillateur qui est, en général, du NaI(Tl). Le parcours de diverses particules chargées en fonction de leur énergie dans le plastique scintillant NE 102A est donné à la planche 2.

Caractéristiques de quelques scintillateurs utilisés au laboratoire

	$\lambda$ [nm] optimum	$h\nu$ [eV]	$\tau$ [s]	$\eta$ (e <sup>-</sup> )	Densité [gr/cm <sup>3</sup> ]	Composition
NaI (Tl)	415	3.0	$0.23 \cdot 10^{-6}$	13%	3.67	(nbr H)/(nbr C) = 1.104
CsI (Tl)	550	2.25	$1.0 \cdot 10^{-6}$	5.8%	4.41	
Plastique scintillant	425	2.9	$2.4 \cdot 10^{-9}$	3.7%	1.032	
NE102A						

### 2.5.2 Le photomultiplicateur (PM)

C'est un tube à vide possédant une face transparente sur laquelle vient s'appliquer le scintillateur (Fig. 2.5). Sur la face interne de cette surface est déposée une **photocathode** constituée de métaux alcalins alliés à un métalloïde.

Par effet photoélectrique, les photons de scintillation éjectent des électrons de cette photocathode. Le **rendement quantique**  $\varepsilon$  de la photocathode est la probabilité qu'un photon de produire un photoélectron et vaut environ 15% pour une photocathode Cs<sub>3</sub>Sb et des photons de 450 nm de longueur d'onde. Ce rendement correspond à 55 mA/W de puissance lumineuse.

La photocathode est en outre le siège d'une émission spontanée d'électrons par effet thermoélectrique ; cette émission est à l'origine de la plus grande partie du bruit de fond du PM. A température ambiante, une cathode Cs<sub>3</sub>Sb émet environ 5000 électrons par seconde et par cm<sup>2</sup> de surface.

Entre la photocathode et le multiplicateur se trouve une optique formée d'un groupe d'électrodes chargées de diriger les photoélectrons vers la première dynode. Le multiplicateur est formé de dynodes (10 à 15 suivant le PM) portées à des potentiels électriques croissants. Lorsqu'un électron frappe une dynode, il en libère plusieurs électrons par **émission secondaire**.

Le coefficient de multiplication, ou coefficient d'émission secondaire,  $d$ , dépend de l'alliage constituant la dynode. Dans des conditions normales d'utilisation, il vaut de 3 à 5, ce qui permet d'obtenir un gain  $G$  du multiplicateur de  $10^5$  à  $10^8$ . Idéalement, le gain  $G$  est relié au coefficient d'émission secondaire par

$$G = d^n$$

ou  $n$  est le nombre de dynodes. Cependant, l'expression précédente ne tient pas compte du facteur de collection des photoélectrons entre la cathode et la première dynode (de l'ordre de 90%), ni du facteur de collection interdynodes ( $\leq 100\%$ ). Pour le PM 6292 utilisé au laboratoire,  $d$  est donné par la relation empirique

$$d = 0.0046V$$

ou  $V$  est la valeur de la THT (Très Haute Tension) appliquée exprimée en volts. Pour le PM 9750 KB, cette relation est

$$d = 0.2 (V_s)^{0.7}$$

ou  $V_s$  est la tension interdynode exprimée en volts.

Caractéristiques de quelques PM utilisés au laboratoire

Type	$\varepsilon$ %	Nbre dyn.	G pour V V	$V_{max}$ V	$I_{max}$ mA	$< I_{max} >$ mA	$\varnothing$ photocath. mm
Dumont 6292	15	10	$2.10^6$ 1750	2100	25	5	38
56AVP	16	14	$10^8$ 2200	2500	300	0.2	42
56DVP	25	14	$10^8$ 2100	2500	300	0.2	42
XP2020	25	12	$10^8$ 2500	2800	280	0.2	44
EMI9750 KB	25	10	$1.3\ 10^6$ 1000	2000	300	0.2	44
PM2202 B	23	10	$2.6\ 10^5$ 1200	1800	200	0.2	44

$I_{max}$  représente le courant de pointe à l'anode du PM au-delà duquel la linéarité entre le courant et l'éclairement de la photocathode n'est plus respectée.  $< I_{max} >$  est le courant moyen maximum de l'anode du PM.

### Utilisation du PM

Si l'on admet que la décroissance de l'émission lumineuse du scintillateur est de nature exponentielle avec une constante  $\tau$  et que le PM est parfait, le courant délivré par l'anode du PM suivra la même loi :

$$i = \frac{q}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{pour } t > 0 \quad (2.11)$$

où  $q$  est la charge totale collectée.

$$q = \frac{E\eta}{h\nu} f \varepsilon G e \quad (2.12)$$

$f$  : fraction des photons de scintillation transmis à la photocathode (facteur de collection lumineuse);  $f$  vaut entre 10 et 60% : pour un scintillateur de NaI(Tl) de 2.54 cm de diamètre,  $f$  vaut 50%;

$G$  : gain du PM

$e$  : charge de l'électron

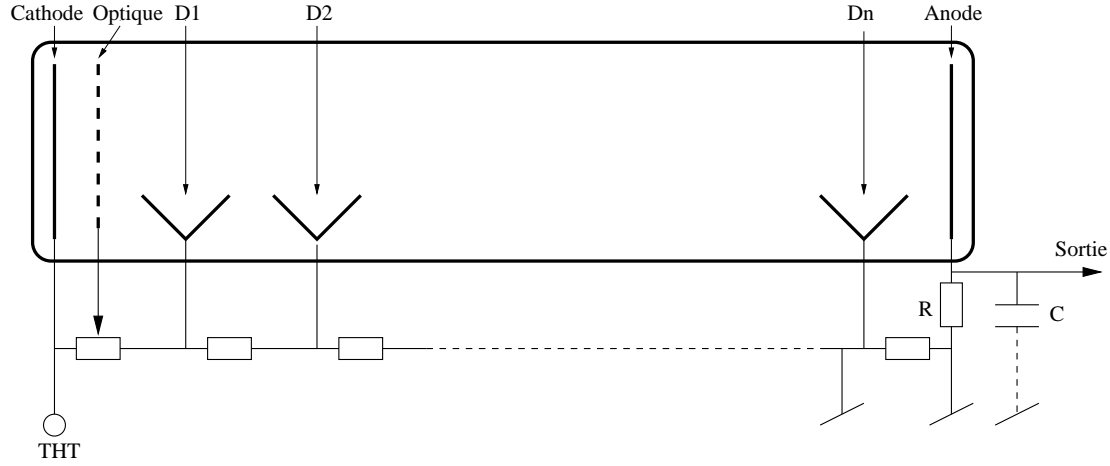


FIG. 2.7 – Alimentation et circuit d'anode d'un PM

Le circuit de charge de l'anode est en général constitué d'une résistance de charge  $R$  et d'une capacité parasite  $C$  de l'ordre de 20 pF. Le courant  $i$ , défini plus haut, développe dans ce dipôle la tension

$$V = \frac{q}{C} \cdot \frac{RC}{\tau - RC} \left( e^{-\frac{t}{\tau}} - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \quad (\text{Fig. 2.8}) \quad (2.13)$$

Si la résistance  $R$  est faible,  $RC \ll \tau$  entraîne

$$V = \frac{qR}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2.14)$$

On parle d'une sortie en courant.

Si la résistance  $R$  est élevée,  $RC \gg \tau$  entraîne

$$V = \frac{q}{C} \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (2.15)$$

On parle alors d'impulsion intégrée.

On définit  $V^\infty = q/C$  : amplitude maximum de l'impulsion pour  $RC = \infty$ .

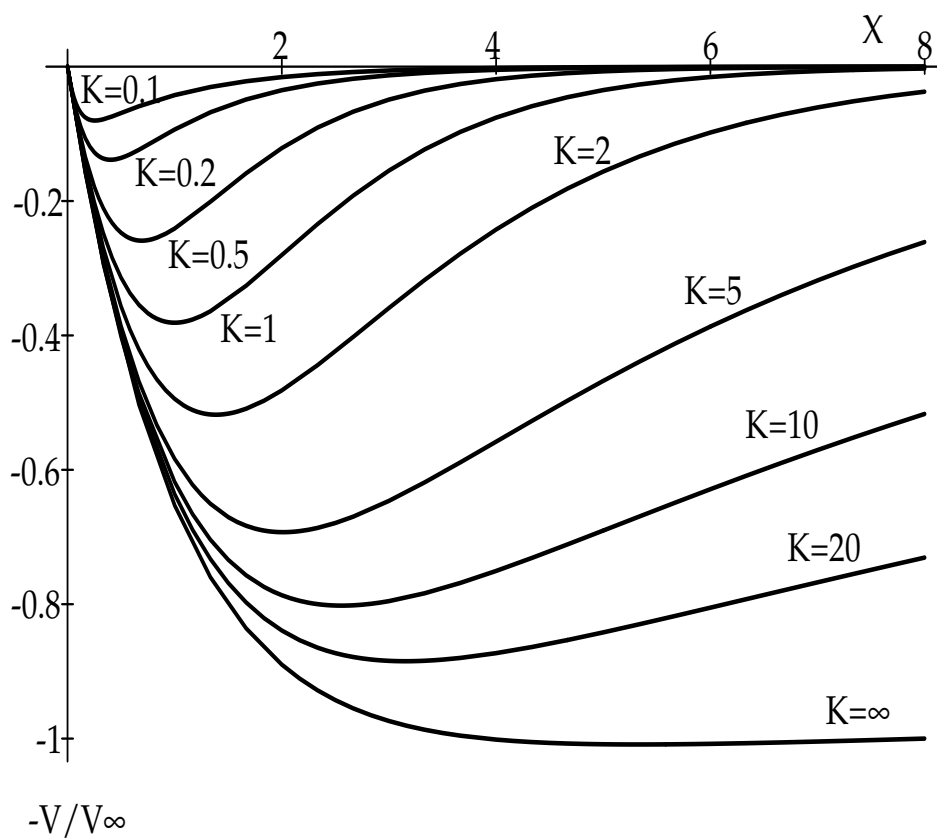


FIG. 2.8 – Forme de l'impulsion de tension sur l'anode du PM

$\tau$  : constante de temps de décroissance du scintillateur

$RC$  : constante de différenciation de l'anode du PM

$$x = \frac{t}{\tau}$$

$$k = \frac{RC}{\tau}$$

$V^\infty$  : amplitude maximale de l'impulsion pour  $RC = \infty$



Remarquons que le gain du multiplicateur est très sensible aux variations de la tension d'alimentation. En effet, le gain d'un étage étant approximativement proportionnel à la différence de potentiel qui lui est appliqué, le gain total dépendra de la tension  $V$  d'alimentation comme :

$$G = K V^n \quad (2.16)$$

Il s'en suit que :

$$\frac{\Delta G}{G} = n \frac{\Delta V}{V} \quad (2.17)$$

Ainsi, pour obtenir une stabilité de gain de 1%, il faut disposer d'une alimentation dont la stabilité est de 0.07% pour un tube de 14 étages.

### Statistique

Si l'on admet que le rendement  $\eta$  du scintillateur est indépendant de l'énergie  $E$  déposée dans celui-ci, le détecteur à scintillations est un détecteur proportionnel :  $q \propto E$ .

Cette proportionnalité du détecteur à scintillations n'est absolument pas rigoureuse; elle ne s'applique qu'aux valeurs moyennes de  $q$  et de  $E$ . En effet, à une même énergie fournie au scintillateur par la particule à détecter ne correspondra pas une charge récoltée sur l'anode strictement constante : cet effet est dû à la nature statistique des phénomènes successifs dont le détecteur à scintillation est le siège du moment où l'énergie a été cédée au scintillateur jusqu'à la collection de l'impulsion sur l'anode.

Ainsi, le spectre différentiel (voir chapitre 3) d'amplitude des impulsions délivrées par un détecteur à scintillations irradié par des particules chargées monoénergétiques s'arrêtant dans le scintillateur ne se présente pas sous la forme d'une raie mais d'un pic que l'on caractérisera par sa résolution  $\Delta V/V$ , c'est-à-dire, par sa largeur à mi-hauteur rapportée à l'amplitude correspondant au maximum du pic.

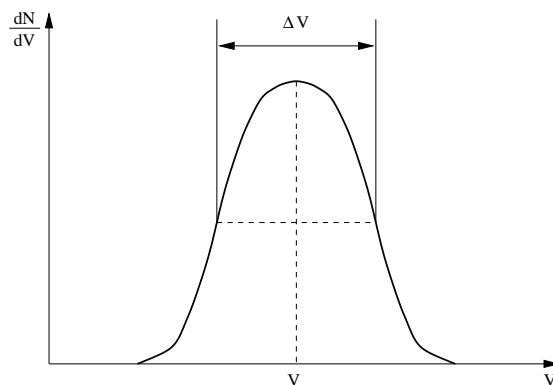


FIG. 2.9 – Élargissement d'une raie spectrale

Les phénomènes successifs d'émission de photons de scintillation, de collection de ces photons sur la photocathode et d'émission de photoélectrons par celle-ci étant poissonniens, le nombre de photoélectrons émis pour une énergie définie  $E$  déposée dans le scintillateur est une variable aléatoire pois-

sonnienne dont la valeur moyenne est

$$\frac{E\eta}{h\nu} f \varepsilon \quad (2.18)$$

et l'écart standard relatif

$$\left( \frac{\eta f \varepsilon}{h\nu} \right)^{-\frac{1}{2}} E^{-\frac{1}{2}} \quad (2.19)$$

Le phénomène de multiplication est aussi de nature statistique ; cependant, le gain du multiplicateur n'étant pas une variable aléatoire poissonnienne, l'estimation de l'écart standard relatif de l'amplitude  $V$  des impulsions n'est pas immédiate. Le calcul montre que si les coefficients d'émission secondaires  $d$  des dynodes sont les mêmes, l'écart standard relatif peut être estimé par la relation :

$$\frac{\sigma_V}{V} = \left( \frac{d}{d-1} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\eta f \varepsilon}{h\nu} \right)^{-\frac{1}{2}} E^{-\frac{1}{2}} \quad (2.20)$$

Si l'on admet que la forme du pic résultant de l'irradiation par des particules cédant toutes la même énergie  $E$  au scintillateur est assimilable à une courbe de Gauss, ce qui est justifiable si le nombre de photoélectrons émis par la photocathode est grand, la résolution vaudra :

$$R = 2 \sqrt{2 \ln 2} \frac{\sigma_V}{V} = 2.35 \left( \frac{d}{d-1} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\eta f \varepsilon}{h\nu} \right)^{-\frac{1}{2}} E^{-\frac{1}{2}} \quad (2.21)$$

## 2.6 Détecteur à semiconducteur (semicteur)

### 2.6.1 Propriétés générales

En passant à travers un semiconducteur, une particule chargée perd une énergie  $\Delta E$  ; une partie de cette énergie est consacrée à la formation de  $N$  paires électron-trou, à savoir de paires de porteurs de charges libres, négatives dans le cas des électrons, positives dans le cas des trous. Comme dans le cas des gaz, on constate que le rapport  $w = \Delta E/N$  ne dépend en première approximation que de la nature du semiconducteur et est à peu près indépendant de la nature de la particule incidente ainsi que de son énergie, pour autant que les pertes radiatives restent négligeables ;  $w$  est l'énergie moyenne perdue par la particule chargée incidente par paire électron-trou créée :

	Gaz 300 K	Silicium 300 K	Germanium 77 K
$w$ [eV]	env. 30	3.62	2.95
$F$	env. 0.8	env. 0.1 pour les électrons	

Si l'on réussit à mettre en mouvement et à collecter les  $2N$  porteurs de charge (électrons et trous) en appliquant un champ électrique au semiconducteur, d'une manière qui sera précisée ultérieurement, on réalise un détecteur semiconducteur (semicteur) spectrométrique qui est une chambre d'ionisation solide. La variance du nombre de paires est égale à  $N$ , à un facteur  $F$  près (facteur de Fano) parce que les ionisations successives ne sont pas indépendantes puisque la particule doit perdre finalement toute son énergie qui est bien déterminée :  $\sigma_N^2 = F N$

$\sigma_N \cdot W$  est une estimation de la limite ultime de la résolution en énergie que l'on peut obtenir avec un semicteur si toutes les autres sources de fluctuation du signal électrique analysé (en particulier le bruit électronique du préamplificateur) sont négligeables.

Dans un semicteur, le produit  $wF$  est environ dix fois plus petit que dans un détecteur à gaz et il lui correspond une amélioration de la résolution de cet ordre de grandeur. La densité superficielle relativement élevée des semicteurs permet d'arrêter des particules chargées de relativement haute énergie (planche 1) et de mesurer leur énergie avec une bonne précision (spectrométrie de particules chargées issues de réactions ou de désintégrations nucléaires, spectrométrie X ou  $\gamma$ ).

## 2.6.2 Principe du semicteur

Comme dans le cas d'une chambre à ionisation à gaz, les porteurs de charge des deux signes sont séparés et mis en mouvement par un champ électrique. Le mouvement des charges (et non leur collection sur les électrodes) induit un courant  $i$  dans le circuit extérieur dès le passage de la particule au travers du volume sensible du détecteur ; le courant cesse lorsque le dernier électron ou le dernier trou a été collecté sur les électrodes. On montre facilement que :

$$\int_{t \text{ passage de la particule}}^{t \text{ collection des charges}} i(t) \cdot dt = Q = N \cdot \text{charge électronique} = \frac{\Delta E}{w} \cdot e \quad (2.22)$$

$Q$  est donc la mesure de l'énergie perdue par la particule dans le volume sensible du détecteur. Pour créer un champ électrique, on utilise les propriétés d'une jonction P-N polarisée en sens inverse (diode bloquée).

La jonction P-N est, par définition, le contact entre une région de type P et une région de type N d'un même cristal semiconducteur ne présentant pas de discontinuité dans son réseau. Dans la région P, dopée avec des atomes trivalents accepteurs, les porteurs de charges libres sont des trous; dans la région N, dopée avec des atomes pentavalents donneurs, les porteurs libres sont des électrons. Le semiconducteur est alors de type extrinsèque parce que dopé.

- L'excès de trous de la région P par rapport à la région N crée, à travers la jonction, un gradient de concentration de trous. Il donne naissance à un courant de diffusion de trous de la région P vers la région N. Un phénomène analogue se produit pour les électrons qui diffusent de la région N vers la région P. La diffusion, hors de leur zone d'origine, des porteurs majoritaires qui appartenaient, initialement, en propre aux atomes dopeurs de ce cristal, suscite, par conséquent, une ionisation progressive du cristal situé de part et d'autre de la jonction. Il apparaît alors, de part et d'autre de la jonction, deux charges d'espace fixes, de même valeur absolue et de signe opposé (théorème de Gauss) (Fig.2.10) qui constituent un dipôle électrique engendrant un champ électrique intense  $E_i$  dans la zone de transition, champ dirigé de la région N vers la région P qui, par conséquent, s'oppose à la diffusion des électrons et des trous.
- Un état d'équilibre est atteint lorsque la profondeur de la zone de transition et, corrélativement, la valeur de la charge d'espace prennent des valeurs suffisantes pour engendrer un champ électrique interne  $E_i$ , qui soit capable avec la tension de polarisation inverse externe d'opposer à la "pression" de diffusion des électrons et des trous une "pression" électrostatique égale. A ce moment, le transfert des porteurs d'une zone à l'autre de la jonction s'annule; le courant d'électrons est nul ainsi d'ailleurs que le courant de trous. La profondeur de la zone ionisée de la jonction P-N s'étend alors sur une profondeur  $D$  appelée zone de charge d'espace.
- Dans la zone de charge d'espace, encore appelée zone désertée, tous les atomes d'impuretés sont ionisés; la densité de charge d'espace est donc proportionnelle à la densité des atomes dopeurs; de ce fait, la courbe

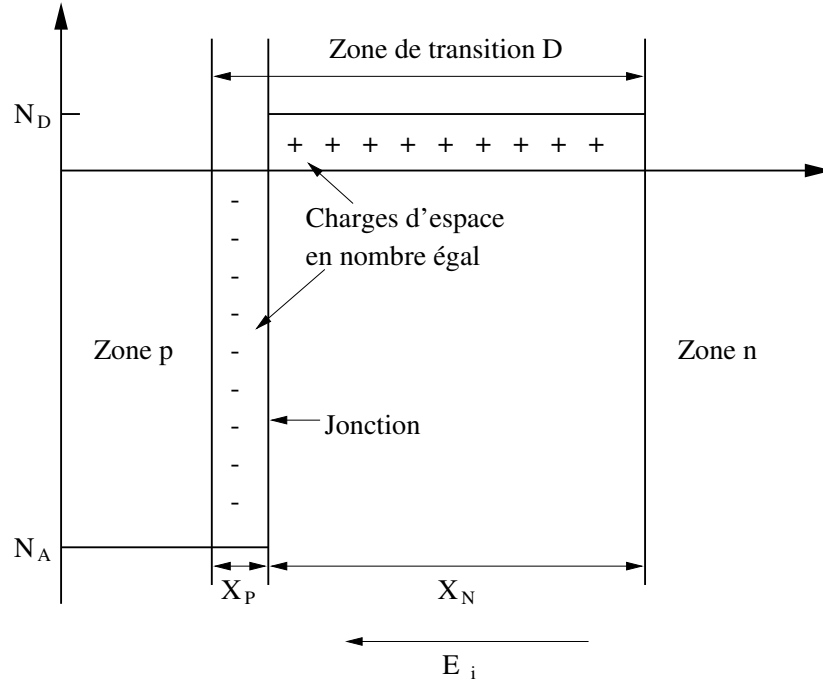


FIG. 2.10 – Jonction abrupte P-N à l'équilibre thermodynamique ( $N_D$ ,  $N_A$  = concentration des atomes dopeurs)

de charge d'espace se confond, dans la zone désertée, avec la courbe de concentration des atomes dopeurs. Notons que cette zone s'étend dans le cristal N sur une profondeur  $x_N$  et dans le cristal P sur une profondeur  $x_P$  et que  $x_N$  et  $x_P$  sont reliés aux concentrations  $N_A$  et  $N_D$  d'atomes dopeurs par la relation :

$$x_N = x_P \frac{N_A}{N_D} \quad (2.23)$$

Il devient ainsi possible, en agissant sur le dopage, de faire varier, à volonté, les profondeurs respectives de charge d'espace.

A l'extérieur de la zone désertée de profondeur  $D = x_N + x_P$ , la charge d'espace et le champ électrique sont nuls.

### 2.6.3 Semicteurs

On peut classer les semicteurs en deux catégories :

1. Les détecteurs à barrière de surface ou à jonction diffusée.
2. Les détecteurs à zone intrinsèque pin (semiconducteur ultrapur ou compensé par entraînement de Lithium).

Les relations entre profils de dopage, charge d'espace, champ électrique et potentiels apparaissent sur la figure 2.11.

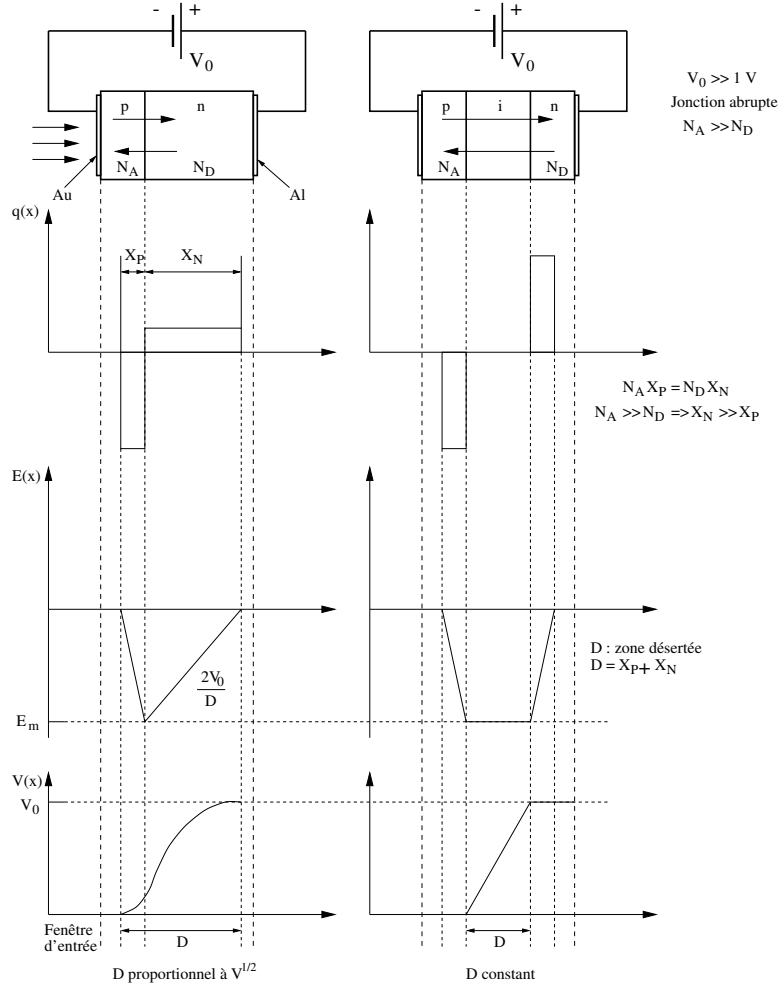


FIG. 2.11 – Zone de peuplement des N et P dans les semicteurs

La capacité par unité de surface de la jonction est  $C = \varepsilon/D$  où  $\varepsilon$  est la constante diélectrique du semiconducteur et  $D$  la profondeur de la zone désertée.

Dans les **détecteurs à barrière de surface**, la jonction PN est très asymétrique : la zone P, située immédiatement sous la fenêtre d'or, est très fortement dopée en accepteurs ; la zone de type N est très faiblement dopée en donneurs. Avec certains de ces détecteurs, on peut augmenter la tension jusqu'à obtenir une épaisseur de couche d'arrêt  $D$  égale à l'épaisseur  $X$  du semiconducteur ; on parle alors de jonction totalement désertée. Ces détecteurs sont sensibles dans l'ensemble de leur volume, à l'exception de la fenêtre d'or (environ  $40 \mu\text{g}/\text{cm}^2$ ) et du contact ohmique arrière (environ  $50 \mu\text{g}/\text{cm}^2$  d'aluminium).

Les relations quantitatives entre  $\rho$  ( $\rho$  est la résistivité du semiconducteur, inversement proportionnelle à la concentration en atomes dopeurs),  $D$ ,  $C$  et  $V_o$  sont donnés par un nomogramme (planche 9).

Dans les **détecteurs pin**, deux zones fortement dopées P et N entourent une zone intrinsèque (on parle d'un semiconducteur intrinsèque quand la conduction y est due aux porteurs de charge engendrés thermiquement). Cette zone intrinsèque peut être soit une zone de semiconducteur de pureté extrême, soit une zone à l'origine faiblement P dans laquelle on a diffusé du Lithium (un donneur) jusqu'à obtenir une parfaite compensation. La technique de compensation au Li permet de produire des détecteurs de gros volume (jusqu'à  $100 \text{ cm}^3$ ) convenant à la spectrométrie  $\gamma$  ou à celle des particules chargées de haute énergie. Ces détecteurs Ge(Li) ou Si(Li) doivent toutefois être conservés à basse température (en dessous de  $-50^\circ \text{C}$ ) pour éviter toute diffusion des ions Li ; le refroidissement a aussi l'avantage de diminuer le courant inverse de la diode qui influe défavorablement sur la résolution du spectromètre.

#### 2.6.4 Utilisation des détecteurs à semiconducteurs

Les faibles signaux récoltés à la sortie des détecteurs à semiconducteurs rendent nécessaires l'emploi de préamplificateurs de haute qualité. Le bruit de fond, en particulier, doit être réduit au minimum, la stabilité de gain doit être bonne.

Le préamplificateur de charge doit être préféré. En effet, pour autant que le gain  $G$  soit élevé, ses variations ainsi que les variations de la capacité  $C_d$  n'ont plus d'influence sur le signal de sortie  $V_S$ . C'est un intégrateur (au sens mathématique du terme) du courant délivré par le détecteur lors du passage de la particule.



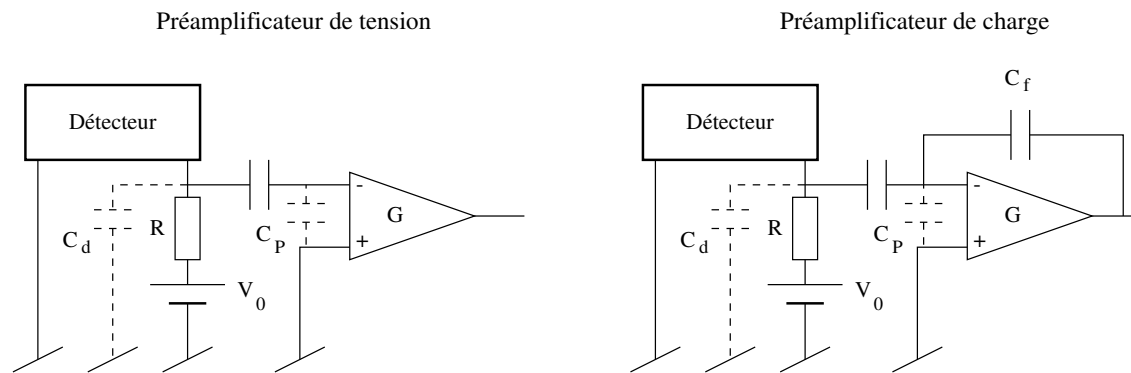


FIG. 2.12 – Comparaison de deux types de préamplificateurs

 $C_d$  : capacité du détecteur $C_p$  : capacité parasite du système de liaison et capacité d'entrée du préamplificateur $C_f$  : capacité de contre-réaction $G$  : gain du préamplificateur



## Chapitre 3

# Renseignements généraux sur les dispositifs d'analyse et d'enregistrement des impulsions.

### 3.1 Impulsions

Etant donné une tension stable dans le temps, on appelle "impulsion" toute perturbation momentanée dans cette tension.

On définirait de même une impulsion de courant. Les impulsions utilisées sont rarement de forme simple ; on les caractérise par les paramètres suivants :

- polarité
- amplitude maximum
- $t_m$  : temps de montée (du 10 % au 90 % de l'impulsion maximum)
- $t_d$  : temps de descente
- $t$  : largeur à mi-hauteur

On classe les impulsions en deux catégories :

- les impulsions **analogiques** dont en général l'amplitude (mais aussi souvent la surface est proportionnelle au paramètre étudié).
- les impulsions **logiques**, d'amplitude, et le plus souvent de durée et de forme standardisées, qui contiennent une information de type oui/non sur un paramètre de la particule et aussi une information temporelle sur l'instant de passage de la particule.

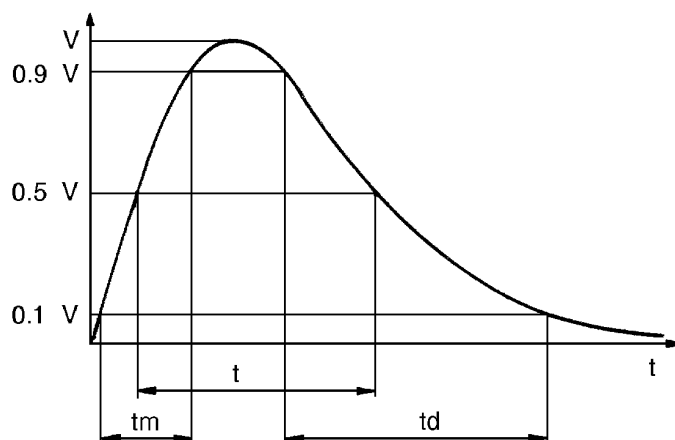


FIG. 3.1 – Forme et caractéristique d'une impulsion

**Tout circuit est conçu pour admettre à l'entrée des impulsions de caractéristiques définies dans un certain domaine et il est de même des impulsions qu'il délivre à sa sortie.**

On prendra donc soin, lors-du montage d'un dispositif expérimental, à ce que la polarité, le spectre d'amplitude, la durée et le temps de montée des impulsions à l'entrée de chaque circuit soient compatibles avec les spécifications du constructeur. La connaissance de l'impédance de sortie et d'entrée de chaque circuit permet de calculer la perte due à leur couplage.

## 3.2 Systèmes modulaires

Chaque fonction (amplificateur, discriminateur, coïncidences, comptage,...) est construite dans un tiroir (module) de dimensions mécaniques normalisées. Ces tiroirs s'enfichent dans un châssis qui les alimente électroniquement. Les interconnexions entre modules se font au moyen de câbles coaxiaux qui s'enfichent dans des connecteurs situés sur le panneau avant des modules (exceptionnellement, à l'arrière). Le niveau et la polarité des signaux sont normalisés de manière à faciliter le couplage des sorties avec les entrées des modules.

Le système que nous utiliserons est le **système internationale NIM** et voici un résumé de ses caractéristiques :

	NIM
Châssis	2 unités/châssis alimentations $\pm 24\text{ V} \geq 1.5\text{ A}$ $\pm 12\text{ V} \geq 3\text{ A}$ $\pm 6\text{ V} \geq 5\text{ A}$
Tiroirs	largeur 1 ou 2 unités

### Signaux analogiques

- rapides : La source est généralement un détecteur tel qu'un scintilla-  
teur qui délivre sur un câble de  $50\ \Omega$  une impulsion de courant de 0  
à -300 mA. Connecteur LEMO ; tout câble doit être terminé sur  $50\ \Omega$   
(à l'intérieur ou à l'extérieur du module).
- lents : Un bon exemple de source est la sortie d'un amplificateur spec-  
trométrique. Impulsions positives unipolaires (premier lobe positif si  
impulsion bipolaire) de 0 à + 10 V, durée de l'ordre de 1 à 10  $\mu\text{s}$ .  
Connecteur BNC (parfois LEMO) ; il n'est pas nécessaire d'adapter  
les câbles courts (moins de 5 m).

### Signaux logiques

- rapides (NIM)
  - Durée :  $\geq 2\text{ ns}$ .
  - Sorties : sources de courant de - 16 mA (parfois - 32 mA) délivrant  
- 0,8 V sur  $50\ \Omega$ .
  - Entrées : adaptées ou à adapter sur  $50\ \Omega$ .
  - Liaisons : câbles 50 W et connecteurs LEMO. Tous les câbles  
doivent être adaptés (terminés) sur  $50\ \Omega$ .
- lents ("TTL")
  - Durée :  $\geq$  quelques  $10^{-7}\text{ s}$ .
  - Sorties : sources de tension de + 3 à + 5 V.
  - Entrées : seuil à + 3 V, résistance d'entrée  $\geq 1\text{ kW}$ .
  - Liaisons : câble coaxial entre connecteurs BNC (exceptionnelle-  
ment LEMO). Il n'est pas nécessaire d'adapter les câbles courts  
(moins de 5 mètres).

**Divers** Les châssis peuvent être fixés et superposés dans un rack 19"

Il est indispensable de veiller à une ventilation correcte des modules. Il  
faut laisser un espace minimum de 5 à 10 cm entre châssis superposés,  
de manière que l'air puisse traverser de bas en haut les modules.

### 3.3 Amplificateur linéaire d'impulsions

L'amplificateur a pour fonction de délivrer à sa sortie une impulsion analogique d'amplitude proportionnelle à celle de l'impulsion d'entrée, sans pour cela reproduire nécessairement sa forme.

Il est caractérisé par :

- son gain généralisé : rapport entre grandeur de sortie et grandeur d'entrée.

Exemple : préamplificateur de charge :

gain = (capacité)<sup>-1</sup> = tension de sortie (V)/ charge d'entrée (Q),

- la stabilité du gain,
- sa linéarité : variation relative du gain en fonction de l'amplitude de l'impulsion de sortie et le domaine de linéarité : domaine d'amplitude des impulsions de sortie pour lequel la linéarité est assurée,
- la mise en forme qu'il effectue sur les impulsions d'entrée. Un amplificateur à large bande, attaqué par un saut de tension, délivre une impulsion dont le temps de descente est bien supérieur au temps de montée ; le temps de montée  $t_m$  est lié à la fréquence de coupure supérieure  $f_c$  par la relation  $t_m \cong 0.35 \cdot f_c$ . Un amplificateur spectrométrique, par contre, transforme un saut en une impulsion de durée finie, de temps de montée et de temps de descente voisins.
- son bruit de fond,
- son comportement en fonction de la charge de sortie,
- son comportement en impulsion saturante.

### 3.4 Discriminateur d'amplitude

Ce circuit permet de passer du domaine analogique au domaine logique. Il délivre une impulsion logique chaque fois qu'il reçoit à l'entrée une impulsion dont l'amplitude dépasse un certain seuil  $V_s$  réglable, les impulsions de sortie étant toutes de forme identique (impulsions standard). Il est caractérisé par :

- le domaine de réglage du seuil ; en particulier, sa valeur minimum appelée seuil propre.
- la stabilité du seuil
- son temps de résolution (voir § 3.9).

### 3.4.1 Utilisation du discriminateur

L'amplitude de l'impulsion délivrée par un détecteur est souvent liée à l'énergie qu'a perdue la particule en le traversant. Il est parfois utile de déterminer la répartition en amplitude de ces impulsions, leur spectre. Pour cela, on applique les impulsions délivrées par le détecteur, après amplification, à l'entrée du discriminateur. On relève ainsi le spectre intégral qui est le taux d'impulsions qu'il délivre en fonction de  $V_s$ . Si les impulsions d'entrée ont toutes la même amplitude  $V_0$ , le spectre intégral aura la forme suivante :

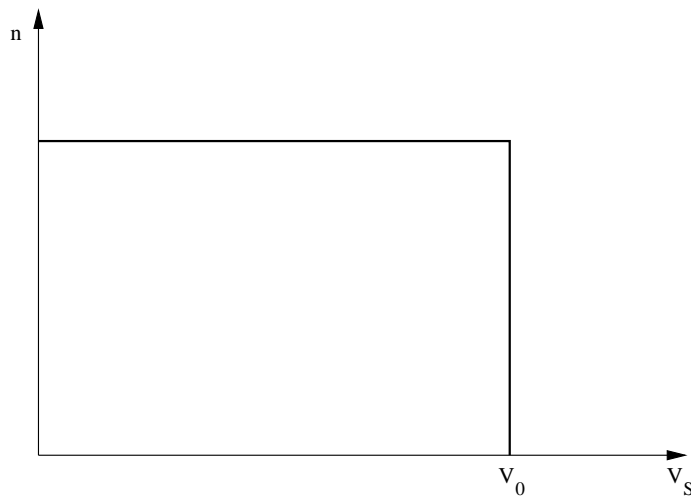


FIG. 3.2 – Spectre intégral en fonction de  $V_s$

En pratique, il n'est pas possible d'obtenir une suite d'impulsions qui aient toutes exactement la même amplitude. Le seuil de discrimination lui-même n'est pas défini avec une précision et une stabilité infinies ; un bruit de fond de faible amplitude, provenant du détecteur et de l'amplificateur vient encore se superposer aux impulsions, si bien que le spectre intégral que l'on relève a l'allure décrite par la figure 3.3

La connaissance du spectre intégral permet de reconstruire le spectre différentiel d'amplitude des impulsions :

Soit  $dn$  le nombre d'impulsions dont l'amplitude est comprise entre  $V_s$  et  $V_s + dV_s$  où  $dV_s$  représente une variation infiniment petite de  $V_s$ . On appelle spectre différentiel la courbe représentant la variation de  $dn/dV_s$  en fonction de  $V_s$ . Pratiquement, nous ne pouvons mesurer que le nombre  $dn$  d'impul-

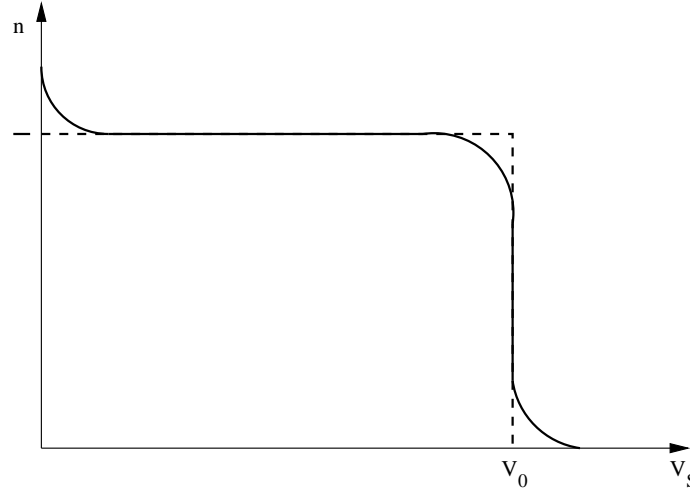


FIG. 3.3 – Spectre intégral réel

sions dont l'amplitude est comprise entre  $V_s$  et  $V_s + \Delta V_s$  ou  $\Delta V_s$  peut être choisi suffisamment petit pour que  $dn/dV_s$  varie peu dans l'intervalle compris entre  $V_s$  et  $V_s + \Delta V_s$  de sorte que l'on peut poser :

$$\frac{\Delta n}{\Delta V_s} = \frac{dn}{dV_s} \quad (3.1)$$

La figure 3.4 montre un spectre intégral et le spectre différentiel qui lui correspond.

### 3.5 Sélecteur d'amplitude à une bande

Sa fonction est de délivrer une impulsion standardisée chaque fois qu'il reçoit à l'entrée une impulsion dont l'amplitude  $V$  est telle que :

$$V_s < V < V_s + \Delta V_s \quad (3.2)$$

avec  $V_s$  = tension de seuil entrée et  $\Delta V_s$  = largeur de bande.

Il permet donc de relever directement un spectre différentiel. Son usage le plus courant est de sélectionner dans un spectre différentiel les impulsions d'amplitude déterminée (par exemple une raie) et de donner une définition temporelle à l'événement physique correspondant à cette impulsion.

Il est caractérisé par :



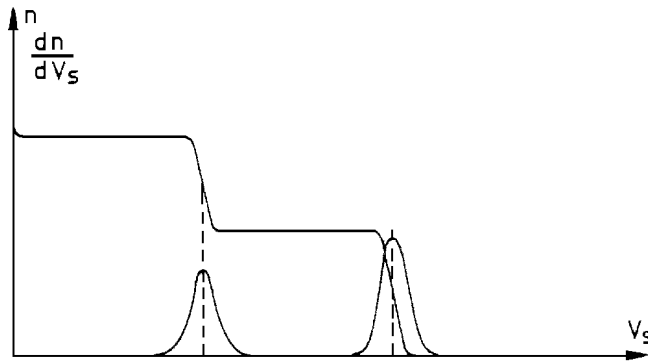


FIG. 3.4 – Spectre intégral et différentiel

- l'amplitude maximum, la durée minimum et la polarité des impulsions d'entrée
- le domaine de réglage du seuil
- le domaine de réglage de la largeur de bande
- la stabilité du seuil et de la largeur de bande
- son temps de résolution (voir § 3.9)

### 3.6 Analyseur multicanal

Chaque impulsion d'amplitude  $V$ , faisant partie d'un spectre d'amplitude à analyser, est classée dans un canal de largeur  $\Delta V_c$  tel que  $n_i \cdot \Delta V_c < V < (n_i + 1)\Delta V_c$ . Le contenu de chaque canal est gardé en mémoire. C'est une sorte de sélecteur d'amplitude multibande permettant de relever un spectre différentiel plus rapidement que le sélecteur d'amplitude à une bande puisque les impulsions d'amplitude en dehors de la bande ne sont pas perdues.

Ses caractéristiques sont :

- amplitude maximum, durée minimum et polarité des impulsions d'entrée
- nombre de canaux
- largeur des canaux  $\Delta V_c$

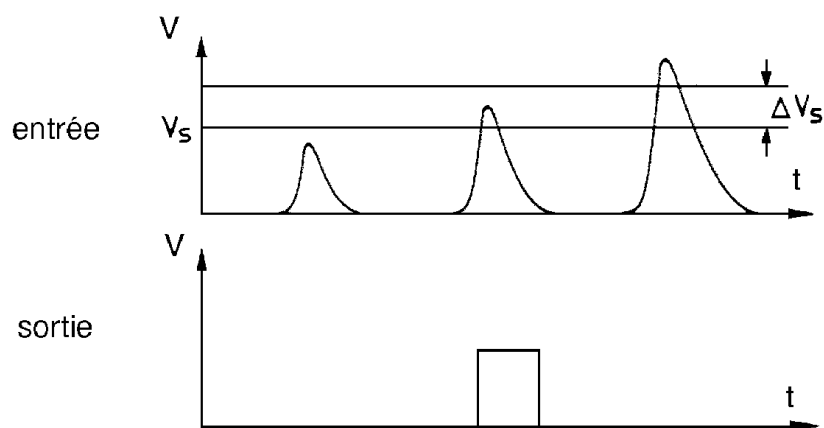


FIG. 3.5 – Sélection d'un signal au moyen de la largeur de bande

- réglage du seuil
- stabilité de la largeur des canaux et du seuil
- temps de résolution (voir § 3.9)

### 3.7 Compteur d'impulsions

Cet appareil dénombre les impulsions appliquées à l'entrée pendant une durée déterminée par l'utilisateur. Il doit être attaqué par des impulsions logiques de forme définie. Ses caractéristiques sont :

- son temps de résolution (voir § 3.9)
- sa capacité en nombre de coups

### 3.8 Haute tension continue stabilisée (HT)

Elle est essentiellement utilisée pour l'alimentation des détecteurs. Ses principales caractéristiques sont :

- la polarité de la tension fournie
- le domaine de réglage de la tension

- le courant maximum qu'elle peut fournir
- sa stabilité
- sa résistance interne

## 3.9 Temps de résolution

### 3.9.1 Temps de résolution d'appareils électroniques

De nombreux appareils électroniques sont insensibles à toute impulsion survenant pendant un temps  $t$  après l'analyse d'une première impulsion.  $t$  est appelé temps de résolution. Si les impulsions d'entrée se succèdent dans le temps selon un processus poissonnien (§ 4.3.5) de fréquence moyenne  $n$  et si  $m$  est la fréquence moyenne des impulsions à la sortie de l'appareil, la probabilité que  $k$  impulsions arrivent pendant le temps de résolution suivant une première impulsion est donc :

$$P_k = \frac{(n\tau)^k}{k!} e^{-n\tau} \quad (3.3)$$

entraînant une perte de comptage par unité de temps de :

$$\begin{aligned} n - m &= m \sum_{k=1}^{\infty} k P_k = m \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n\tau)^k}{(k-1)!} e^{-n\tau} \\ &= mn\tau \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{(n\tau)^{k'}}{(k')!} e^{-n\tau} = mn\tau \end{aligned} \quad (3.4)$$

En effet,  $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P_k$  représente le nombre d'impulsions arrivant dans un intervalle  $t$  suivant une première impulsion comptée.

la perte relative  $\frac{n-m}{m} = m\tau$

la valeur corrigée du taux d'impulsions  $n = \frac{m}{1-m\tau}$

Exemple :  $m = 10^4 \text{ s}^{-1}$ ,  $\tau = 10^{-6} \text{ s}$ , perte relative :  $\frac{n-m}{m} = 1\%$

**Remarque :** La formule de la perte relative donne aussi le taux d'empilement des impulsions si  $\tau$  est la durée des impulsions.

### 3.9.2 Temps de résolution d'un ensemble d'appareils électroniques

Lorsque plusieurs appareils ayant chacun son propre temps de résolution se suivent, le temps de résolution de la chaîne est donné par le temps de résolution le plus grand. Dans l'exemple ci-dessous, la correction pour la perte de comptage est due au discriminateur et est donné par :

$$n = \frac{m}{(1 - m\tau_1)} \quad (3.5)$$

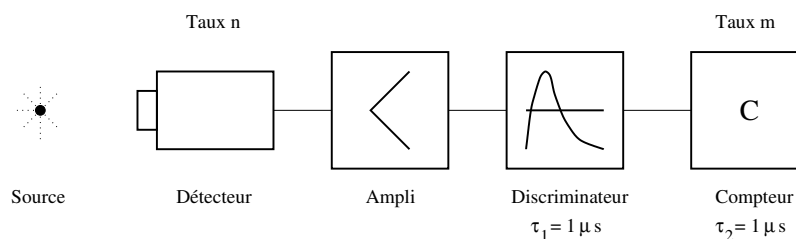


FIG. 3.6 – Chaîne de détection

# Chapitre 4

## Application des notions de statistique à la physique nucléaire

### 4.1 Introduction

La plupart des mesures en physique nucléaire consistent en des dénombrements d'événements, comme la mesure du nombre de particules émises dans une certaine direction ou avec une certaine vitesse.

La nature statistique des phénomènes physiques impliqués se manifeste dans les mesures en ce que, répétées dans des **conditions absolument identiques**, elles donneront des résultats qui peuvent différer d'une mesure à l'autre. Ces différents résultats sont cependant répartis selon une loi de distribution dont les grandeurs caractéristiques (paramètres) peuvent être **estimées** à partir de l'échantillon que constitue une série de mesures.

Il résulte de la nature statistique du phénomène que l'estimation sera, indépendamment de la qualité du dispositif de mesure, entachée d'une **"erreur statistique"**. Pour nous en convaincre, considérons une seconde série de mesures. Les variables aléatoires (v.a.) mesurées auront vraisemblablement des valeurs différentes que celles prises lors du premier échantillon et conduiront donc à une estimation différente des paramètres :

**"Les valeurs estimées du ou des paramètres de la loi de distribution d'une variable aléatoire (v.a.) à partir d'un échantillon de valeurs de celle-ci sont aussi des variables aléatoires"**.

Ce problème, qui concerne l'évaluation, à partir d'un échantillon, des paramètres de la loi de distribution dont on suppose connue la forme mathé-

matique, est désigné sous le terme d'**ajustement de paramètres**. Il sera discuté au paragraphe 4.4. Un autre problème fréquemment rencontré est désigné par "**test d'hypothèse**"; il consiste à vérifier qu'un échantillon de valeurs observées de la v.a. est compatible avec une loi de distribution donnée. La méthode du  $\chi^2$ , souvent utilisée pour cela, sera discutée au paragraphe 4.5.

## 4.2 Lois de distribution

On désignera par une majuscule une v.a. et par la minuscule correspondante une valeur prise par cette v.a. lors d'une épreuve.

Soit  $f(x)$  la densité de probabilité de la variable aléatoire réelle  $X$ . La probabilité pour que  $X$  soit compris entre  $x$  et  $x + dx$  est donnée par  $f(x)dx$ .

On supposera la loi de distribution normée, c'est-à-dire que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \quad (4.1)$$

Un événement certain a ainsi une probabilité de réalisation égale à 1.

### 4.2.1 Définitions

Espérance mathématique :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx \quad (4.2)$$

Moment d'ordre  $n$  par rapport à  $\alpha$  :

$$E((X - \alpha)^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \alpha)^n f(x)dx \quad (4.3)$$

On remarque que l'espérance mathématique est le moment du premier ordre par rapport à l'origine ; on l'appelle communément **valeur moyenne** de  $X$ . Le moment du second ordre par rapport à  $E(X)$ ,  $\sigma^2$ , appelé **variance**, mesure la dispersion de la variable aléatoire autour de la moyenne et joue un rôle particulièrement important.

$$\sigma^2 = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2 \quad (4.4)$$

On peut démontrer, d'une façon générale, l'inégalité de Bienaymé-Tchébycheff :

$$\text{Prob}(|X - E(X)| > \rho) \leq \frac{\sigma^2}{\rho^2} \quad (4.5)$$

Cette inégalité est d'une grande utilité lorsqu'on ne connaît pas la loi de distribution d'une variance aléatoire mais seulement sa moyenne et son moment du second ordre.

Nous avons supposé dans ce qui précède que  $X$  est une variable aléatoire continue. Cependant, la variable aléatoire peut souvent ne prendre que des valeurs discrètes  $x_i$ . La probabilité  $\text{Prob}(X = x_i)$  étant  $p(x_i)$ , la condition de normalisation sera donnée par :

$$\begin{aligned} \sum_i p(x_i) &= 1 \\ E(X) &= \sum_i x_i p(x_i) \\ E((X - \alpha)^n) &= \sum_i (x_i - \alpha)^n \cdot p(x_i) \end{aligned}$$

Rappelons brièvement quelques lois de distribution importantes en physique nucléaire.

### 4.2.2 Loi binômiale

Considérons un processus de tirage au sort caractérisé pour chaque épreuve par une probabilité de succès  $q$  et donc une probabilité  $(1 - q)$  d'échec.

La probabilité pour que, dans un échantillon de  $N$  épreuves, on obtienne  $x$  succès et  $(N - x)$  échecs est donnée par :

$$P_N(X = x) = \frac{N!}{x! \cdot (N - x)!} \cdot q^x \cdot (1 - q)^{(N - x)} \quad (4.6)$$

Le paramètre de cette loi de distribution est la probabilité  $q$ .

Exemple : pour  $N = 10$  et  $q = 0.5$ , on obtient la distribution de la figure 4.1 :

De l'indépendance des épreuves successives, on déduit que :

$$E(X) = q N \quad (4.7)$$

$$\sigma^2 = N q(1 - q) \quad (4.8)$$

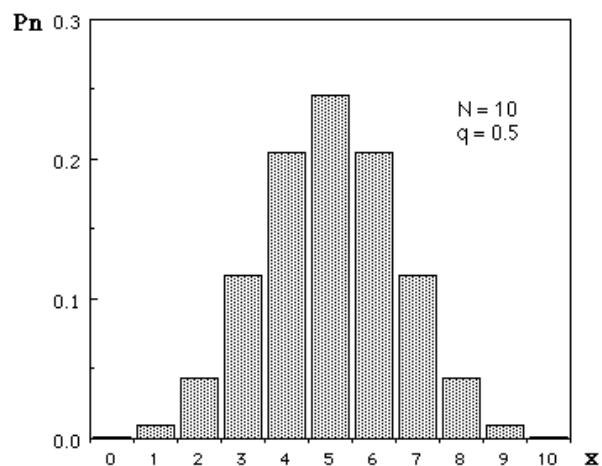


FIG. 4.1 – Densité de probabilité de la loi binômiale

### 4.2.3 Loi de Poisson

Elle s'applique à une variable aléatoire discontinue  $X$  prenant toutes les valeurs entières positives.

$$x = 0, 1, \dots, r, \dots, \infty$$

$$p(x) = \text{Prob}(X = x) = e^{-m} \cdot \frac{m^x}{x!}$$

$$E(X) = m \quad \sigma^2 = m$$

On se reportera au paragraphe 4.3.5. pour l'établissement de la loi de distribution d'un processus poissonnien.

La loi de Poisson est une bonne approximation de la loi binômiale lorsque  $q$  est petit et  $N$  grand, le produit  $N \cdot q$  tendant vers  $m$ , paramètre de la distribution.



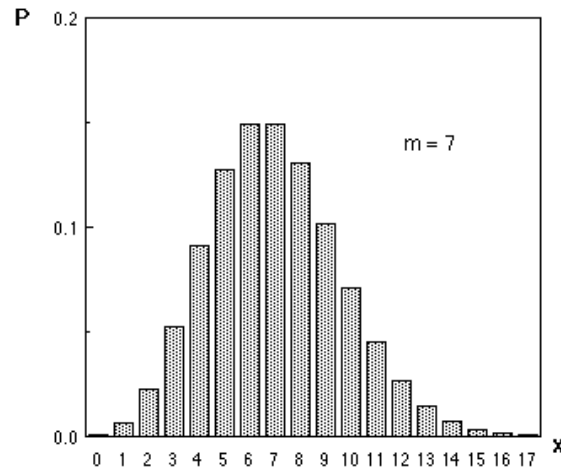


FIG. 4.2 – Densité de probabilité de la loi de Poisson

#### 4.2.4 Loi de Gauss

Valeurs possibles de  $X$  :  $-\infty < x < +\infty$

$$p(x)dx = \text{Prob}(x < X < x + dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} e^{-\frac{(x-m)^2}{2s^2}} dx \quad (4.9)$$

$$E(X) = m \quad \sigma^2 = s^2$$

Les paramètres de la loi de distribution sont  $m$  et  $s$

$$E(|X - m|) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \quad (4.10)$$

Lorsque  $m$  est grand, la loi de Poisson peut être "approximée" par une loi de Gauss de variance  $\sigma^2 = m$ .

Toute distribution de Gauss qui dépend de deux paramètres  $m$  et  $s$  peut se ramener à la "**forme normale**" en effectuant le changement de variables

$$T = \frac{X - m}{s} \quad dt = \frac{dx}{s} \quad (4.11)$$

$$\Phi(t)dt = \text{Prob}(t < T < t + dt) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (4.12)$$

qui correspond à la loi de distribution d'une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle et d'écart type égal à l'unité.

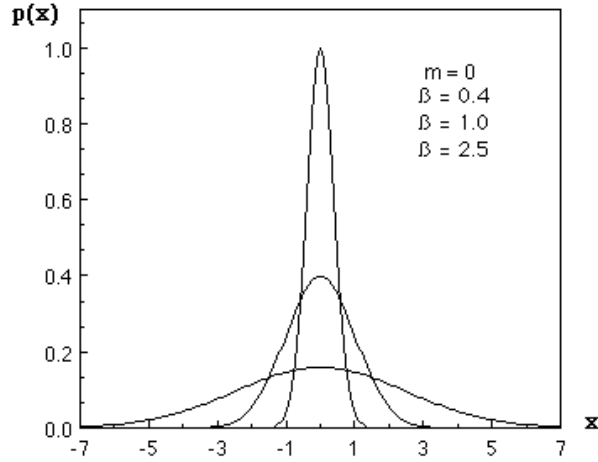


FIG. 4.3 – Densité de probabilité de la loi de Gauss

### 4.2.5 Intervalles de confiance

Par définition, la probabilité d'obtenir lors d'un tirage une valeur de la v.a. comprise entre deux limites  $x_{min}$  et  $x_{max}$  est donnée par :

$$Pr(x_{min} < X < x_{max}) = \int_{x_{min}}^{x_{max}} p(x)dx \quad (4.13)$$

Ainsi, dans le cas d'une v.a. gaussienne, la probabilité d'obtenir une valeur de  $X$  à l'intérieur d'un domaine de largeur  $2\sigma$  centré sur la moyenne est :

$$Pr(m - \sigma < X < m + \sigma) = \int_{m-\sigma}^{m+\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = 68\% \quad (4.14)$$

On a aussi :

$$Pr(m - 2\sigma < X < m + 2\sigma) = 95.5\% \quad (4.15)$$

## 4.3 Fonctions de variables aléatoires

A partir de  $N$  variables aléatoires  $X_1 \dots X_N$ , il est possible de former une nouvelle v.a.  $Y$  fonction des v.a.  $X_i$

$$Y = f(X_1, \dots, X_N)$$

### 4.3.1 Propagation des erreurs

Nous nous posons le problème d'exprimer la variance  $\sigma_Y^2$  de la v.a.  $Y = f(X_1, \dots, X_n)$  en fonction des variances  $\sigma_{X_i}^2$  des v.a.  $X_i$ , supposant celles-ci indépendantes les unes des autres. Désignons par  $y = f(x_1, \dots, x_n)$  une valeur particulière résultant d'une épreuve au cours de laquelle on a obtenu les valeurs particulières  $x_i$  des diverses variables  $X_i$ . Posons encore :

$$E(Y) = \bar{y} \quad \text{et} \quad E(X_i) = \bar{x}_i$$

Admettons que les lois de distribution de  $X_i$  sont caractérisées par une assez grande probabilité d'obtenir des valeurs de  $x_i$  voisines de  $\bar{x}_i$  (loi de Gauss par exemple), de sorte que l'on peut exprimer chaque valeur particulière de  $y$  par un développement en série :

$$\begin{aligned} y &= f(x_1, \dots, x_N) \\ &= f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N) + \left( \frac{\partial f}{\partial X_1}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N) \right) (x_1 - \bar{x}_1) + \dots \\ &\quad + \left( \frac{\partial f}{\partial X_N}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N) \right) (x_N - \bar{x}_N) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Si  $\bar{y} = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N)$  ce qui est vrai pour toute fonction linéaire en chacun des  $X_i$ , par exemple, si

$$Y = \sum \alpha_i X_i$$

on aura :

$$\begin{aligned}
 \sigma_Y^2 &= E((Y - \bar{y})^2) \\
 &= E((Y - f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N))^2) \\
 &= \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial \bar{X}_i}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N) \right)^2 \cdot \sigma_{X_i}^2 \\
 &\quad + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i=1}^N \frac{\partial f}{\partial X_i}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N) \\
 &\quad \cdot \frac{\partial f}{\partial X_j}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N) E((X_i - \bar{x}_i) \cdot (X_j - \bar{x}_j))
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Les variables  $X_i$  étant indépendantes :

$$E((X_i - \bar{x}_i) (X_j - \bar{x}_j)) = E(X_i - \bar{x}_i) E(X_j - \bar{x}_j) = 0 \tag{4.18}$$

de sorte que, en se limitant au premier ordre du développement en série :

$$\begin{aligned}
 \sigma_Y^2 &= ((Y - f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N))^2) \sigma_{X_1}^2 + \dots \\
 &\quad + ((Y - f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N))^2) \sigma_{X_N}^2
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

### Applications

1. Somme ou différence de deux v.a. :

$$Y = X_1 + X_2 \quad \sigma_Y^2 = \sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2$$

$$Y = X_1 - X_2 \quad \sigma_Y^2 = \sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2$$

On doit encore noter que si les deux variables  $X_1$  et  $X_2$  obéissent à des lois de Poisson ou de Gauss, leur somme est aussi distribuée selon une loi de Poisson ou de Gauss. Par contre si la différence des deux variables gaussiennes est encore une variable gaussienne, la différence de deux variables poissonniennes n'est pas une variable poissonnienne.

2. Combinaison linéaire de v.a. :

$$Y = aX_1 + bX_2 + cX_3 \quad \sigma_Y^2 = a^2\sigma_{X_1}^2 + b^2\sigma_{X_2}^2 + c^2\sigma_{X_3}^2$$

3. Produits :

$$Y = aX_1X_2 \quad \sigma_Y^2 = a^2\bar{x}_2^2\sigma_{X_1}^2 + a^2\bar{x}_2^2\sigma_{X_2}^2$$

où  $a = c^{te}$

$$\sigma_Y^2 = \bar{y}^2 \left( \frac{\sigma_{x_1}^2}{\bar{x}_1^2} + \frac{\sigma_{x_2}^2}{\bar{x}_2^2} \right)$$

Remarque : cette relation n'est évidemment pas applicable dans le cas où  $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0$  : la variance du produit de deux v.a. gaussiennes de moyenne nulle n'est certainement pas nulle. En faisant le développement en série jusqu'au deuxième ordre, on obtient facilement :  $\sigma_Y^2 = a^2 \cdot \sigma_{X_1}^2 \cdot \sigma_{X_2}^2$

### 4.3.2 Loi de distribution de $\chi^2$

La somme des carrés de  $\nu$  variables aléatoires normales est une v.a. dite de  $\chi^2$ .

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{\nu} t_i^2 \quad (4.20)$$

On peut calculer la densité de probabilité associée à cette v.a. ; elle a la forme analytique suivante :

$$\begin{aligned} P_{\nu}(\chi^2)d\chi^2 &= \text{Prob}(\chi^2 < \chi^2 < \chi^2 + d\chi^2) \\ &= \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma(\frac{\nu}{2})} e^{-\frac{\chi^2}{2}} (\chi^2)^{(\frac{\nu}{2})-1} d\chi^2 \end{aligned} \quad (4.21)$$

Quand  $\nu$  est grand, la loi de distribution de  $\chi^2$  tend vers une loi de Gauss de moyenne  $\nu$  et de variance  $\sigma^2 = 2\nu$ .

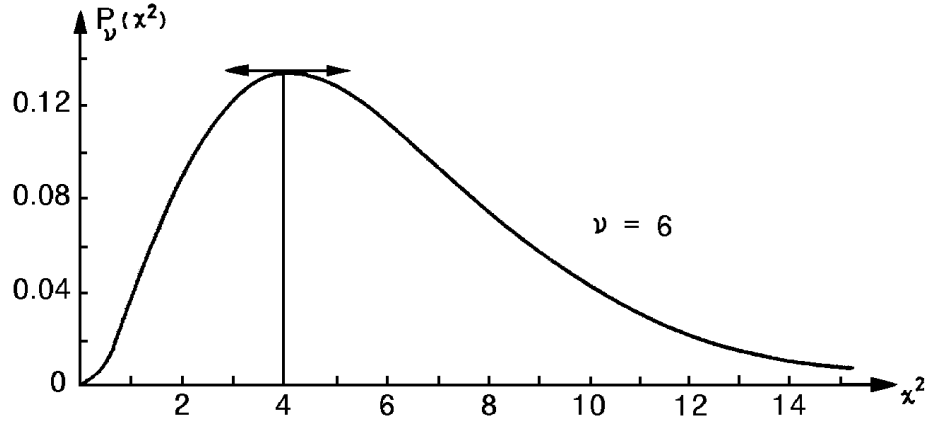
La loi de distribution de  $\chi^2$  joue un rôle important, particulièrement dans les tests d'hypothèse (cf paragraphe 4.5). Elle est en général tabulée (cf Annexe) sous la forme :

$$P(\chi_{\alpha}^2) = \int_{\chi_{\alpha}^2}^{\infty} p(\chi^2)d\chi^2 \quad (4.22)$$

qui représente la probabilité pour que  $\chi^2$  soit plus grand que  $\chi_{\alpha}^2$ .

### 4.3.3 Distribution de $\chi^2$

**Théorème 1** Soit  $X_1, X_2, \dots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes avec loi commune  $N(0, 1)$ . On dit que la somme des carrés  $X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$

FIG. 4.4 – Densité de probabilité de la loi du  $\chi^2$ 

$$\begin{aligned} E(\chi^2) &= \nu \\ \sigma_{\chi^2}^2 &= 2\nu \\ \max(p_\nu(\chi^2)) &= \nu - 2 \end{aligned}$$

suit une distribution  $\chi^2$  (khi-carré) avec  $n$  degrés de libertés ( $\chi_n^2$ ). La densité  $\phi_{\chi_n^2}(t)$  est alors donnée par :

$$\phi_{\chi_n^2}(t) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(\frac{n}{2})} t^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}} \quad (4.23)$$

où  $\Gamma$  est la fonction Gamma d'Euler.

### Démonstration

On connaît la densité  $\phi_{X_i}(u) = (2\pi)^{-1/2} e^{-u^2/2}$  des variables aléatoires  $X_i$ . Formons les variables  $Y_1, Y_2, \dots, Y_i, \dots, Y_n$  définies par :

$$Y_i = f(X_i) = X_i^2$$

Observant que  $f$  est strictement croissante pour  $X_i \geq 0$ , la densité des variables  $Y_i$  est donnée par :

$$\phi_{Y_i}(t) = \phi_{f(X_i)}(t) = \frac{2 \cdot \phi_{X_i}(f^{-1}(t))}{f'(f^{-1}(t))} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t/2} \quad (4.24)$$

où le facteur 2 du numérateur tient compte du fait que  $f$  est paire.

**Point d'accrochage** Au vu de 4.23 et 4.24 le théorème est vérifié pour  $n = 1$ . Démontrons qu'il l'est pour  $n = 2$ . On forme la variable aléatoire  $Z_2 = Y_1 + Y_2 = X_1^2 + X_2^2$ . La densité de  $Z_2$  est alors donnée par :

$$\phi_{Z_2}(t) = \int du \phi_{Y_1}(t) \phi_{Y_2}(t - u)$$

c'est-à-dire dans notre cas :

$$\phi_{Z_2}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t du \frac{1}{\sqrt{u(t-u)}} e^{-t/2} = \frac{1}{2} e^{-t/2} \equiv \phi_{\chi_{n=2}^2}(t) \quad (4.25)$$

où l'on a utilisé l'intégrale indéfinie :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{-2ax - b}{\sqrt{-4ac + b^2}}, \quad a < 0 \quad (4.26)$$

On retrouve bien l'expression 4.23 pour  $n = 2$ .

**Récurrence** Supposons le théorème vérifié jusqu'à  $n = m$ , et démontrons qu'il l'est encore pour  $n = m + 1$ .

Nous avons pour la fonction  $\Gamma$  (définie sur  $\mathbb{C}$ ) évaluée sur des demi-entiers :

$$\Gamma\left(\frac{m}{2} + \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} \left(\frac{m-1}{2}\right)! & m \text{ impair} \\ \frac{\sqrt{\pi}}{2^m} \frac{m!}{\left(\frac{m}{2}\right)!} & m \text{ pair} \end{cases} \quad (4.27)$$

$$\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) = \begin{cases} \left(\frac{m}{2} - 1\right)! & m \text{ pair} \\ \frac{\sqrt{\pi}}{2^{m-1}} \frac{(m-1)!}{\left(\frac{m-1}{2}\right)!} & m \text{ impair} \end{cases} \quad (4.28)$$

A l'instar du cas  $n = 2$ , on forme la variable  $Z_m = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_m = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_m^2$ . En groupant de  $i = 1, \dots, m$  le  $i$ -ème terme de la série

$\sum_{k=0}^i Y_k$  avec  $Y_{i+1}$  (deux par deux), la densité de  $Z_m$  s'exprime par l'intégrale "téléscopique" :

$$\phi_{Z_m}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_0^t dx_m \int_0^{x_m} dx_{m-1} \dots \int_0^{x_2} dx_1 \frac{1}{\sqrt{x_1}} \frac{1}{\sqrt{x_2 - x_1}} \dots \frac{1}{\sqrt{x_m - x_{m-1}}} \frac{1}{\sqrt{t - x_m}} \underbrace{e^{-\frac{x_1}{2}} e^{-\frac{(x_2 - x_1)}{2}} \dots e^{-\frac{(t - x_m)}{2}}}_{e^{-t/2}} \quad (4.29)$$

**Cas  $m$  pair** On a par hypothèse  $\phi_{Z_m}(t) = \phi_{\chi_m^2}(t)$ . Ecrivons alors à partir de 4.29 l'expression de la densité de la variable aléatoire  $Z_{m+1} = Z_m + Y_{m+1}$  :

$$\begin{aligned} \phi_{Z_{m+1}}(t) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^t dx_{m+1} \phi_{\chi_m^2}(x_{m+1}) \frac{1}{\sqrt{t - x_{m+1}}} e^{-\frac{(t - x_{m+1})}{2}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{2^{m/2} \Gamma(\frac{m}{2})} \int_0^t dx_{m+1} \frac{x_{m+1}^{(\frac{m}{2}-1)}}{\sqrt{t - x_{m+1}}} e^{-t/2} = \dots \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{2^{m/2} \Gamma(\frac{m}{2})} \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{m}{2} + \frac{1}{2})} t^{(\frac{m}{2}-1)} \left(\frac{m}{2} - 1\right)! 2\sqrt{t} e^{-t/2} \\ &= \frac{1}{2^{\frac{m+1}{2}} \Gamma(\frac{m+1}{2})} t^{(\frac{m+1}{2}-1)} e^{-t/2} \equiv \phi_{\chi_{m+1}^2}(t) \end{aligned}$$

où l'on a utilisé 4.28 et l'Ansatz suivant pour l'intégration ("= ...") sur  $x_{m+1}$  :

$$\int \frac{x^n}{\sqrt{ax + b}} dx = \frac{2}{a(2n+1)} \left( x^n \sqrt{ax + b} - bn \int \frac{x^{n-1}}{\sqrt{ax + b}} dx \right) \quad (4.30)$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_0^t du \frac{u^{(\frac{m}{2}-1)}}{\sqrt{t-u}} &= \frac{2}{m-1} t \left(\frac{m}{2} - 1\right) \int_0^t du \frac{u^{(\frac{m}{2}-2)}}{\sqrt{t-u}} = \dots \\ &= \frac{2^{(\frac{m}{2}-1)}}{(m-1)(m-3) \dots 1} t^{(\frac{m}{2}-1)} \left(\frac{m}{2}\right)! \int_0^t \frac{du}{\sqrt{t-u}} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{m}{2} + \frac{1}{2})} t^{(\frac{m}{2}-1)} \left(\frac{m}{2} - 1\right)! 2\sqrt{t} \end{aligned}$$



où la dernière égalité est obtenue en utilisant le fait que :

$$\Gamma\left(\frac{m}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{m/2}} (m-1)(m-3)\dots 1, \quad m \text{ pair}$$

chose dont on se convainc facilement par une récurrence<sup>1</sup> sur les  $m$  pairs ( $m \geq 2$ ) à partir de l'évaluation 4.27 de la fonction Gamma.

Le théorème est donc toujours vérifié pour  $n = m+1$ ,  $m$  pair.

**Cas  $m$  impair** On part de l'équation 4.29 que l'on calcule de la même manière, mais en ajustant certains facteurs :

$$\begin{aligned} \phi_{Z_{m+1}}(t) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^t dx_{m+1} \phi_{\chi_m^2}(x_{m+1}) \frac{1}{\sqrt{t-x_{m+1}}} e^{-\frac{(t-x_{m+1})}{2}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{2^{m/2} \Gamma(\frac{m}{2})} \int_0^t dx_{m+1} \frac{x_{m+1}^{(\frac{m}{2}-1)}}{\sqrt{t-x_{m+1}}} e^{-t/2} = \dots \\ &= \frac{1}{2^{m/2} \Gamma(\frac{m}{2})} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{2^{\frac{m-1}{2}}}{(m-1)(m-3)\dots 2} t^{\frac{m-1}{2}} \left(\frac{m}{2}-1\right) \left(\frac{m}{2}-2\right) \dots \frac{1}{2} e^{-t/2} \\ &= \frac{1}{2^{\frac{m+1}{2}} \Gamma(\frac{m+1}{2})} t^{(\frac{m+1}{2}-1)} e^{-t/2} \equiv \phi_{\chi_{m+1}^2}(t) \end{aligned} \quad (4.31)$$

où l'on a utilisé l'Ansatz 4.30 pour l'intégration ("=...") sur  $x_{m+1}$  :

$$\begin{aligned} \int_0^t du \frac{u^{(\frac{m}{2}-1)}}{\sqrt{t-u}} &= \frac{2}{m-1} t \left(\frac{m}{2}-1\right) \int_0^t du \frac{u^{(\frac{m}{2}-2)}}{\sqrt{t-u}} = \dots \\ &= \frac{2^{(\frac{m-1}{2})}}{(m-1)(m-3)\dots 2} t^{(\frac{m-1}{2})} \left(\frac{m}{2}-1\right) \left(\frac{m}{2}-2\right) \dots \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^t \frac{u^{-1/2}}{\sqrt{t-u}} du}_{=\pi} \end{aligned}$$

la dernière intégrale étant donnée par 4.26. La dernière égalité de 4.31 est ensuite obtenue en utilisant le fait que :

$$\Gamma\left(\frac{m}{2} + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(m-1)(m-3)\dots 2}{(\frac{m}{2}-1)(\frac{m}{2}-2)\dots \frac{1}{2}} 2^{-m/2} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right), \quad m \text{ impair}$$

---

<sup>1</sup>Cela revient en fait à démontrer l'égalité :  $(m-1)(m-3)\dots 1 = \frac{1}{2^{m/2}} \frac{m!}{(\frac{m}{2})!}$ ,  $m$  pair.

chose dont on se convainc facilement par une récurrence <sup>2</sup> sur les  $m$  impairs ( $m \geq 3$ ) à partir des évaluations 4.27 et 4.28 de la fonction Gamma.

Le théorème est donc aussi toujours vérifié pour  $n = m + 1$ ,  $m$  impair.

**Conclusion** Le théorème est vrai pour  $n = 1$ . S'il est vrai pour  $n = m$ , alors il le sera encore pour  $n = m + 1$ ,  $\forall m$ . On conclut par récurrence.

#### 4.3.4 Théorème central limite

Considérons  $N$  variables aléatoires indépendantes  $X_i$  caractérisées par la même loi de distribution de moyenne  $m$  et de variance  $\sigma^2$ . On peut former la variable aléatoire :

$$S = \sum_{i=1}^N \frac{X_i}{N} \quad (4.32)$$

et on peut démontrer que lorsque  $N$  est grand, la loi de distribution de  $S$  tend vers une loi de Gauss de moyenne  $m$  et de variance  $\Sigma^2 = \frac{\sigma^2}{N}$ .

#### 4.3.5 Exemple d'une loi de distribution : la loi de Poisson

Cherchons quelle est la loi de distribution du nombre de particules émises dans un intervalle de temps  $\Delta t$  par une source de particules d'activité moyenne  $\nu$  constante dans le temps.

La probabilité d'émission d'une particule dans un intervalle infinitésimal  $dt$  est  $\nu dt$ .

La probabilité pour qu'aucune particule ne soit émise dans un intervalle fini  $\Delta t$  est :

$$\begin{aligned} p_{x=0}(\Delta t) &= \prod_0^{\frac{\Delta t}{dt}} (1 - \nu dt) = (1 - \nu dt)^{\frac{\Delta t}{dt}} \\ &= (1 - \nu dt)^{\frac{\nu \Delta t}{\nu dt}} = (1 + u)^{-\frac{1}{u} \cdot (\nu \cdot \Delta t)} \end{aligned} \quad (4.33)$$

avec :  $u = -\nu dt$  ; comme  $\lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{\frac{1}{u}} = e$  , on a en faisant tendre  $dt \rightarrow 0$

$$p_{X=0}(\Delta t) = e^{-\nu \Delta t} \quad (4.34)$$

---

<sup>2</sup>Cela revient en fait à démontrer l'égalité :  $[(\frac{m-1}{2})!]^2 = \frac{(m-1)!}{2^{(3m-3)/2}} \frac{(m-1)(m-3)\dots 2}{(\frac{m}{2}-1)(\frac{m}{2}-2)\dots \frac{1}{2}}$ ,  $m$  impair.

La probabilité d'obtenir  $x$  particules dans l'intervalle de temps  $\Delta t$  est égale à la somme des probabilités d'en obtenir à la fois :

- $x - 1$  dans l'intervalle  $[0, t[$
- une dans l'intervalle  $[t, t + dt[$
- aucune dans l'intervalle  $[t + dt, \Delta t]$

pour tous les  $t \in [0, \Delta t]$ .

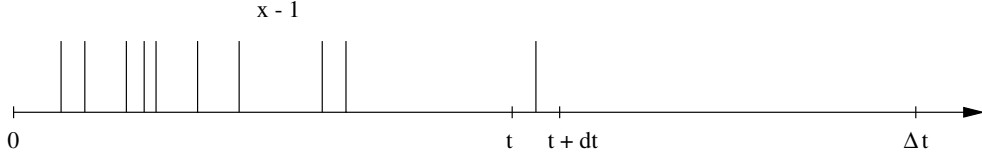


FIG. 4.5 – Nombre d'événement dans l'intervalle  $\Delta t$  pour  $t$  fixé

$$\begin{aligned}
 p_{X=x}(\Delta t) &= \int_{t=0}^{\Delta t} p_{X=x-1}(t) \nu dt e^{-\nu(\Delta t-t)} \\
 &= \nu^{-\nu\Delta t} \int_{t=0}^{\Delta t} p_{X=x-1}(t) e^{\nu t} dt
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
 p_{X=1}(\Delta t) &= \nu e^{-\nu\Delta t} \int_0^{\Delta t} e^{-\nu t} e^{\nu t} dt = \nu \Delta t e^{-\nu\Delta t} \\
 p_{X=2}(\Delta t) &= \nu e^{-\nu\Delta t} \int_0^{\Delta t} \nu t e^{-\nu t} e^{\nu t} dt = \frac{(\nu \Delta t)^2}{2} e^{-\nu\Delta t} \\
 p_{X=3}(\Delta t) &= \nu e^{-\nu\Delta t} \int_0^{\Delta t} \frac{(\nu t)^2}{2} e^{-\nu t} e^{\nu t} dt = \frac{(\nu \Delta t)^3}{2 \cdot 3} e^{-\nu\Delta t} \\
 p_{X=4}(\Delta t) &= \nu e^{-\nu\Delta t} \int_0^{\Delta t} \frac{(\nu t)^3}{2 \cdot 3} e^{-\nu t} e^{\nu t} dt = \frac{(\nu \Delta t)^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} e^{-\nu\Delta t}
 \end{aligned}$$

et généralement :

$$p_{X=x}(\Delta t) = \frac{(\nu \Delta t)^x}{x!} e^{-\nu\Delta t} = \frac{m^x}{x!} e^{-m} \tag{4.36}$$

qui est une loi de Poisson de moyenne  $m = \nu \Delta t$ .

## 4.4 Ajustement de paramètres

Considérons un phénomène caractérisé par une loi de distribution  $f(x, b)$  ;  $X$  est la variable aléatoire (continue ou discrète),  $b$  le paramètre caractéristique, par exemple la moyenne ou la variance de la loi de distribution, à déterminer à partir d'un échantillon de  $N$  valeurs observées  $x_1 \dots x_i \dots x_N$  de la variable  $X$ .

Une première estimation  $\hat{b}$  de  $b$  s'exprimera par une relation

$$\hat{b} = G \left( x_1^{(1)} \dots x_N^{(1)} \right) \quad (4.37)$$

$b$  étant une fonction de v.a.  $\hat{b}$  est également une v.a.

Une nouvelle série de mesures donnera des valeurs de  $x$  :

$$\left( x_1^{(2)} \dots x_N^{(2)} \right) \quad (4.38)$$

différentes de la mesure précédente et conduira donc à une autre valeur de l'estimation

$$\hat{b} = G \left( x_2^{(1)} \dots x_N^{(1)} \right) \quad (4.39)$$

Les différentes estimations de  $\hat{b}$  seront distribuées selon une certaine loi autour de la vraie valeur du paramètre  $b$ . L'estimation  $\hat{b}$  de  $b$ , effectuée à partir d'un échantillon de taille  $N$ , est entachée d'une certaine erreur statistique qu'il importe de déterminer et de rendre minimale par le choix d'une méthode d'estimation convenable.

### 4.4.1 Méthode du maximum de vraisemblance

$f(x, b)$  étant la probabilité d'obtenir la valeur  $x$  de  $X$  lors d'une épreuve, la probabilité d'obtenir la série de valeurs  $x_1 \dots x_i \dots x_N$  dans l'échantillon est :

$$L = \prod_{i=1}^N f(x_i, b) \quad (4.40)$$

On peut admettre, le hasard n'étant pas à priori contre nous, que l'échantillon que l'on a obtenu est celui que l'on a le plus de chance de réaliser (maximum de vraisemblance). La valeur du paramètre  $b$  sera donc celle qui correspond

au maximum de la probabilité  $L$ , ou encore, pour simplifier les calculs, de son logarithme :

$$\frac{d}{db} \ln L = \sum_{i=1}^N \frac{1}{f(x_i, b)} \frac{df(x_i, b)}{db} = 0 \quad (4.41)$$

Ainsi,  $\hat{b}$  est la valeur de  $b$  qui rend l'observation faite la plus probable.

L'estimation se fera de façon semblable lorsque la loi de distribution comporte  $j$  paramètres  $b^1 \dots b^j$

$$L = \prod_{i=1}^N f(x_i, b^1 \dots b^j) \quad (4.42)$$

Les estimations  $\hat{b}^1 \dots \hat{b}^j$  sont alors les valeurs de  $b^1 \dots b^j$  satisfaisant le système d'équations :

$$\frac{\partial}{\partial b^1} \ln L = \sum_{i=1}^N \frac{1}{f(x_i, b^1 \dots b^j)} \frac{\partial f(x_i, b^1 \dots b^j)}{\partial b^1} = 0 \quad (4.43)$$

$$\frac{\partial}{\partial b^j} \ln L = \sum_{i=1}^N \frac{1}{f(x_i, b^1 \dots b^j)} \frac{\partial f(x_i, b^1 \dots b^j)}{\partial b^j} = 0 \quad (4.44)$$

Lorsqu'il n'y a qu'un paramètre à estimer et que l'échantillon est assez grand, on peut montrer que l'estimation  $\hat{b}$  de  $b$  est une variable aléatoire sensiblement distribuée selon une loi de Gauss de moyenne  $b$  et de variance :

$$\sigma_b^2 = \left( -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial b^2} \right)_{b=\hat{b}}^{-1} \quad (4.45)$$

Ainsi, d'après la propriété bien connue de la loi de Gauss (paragraphe 4.2.4), l'écart type  $\sigma_b$  (respectivement l'intervalle  $2\sigma_b$ ) définit un domaine de part et d'autre de la vraie valeur  $b$  dans lequel la valeur  $\hat{b}$  a 68% (respectivement 95.5%) de chance de se trouver.

#### 4.4.2 Définition de l'erreur statisque

Inversement, on a approximativement 68% de chance que la vraie valeur  $b$  soit comprise dans  $\hat{b} \pm \sigma_b$  (respectivement 95.5% de chance que la vraie

valeur  $b$  soit comprise dans  $\hat{b} \pm 2\sigma_b$ ).

Cela est d'autant plus correct que le rapport  $\sigma_b/\hat{b}$  est petit, c'est à dire que l'estimation  $\hat{b}$  est proche de la vraie valeur  $b$ .

On définit l'erreur statistique  $\varepsilon$  (erreur statistique **standard**) par l'écart type  $\sigma_b$  tel que  $\hat{b} \pm \varepsilon$  contienne la vraie valeur  $b$  avec une probabilité de 68%. L'erreur relative est donnée par

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\hat{b}} = \frac{\sigma_b}{\hat{b}} \quad (4.46)$$

Remarque : On a utilisé autrefois l'erreur statistique **probable** définie par  $\varepsilon = 0.675 \sigma_b$  tel que  $\hat{b} \pm \varepsilon$  contienne la vraie valeur  $b$  avec une probabilité de 50 %.

### 4.4.3 Application à un phénomène poissonnien

Soit un détecteur placé à proximité d'une source de rayonnements d'activité constante, par exemple, un accélérateur qui délivre un faisceau de particules d'intensité moyenne constante ou une source radioactive de masse constante et de très grande période relativement à la durée de la mesure. On effectue  $N$  mesures de durée  $t_j$  au cours desquelles on enregistre le nombre  $x_j$  de particules détectées. La variable aléatoire  $X$  étant poissonnienne, estimons par la méthode du maximum de vraisemblance le taux de comptage  $n$  (nombre moyen de détections par unité de temps). On a :

$$p(X = x_j, t_j) = e^{-\nu t_j} \frac{(\nu t_j)^{x_j}}{x_j!} \quad (4.47)$$

$$\ln L = \sum_{j=1}^N \ln \left( e^{-\nu t_j} \frac{(\nu t_j)^{x_j}}{x_j!} \right) \quad (4.48)$$

$$= - \sum_{j=1}^N \nu t_j + \sum_{j=1}^N x_j \ln \nu t_j - \sum_{j=1}^N \ln x_j!$$

$$\frac{d}{d\nu} \ln L = - \sum_{j=1}^N t_j + \sum_{j=1}^N \frac{x_j}{\nu} = 0 \quad (4.49)$$

d'où :

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{j=1}^N x_j}{\sum_{j=1}^N t_j} \quad (4.50)$$

La meilleure estimation du taux de comptage est donc tout simplement donnée par le nombre total de coups, comptés dans l'ensemble des mesures, divisé par la durée totale de comptage. L'erreur statistique sur cette estimation définie par l'écart type  $\sigma_\nu$  est :

$$\sigma_\nu = \left( -\frac{\partial}{\partial \nu^2} \cdot \ln L \right)_{\nu=\hat{\nu}}^{-0.5} = \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^N x_j}}{\sum_{j=1}^N t_j} \quad (4.51)$$

et l'erreur relative :

$$\frac{\sigma_\nu}{\hat{\nu}} = \left( -\frac{\partial}{\partial \nu^2} \ln L \right)_{\nu=\hat{\nu}}^{-0.5} = \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^N x_j}}{\sum_{j=1}^N t_j} \cdot \frac{\sum_{j=1}^N t_j}{\sum_{j=1}^N x_j} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^N x_j}} \quad (4.52)$$

**Il est important de remarquer que la précision de la mesure ne dépend que du nombre total de coups comptés**, qu'elle est d'autant meilleure que ce nombre est grand et **que plusieurs mesures de durée  $t_j$  ne donnent pas un résultat plus précis qu'une seule mesure de même durée totale  $\sum_j t_j$ .**

Ainsi, pour estimer un taux de comptage, il suffit d'effectuer une seule mesure, suffisamment longue pour que le nombre de coups comptés  $x$  soit grand ( $x > 100$ ).

L'erreur relative standard sur l'estimation du nombre de coups comptés  $\hat{x} = x$  peut alors être estimée par  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  et l'erreur standard absolue par  $\sigma_x = \sqrt{x}$ .

Dans le cas d'une variable aléatoire gaussienne, on montre, en appliquant le principe du maximum de vraisemblance, que la meilleure estimation de la moyenne de la distribution est la moyenne de l'échantillon et que la meilleure estimation de la variance est la variance de l'échantillon :

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{m})^2 \quad (4.53)$$

où les  $x_i$  sont les différents résultats de mesures et  $\hat{m}$  la valeur estimée de la moyenne.

#### 4.4.4 Problème : mesure d'une source radioactive en présence d'un bruit de fond

Les résultats de comptage  $x_1$  et  $x_2$  du système source-bruit d'une part, et bruit d'autre part, de durées  $\tau_1$  et  $\tau_2$ , tous deux poissonniens, permettent d'estimer les valeurs des taux de comptage

$$\begin{aligned}\widehat{\nu_{S+B}} &= \frac{x_1}{\tau_1} & ; & \quad \hat{\sigma}_{\widehat{\nu_{S+B}}} = \frac{x_1}{\tau_1} = \sqrt{\frac{x_1}{(\tau_1)^2}} \\ \widehat{\nu_B} &= \frac{x_2}{\tau_2} & ; & \quad \hat{\sigma}_{\widehat{\nu_B}} = \frac{x_2}{\tau_2} = \sqrt{\frac{x_2}{(\tau_2)^2}}\end{aligned}$$

Les taux de comptage estimés  $\hat{\nu_B}$  et  $\hat{\nu_{S+B}}$  étant des variables aléatoires sensiblement gaussiennes, leur différence  $\hat{\nu_S} = \hat{\nu_{S+B}} - \hat{\nu_B}$ , correspondant au taux de comptage dû à la source seule, est aussi gaussienne, de variance

$$\sigma_{\hat{\nu_S}}^2 = \sigma_{\widehat{\nu_{S+B}}}^2 + \sigma_{\widehat{\nu_B}}^2 \quad (4.54)$$

#### 4.4.5 Méthode des moindres carrés

Dans le cas où la loi de probabilité de l'échantillon est gaussienne, ce qui est en général vrai lorsque  $f(x_i, b)$  représente l'écart entre valeurs théoriques et expérimentales, la fonction de vraisemblance et son logarithme se ramènent à :

$$\begin{aligned}L &= \prod_{i=1}^N e^{-\frac{(x_i - m_i(b))^2}{2\sigma_i^2}} \\ \ln(L) &+ \sum_{i=1}^N -\frac{(x_i - m_i(b))^2}{2\sigma_i^2}\end{aligned} \quad (4.55)$$

avec :  $x_i$  : valeurs observées

$m_i$  : valeurs théoriques, dépendantes du paramètre  $b$ , que l'on suppose être l'espérance mathématique des  $x_i$

$\sigma_i$  : erreurs que nous allons préciser par la suite

L'ajustement le meilleur est obtenu en recherchant le maximum de  $\ln(L)$  ou, ce qui revient au même, en recherchant le minimum de l'expression

$$S^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(x_i - m_i(b))^2}{2\sigma_i^2} \quad (4.56)$$



C'est la méthode dite des moindres carrés.

La condition  $\frac{dS^2}{db} = 0$  donne l'estimation  $\hat{b}$  de  $b$ .

Si les  $x_i$  sont des variables aléatoires gaussiennes et les  $m_i$  les valeurs théoriques correspondantes à l'espérance mathématique des  $x_i$ , la fonction  $S_{min}^2$  correspondant à  $\hat{b}$  est une somme de carrés de variables normales et, par conséquent, suit une loi de distribution de  $\chi^2$  à  $\nu = N - 1$  degrés de liberté. Si nous avons  $k$  paramètres indépendants, nous aurons  $k$  conditions  $\frac{dS^2}{db_j}$  et  $S_{min}^2$  suit une loi de distribution de  $\chi^2$  à  $\nu = N - k$  degrés de liberté.

Le nombre  $\nu$  de degrés de liberté de la fonction de  $\chi^2$  que suit la fonction  $S_{min}^2$  est égale au nombre de variables aléatoires indépendantes moins le nombre de paramètres inconnus (que l'on veut estimer) indépendants

$$\nu = N - C - k \quad (4.57)$$

avec  $N$  : nombre de variables aléatoires (mesures)

$C$  : nombre de liaisons algébriques entre ces variables

$k$  : nombre de paramètres inconnus indépendants.

On peut donner une "image géométrique" de cette propriété :  $S^2$  représente le carré de la "distance", mesurée selon une métrique donnée par la loi de probabilité, entre le point  $P(x_1, x_2, \dots, x_N)$  et le point  $M(m_1, m_2, \dots, m_N)$  ; si les  $(m_1, m_2, \dots, m_N)$  dépendent d'un paramètre  $b$ , le lieu des points  $M$  est une "surface" de dimension  $(N - 1)$  et le carré de la plus courte distance de  $P$  à cette "surface" suit une distribution de  $\chi^2$  à  $\nu = N - 1$  degrés de liberté. La généralisation au cas où nous avons  $C$  liaisons entre les variables et  $k$  paramètres indépendants est immédiate.

Discussion sur les erreurs  $\sigma_i$  :

Deux exemples extrêmes montrent que **les erreurs  $\sigma_i$  doivent être les erreurs sur les prédictions théoriques** :

- supposons que  $x^{\text{obs}} = 1 \pm 1$  et que  $m^{\text{th}} = 0 \pm 0$ , visiblement la théorie est incapable de prédire l'expérience : cela doit se refléter dans le fait que  $S^2$  est très grand.
- supposons que  $x^{\text{obs}} = 0 \pm 0$  et que  $m^{\text{th}} = 1 \pm 1$ , nous ne serons pas surpris du résultat de la mesure : dans ce cas,  $S^2$  prend une valeur qui montre qu'il n'y a pas de désaccord entre théorie et expérience.

Cependant, dans la pratique, on admet de prendre les erreurs expérimentales comme erreurs  $\sigma_i$  intervenant dans l'expression de  $S^2$  ; deux excuses à cela :

- dans le processus de minimisation de  $S^2$ , il est parfois mal commode d'avoir une erreur qui dépende de l'expression de  $m(b)$ , c'est à dire du paramètre à ajuster lui-même,
- l'utilisation des erreurs expérimentales permettent de pondérer les points expérimentaux par leur précision.

#### 4.4.6 Un exemple d'estimation paramétrique : détermination des paramètres d'une droite (droite de régression)

Soit :  $y_1, y_2, \dots, y_N$  les résultats de  $N$  mesures indépendantes effectuées aux points  $x_1, x_2, \dots, x_N$  de variables aléatoires gaussiennes  $Y_i$  d'espérance  $E(Y_i) = a + bx_i$ . On se propose de déterminer les paramètres  $a$  et  $b$ .

L'application de la méthode du maximum de vraisemblance où

$$L = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-\frac{(y_i - E(Y_i))^2}{2\sigma_i^2}} \quad (4.58)$$

conduit à rendre minimum la somme des carrés

$$Q = \sum_{i=1}^N N \frac{(y_i - E(Y_i))^2}{\sigma_i^2} = \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - (a + bx_i))^2}{\sigma_i^2} \quad (4.59)$$

c'est à dire, à faire passer au mieux la droite  $E(Y) = a + bx$  par les points expérimentaux soumis à des erreurs.

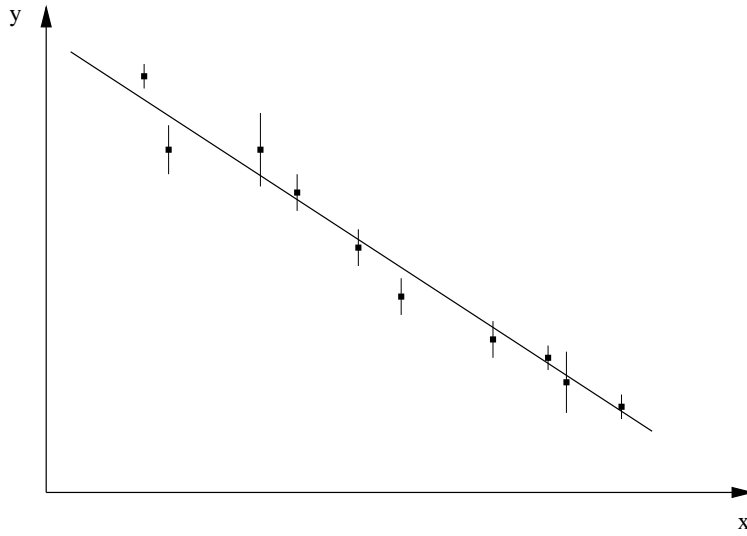


FIG. 4.6 – Régression linéaire

Un calcul relativement simple donne les estimateurs  $\hat{a}$  et  $\hat{b}$  des paramètres ainsi que leur variance  $\sigma_a^2$  et  $\sigma_b^2$

$$\hat{a} = \frac{1}{\Delta} \left( \sum_i \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \sum_i \frac{y_i}{\sigma_i^2} - \sum_i \frac{x_i}{\sigma_i^2} \sum_i \frac{y_i x_i}{\sigma_i^2} \right) \quad (4.60)$$

$$\hat{b} = \frac{1}{\Delta} \left( \sum_i \frac{1}{\sigma_i^2} \sum_i \frac{y_i x_i}{\sigma_i^2} - \sum_i \frac{x_i}{\sigma_i^2} \sum_i \frac{y_i}{\sigma_i^2} \right) \quad (4.61)$$

$$\sigma_a^2 = \frac{1}{\Delta} \sum_i \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \quad , \quad \sigma_b^2 = \frac{1}{\Delta} \sum_i \frac{1}{\sigma_i^2} \quad (4.62)$$

$$\Delta = \sum_i \frac{1}{\sigma_i^2} \sum_i \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - \left( \sum_i \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2 \quad (4.63)$$

Lorsque les erreurs sur les  $y_i$  ne sont pas connues, on peut en donner une estimation globale par :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-2} \left( \sum_i (y_i^2 - \hat{a}y_i - \hat{b}x_iy_i) \right) \quad (4.64)$$

les estimateurs  $\hat{a}$  et  $\hat{b}$  sont alors :

$$\hat{a} = \frac{1}{N \sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2} \left( \sum_i x_i^2 \sum_i y_i - \sum_i x_i \sum_i x_i y_i \right) \quad (4.65)$$

$$\hat{b} = \frac{1}{N \sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2} \left( N \sum_i x_i y_i - \sum_i x_i \sum_i y_i \right) \quad (4.66)$$

$$\sigma_a^2 = \hat{\sigma}^2 \frac{\sum_i x_i^2}{N \sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2} \quad , \quad \sigma_b^2 = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_i x_i^2 - \frac{(\sum_i x_i)^2}{N}} \quad (4.67)$$

On remarquera que l'ajustement d'une courbe exponentielle  $y = a e^{bx}$  à des points expérimentaux se ramène au problème précédent puisque  $\ln y = \ln a + bx$ .

## 4.5 Test d'hypothèse

Le problème que nous abordons maintenant est différent de celui de l'ajustement paramétrique ; c'est celui de savoir si l'hypothèse que nous avons faite sur la distribution des valeurs théoriques est juste ou non, au vu des résultats expérimentaux obtenus.

Dans certains cas, les valeurs de certains paramètres constituent en elles-mêmes l'hypothèse à tester. On fait alors un ajustement paramétrique et, à partir des valeurs obtenues des paramètres et de leurs erreurs, on peut tester la compatibilité des valeurs théoriques et des résultats par la méthode

exposée au paragraphe 4.2.4. On accepte ou rejette l'hypothèse si les valeurs théoriques sont en dedans ou au dehors d'un intervalle de confiance choisi à l'avance.

Les distributions, quant à elles, peuvent être testées par la méthode dite du  $\chi^2$ . Comme nous l'avons mentionné au paragraphe 4.4.5, si le nombre  $x_i$  d'événements observés dans une classe  $i$  de la distribution suit une loi de Gauss dont la moyenne est  $m_i$  et la variance  $\sigma_i$ , la somme

$$S^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(x_i - m_i)^2}{\sigma_i^2} \quad (4.68)$$

est distribuée selon une loi de  $\chi^2$  à  $\nu$  degrés de liberté.

On remarquera que la somme  $S^2$  mesure l'écart entre la distribution des événements observés  $x_i$  et la distribution théorique à tester ; l'hypothèse que l'on fait est que cette dernière fournit effectivement les valeurs moyennes des classes  $i$  la distribution expérimentale. Si cette hypothèse est vraie, la somme  $S^2$  suit une loi de distribution de  $\chi^2$ .

Pour effectuer le test, on calcule la valeur de  $S^2$  correspondant à l'échantillon mesuré ; soit  $\chi_o^2$  la valeur obtenue. La probabilité pour que, avec les hypothèses de départ sur la distribution à tester, le résultat de l'expérience soit ce qu'il est ou pire, est :

$$\text{Prob}(\chi^2 > \chi_o^2) = \int_{\chi_o^2}^{\infty} p_v(\chi^2) d\chi^2 \quad (4.69)$$

On choisit un "seuil de probabilité"  $\alpha$ , par exemple  $\alpha=5\%$ , tel que, si l'hypothèse est vraie, la probabilité pour que  $\chi^2 > \chi_\alpha^2$  est égale à  $\alpha$ .

$$\text{Prob}(\chi^2 > \chi_\alpha^2) = \alpha = \int_{\chi_\alpha^2}^{\infty} p_v(\chi^2) d\chi^2 \quad (4.70)$$

La décision d'accepter ou de rejeter l'hypothèse se prend de la manière suivante :

- on calculera  $\chi_o^2$  et on recherchera le nombre de degrés de liberté  $\nu = N - C - k$ ,
- ayant choisi une valeur  $\chi_\alpha^2$  correspondante à une valeur de  $\alpha$  (en général, on prendra 5%), on compare  $\chi_o^2$  à  $\chi_\alpha^2$
- si  $\chi_o^2$  est inférieur à  $\chi_\alpha^2$ , on accepte l'hypothèse ; **le test ne nous renseigne cependant pas sur le risque d'accepter un hypothèse fausse ;**

- si  $\chi_o^2$  est supérieur à  $\chi_\alpha^2$ , on peut rejeter l'hypothèse en sachant que l'on a  $\alpha$  chance de rejeter une hypothèse juste.

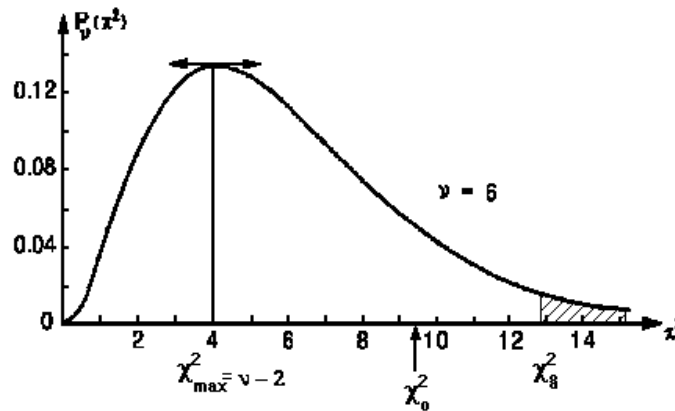


FIG. 4.7 – Zone de réjection pour le test de l'hypothèse du  $\chi^2$

Remarque : Obtenir un  $\chi_o^2 \leq \nu$  montre certainement un accord satisfaisant entre les distributions expérimentale et à tester. Il faut cependant noter qu'un  $\chi^2$  trop petit ne correspond pas forcément à une bonne adéquation entre les distributions, puisque  $E(\chi^2) = \nu$  et que la densité maximale de probabilité est atteinte pour  $\chi^2 = \nu - 2$  : si le  $\chi^2$  obtenu est trop petit, les  $\sigma_i$  ont peut-être été sur-estimés. La loi de  $\chi^2$  est tabulée (voir Annexes A) en fonction du nombre de degrés de liberté  $\nu$ .

# Chapitre 5

## Les sources radioactives utilisées au laboratoire

### 5.1 Avertissement

Les rayonnements atomiques et nucléaires présentent un danger pour les êtres vivants. Il importe donc d'être prudent dans toutes les manipulations mettant en jeu des corps radioactifs. On peut distinguer deux sortes d'irradiation du corps humain : l'irradiation externe et **l'irradiation interne qui est particulièrement dangereuse.**

On observera les **règles élémentaires suivantes** :

1. Eviter d'entrer en contact avec les produits radioactifs.
2. Ne pas fumer, boire ou manger dans les locaux réservés à la préparation et la manipulation des produits radioactifs.
3. Connaître le niveau de radioactivité aux places de travail, le réduire autant que possible par l'effet de la distance, par des écrans, limiter la durée d'exposition.

Il faut remarquer ici que les sources utilisées au laboratoire sont scellées ou contenues dans des montages suffisamment étanches. Dans la plupart des cas, elles sont d'intensité très faible ( $<1$  mCi).

## 5.2 Dose absorbée admise pour un être humain

La dose de rayonnement absorbée **admise** (irradiation globale du corps) est de 50 mSievert/année c.à.d. 5 rem/année (rem : "roentgen equivalent man") ce qui correspond à 0.025 mSv/heure (2.5 mrem/heure) de travail (voir également "Notions de radioprotection" en Annexes C).

Le flux de particules (flux de référence FR) correspondant à cette dose de référence (DR) de 2.5 mrem/h est le suivant :

Rayonnement	Flux de référence	Domaine d'énergie
$\beta$	$15 \beta \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$	1 MeV
$\alpha$	$0.003 \alpha \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$	5 MeV
X et $\gamma$	$\frac{1400}{E[\text{MeV}]} \cdot \frac{\gamma}{\text{cm}^2 \cdot \text{sec}}$	$0.1 \text{ MeV} < E < 3 \text{ MeV}$

**Exemple :** quelle est la dose absorbée à 1 m de distance d'une source de  $^{60}\text{Co}$  dont l'activité A est de 1 mCi (1Ci =  $3.7 \cdot 10^{10}$  désintégrations/s) ?  
E = 2.5 MeV (il y a 2  $\gamma$ , l'un de 1.17 et l'autre de 1.33 MeV)

$$\text{Flux de référence : } F_R = \frac{1400}{2.5} = 560 \frac{\gamma}{\text{cm}^2\text{s}}$$

$$\text{Flux à 100 cm : } F = \frac{A}{4\pi R^2} = \frac{10^{-3} \cdot 3.7 \cdot 10^{10}}{4\pi 100^2} = 294 \frac{\gamma}{\text{cm}^2\text{s}}$$

$$\text{Dose : } D = \frac{D_R \cdot F}{F_R} = 1.3 \text{ mrem/h} = 0.013 \text{ mSv/h}$$

## 5.3 Schéma de désintégration

1. Pour des raisons historiques, **l'intensité des sources radioactives** est souvent exprimée en Curie (symbole Ci). Une source d'activité de 1 Ci présente autant de désintégrations que 1 gramme de Radium ; comme le  $^{226}\text{Ra}$  a une période de 1620 années, sa constante  $\lambda$  de désintégration est :

$$\lambda = \frac{\ln 2}{1620 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600} = 1.3610^{11} \text{ s}^{-1} \quad (5.1)$$

et le nombre total de désintégrations des noyaux de  $^{226}\text{Ra}$  par seconde et pour une source de 1 gramme est de :

$$-\frac{dN}{dt} = \frac{6.0225 \cdot 10^{23}}{226} \cdot 1.3610^{11} = 3.6510^{10} \text{ s}^{-1} \quad (5.2)$$



Une activité de 1 Ci d'une source radioactive correspond ainsi à  $3.7 \cdot 10^{10}$  désintégrations des "noyaux pères" : les désintégrations en cascades qui s'en suivent ne sont donc pas considérées. Une nouvelle unité est de plus en plus souvent employée : le **Becquerel** (symbole Bq) qui correspond à une désintégration par seconde. Ainsi :

$$1\text{Ci} = 37 \text{ GBq}$$

$$1\text{mCi} = 37 \text{ MBq}$$

2. Sur un schéma de désintégration, on trouve en général les renseignements suivants :

- Les différents modes de désintégration possibles ( $\alpha, \beta^+, \beta^-,$  capture électronique EC, transition  $\gamma$  électromagnétique) figurés symboliquement.
- Les niveaux par lesquels on passe avec leurs caractéristiques :
  - énergie d'excitation,
  - période  $t_{1/2}$ , temps nécessaire pour que l'activité d'un échantillon soit réduite de moitié,
  - moment angulaire et parité du niveau.
- Pour les transitions  $\gamma$  on donne en général le type de la transition (magnétique M ou électrique E) ainsi que la multipolarité.
- Si plusieurs voies sont possibles, on donne les facteurs d'embranchement (importances relatives des différentes voies exprimées en %).
- Pour les désintégrations  $\beta^+, \beta^-,$  EC et  $\alpha$ , on donne en général la valeur de  $Q$  correspondante. La valeur  $Q$  d'une transformation nucléaire est définie comme la différence de masse entre le système initial et le système final. **Dans une désintégration, elle est égale à la somme de l'énergie cinétique de la particule émise, de l'énergie de recul du noyau et de l'énergie des raies  $\gamma$  amenant ce noyau à l'état fondamental.**

Dans une désintégration  $\beta^\pm$ , l'énergie de recul du noyau est négligeable et le neutrino émis est sans masse :

$Q_b$  = énergie du  $\beta$  + énergie du  $\gamma$  (s'il y a un  $\gamma$  émis par la suite).  
 Comparons les valeurs de  $Q$  des désintégrations concurrentielles  $\beta^+$  et capture électronique EC conduisant au même noyau final :

$$\begin{aligned} \beta^+ : {}^A_Z A &\rightarrow {}^A_{Z-1} A + e^+ + \nu \\ Q_{\beta^+} &= m({}^A_Z A) - ({}^A_{Z-1} A) - m_{e^+} \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$EC : {}^A_Z A + e^- \rightarrow {}^A_{Z-1} A + \nu$$

$$Q_{EC} = m({}^A_Z A) + m_{e^-} - m({}^A_{Z-1} A) \quad (5.4)$$

On voit donc que  $Q_{EC} = Q_{\beta^+} + 2m_e = Q_{\beta^+} + 1.02MeV$

3. Lors des transitions électromagnétiques, deux phénomènes sont souvent en compétition :

- l'émission  $\gamma$ . On donne souvent le taux de transitions  $\gamma$  non convertis pour 100 désintégrations du noyau père (  $\gamma\%$  )
- la conversion interne : l'énergie d'excitation nucléaire est transmise directement à un électron, le plus souvent des couches  $K$  ou  $L$  proches du noyau. L'énergie de l'électron émis est égal à l'énergie du  $\gamma$  moins son énergie de liaison. On donne en général le rapport :

$\frac{e_K}{\gamma}$  = rapport du nombre de transitions par conversion au nombre de transitions  $\gamma$  non convertis

et le rapport

$\frac{K}{L}$  = rapport du nombre de conversions internes sur la couche  $K$  à celui sur la couche  $L$

4. Après une conversion interne ou une capture électronique, il y a réarrangement des couches atomiques du noyau fils : un ou plusieurs photons X sont alors émis.

Les transitions permises par les règles de sélection sont les suivantes : (transitions interdites :  $L_I \rightarrow K, M_I \rightarrow K, N_I \rightarrow K$ )

Raie	Transition	Energie	Ex. du Ba [keV]	Ex. du Pb [keV]	Ex. de l'Iode [keV]
$K_{\alpha_2}$	$L_{II} \rightarrow K$	$E_K - E_{L_{II}}$	31.803	72.805	28.318
$K_{\alpha_1}$	$L_{III} \rightarrow K$	$E_K - E_{L_{III}}$	32.182	74.970	28.616
$K_{\beta_2}$	$M_{II} \rightarrow K$	$E_K - E_{M_{II}}$	36.289	84.451	32.239
$K_{\beta_1}$	$M_{III} \rightarrow K$	$E_K - E_{M_{III}}$	36.364	84.938	32.295
etc					

L'énergie du photon X peut être calculé à partir des énergies de liaison  $E_K, E_{L_{II}}$ , etc... des électrons atomiques données dans la table IV.1).

La raie la plus probable est la raie  $K_{\alpha_1}$ . L'intensité de la raie  $K_{\alpha_2}$  est environ 50 % de celle de la raie  $K_{\alpha_1}$  et l'intensité de la raie  $K_{\beta_1}$  inférieure à 10% de celle de la raie  $K_{\alpha_1}$ .

Une source radioactive peut donc émettre les particules suivantes :

- $\alpha$ ,  $\beta^+$ ,  $\beta^-$ , électrons de conversion, X de réarrangement
- paires  $\gamma$  de 0.511 MeV chacun provenant de l'annihilation des  $\beta^+$  avec des électrons
- des électrons Auger par conversion des X de réarrangement.

## 5.4 Isotopes généralement utilisés comme source de $\gamma$

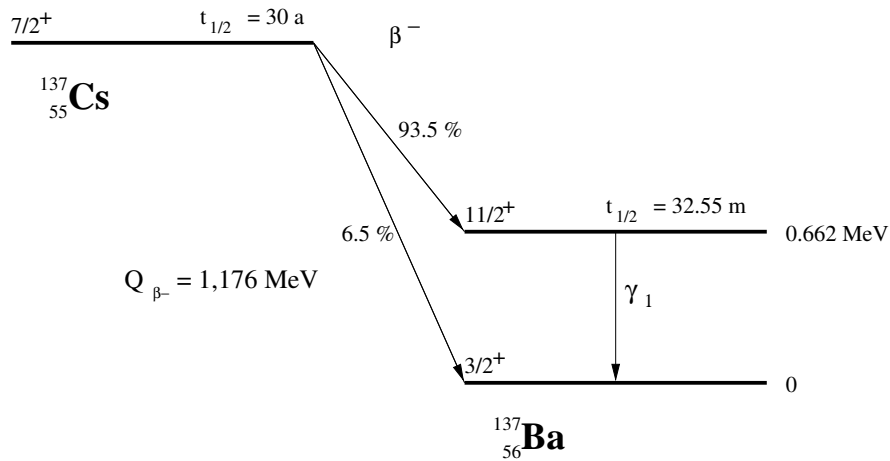


FIG. 5.1 – Césium 137

$\beta^-$  :  $\beta_1$  : 1.176 MeV (6.5%)  
 $\beta_2$  : 0.514 MeV (93.5%)  
 $\gamma$  :  $\gamma_1$  : 0.662 MeV  
 $e/\gamma$  : 0.11,  $K/L/M$  : 56/10/2.2  
 $K_\alpha$  :  $E_{K_{\alpha_1}}$  : 32.1 KeV

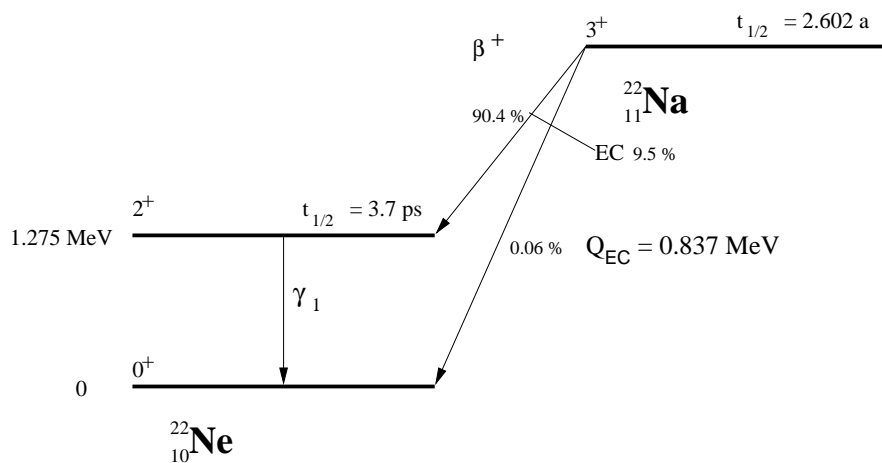


FIG. 5.2 – Sodium 22

$$\begin{aligned}
 \beta^- : \beta_1 : 0.545 \text{ MeV (90.4\%)} \\
 \beta_2 : 1.83 \text{ MeV (0.06\%)} \\
 \gamma : \gamma_1 : 1.2746 \text{ MeV} \\
 e/\gamma : 6.7 \cdot 10^{-6}
 \end{aligned}$$

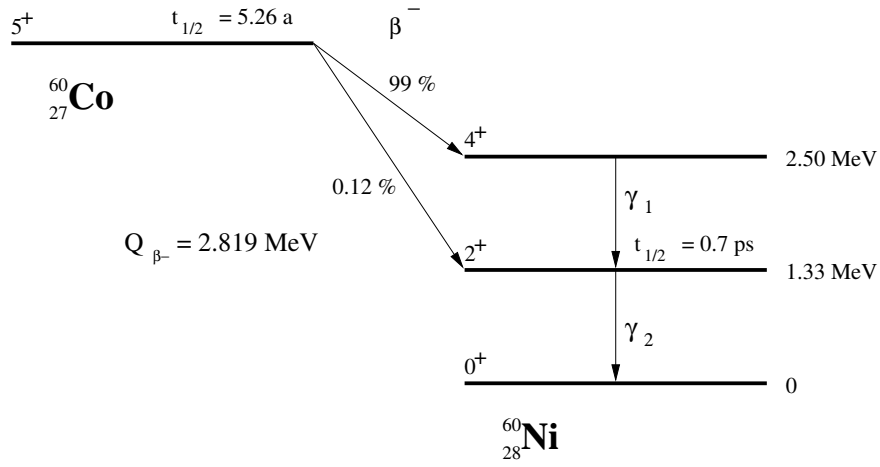


FIG. 5.3 – Cobalt 60

$\beta^-$  :  $\beta_1$  : 1.48 MeV (0.12%)  
 $\beta_2$  : 0.314 MeV (99%)  
 $\gamma$  :  $\gamma_1$  : 1.173 MeV  
 $\gamma_2$  : 1.332 MeV  
 $e/\gamma$  : 0.004 pour l'ensemble des deux raies  $\gamma$

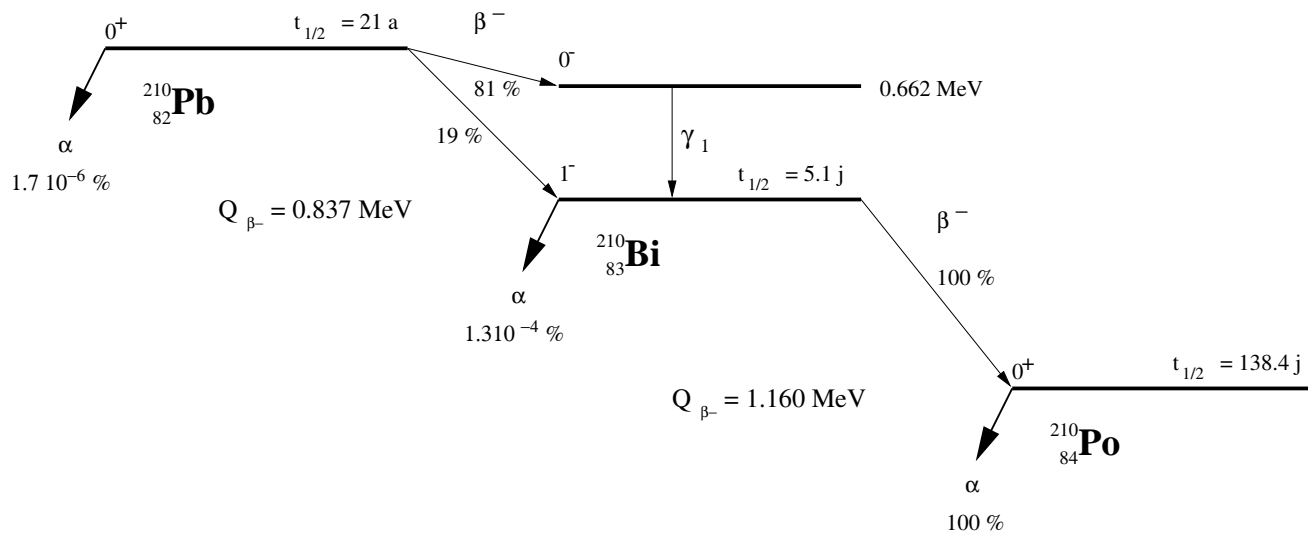


FIG. 5.4 – Plomb 210

$\gamma$  :  $\gamma_1$  : 0.0465 MeV  
 $e_L/\gamma$  : 16,  $L_I/L_{II}/L_{III}$  : 100/10.6/0.93

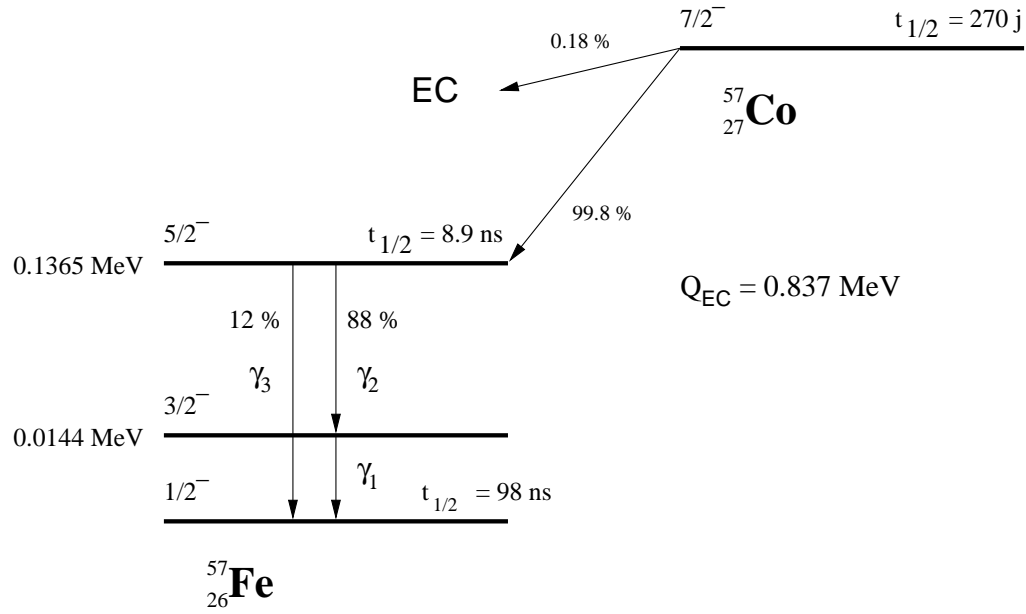


FIG. 5.5 – Cobalt 57

EC : EC(L)/EC(K) : 0.10

$\gamma$  :  $\gamma_1$  : 0.0144 MeV, ( $\gamma$  8.4%),  $e/\gamma=9.0$ ,  $K/L_I/L_{II+III}$  : 110/10/0.9

$\gamma_2$  : 0.1219 MeV, ( $\gamma$  86%)

$\gamma_3$  : 0.1363 MeV, ( $\gamma$  11%)

$K_\alpha$  :  $E_{K_\alpha}(\text{Fe}) = 6.40 \text{ keV}$

### 5.5 Isotope utilisé comme source de $\beta^-$

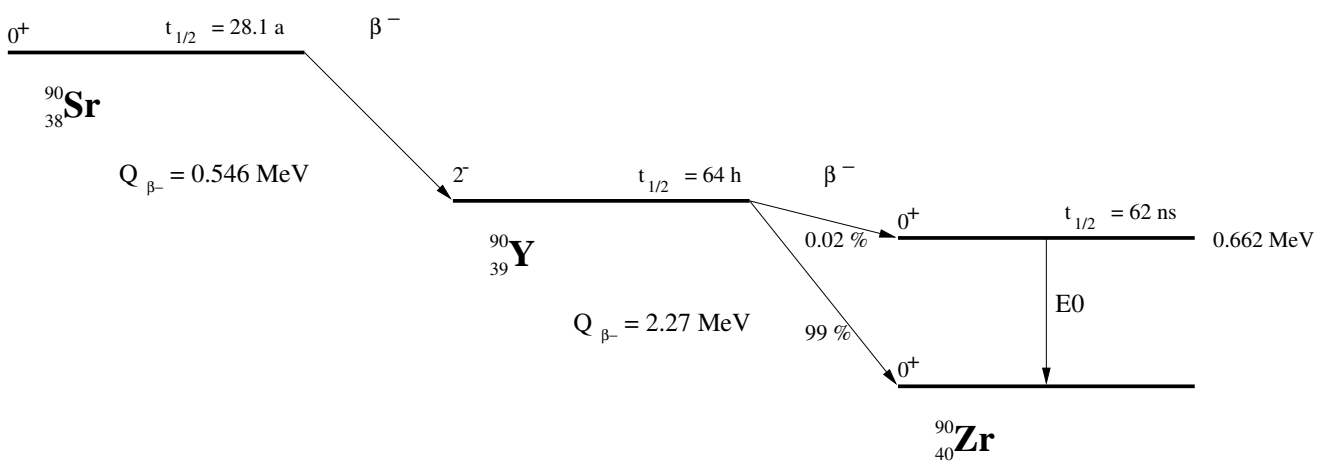


FIG. 5.6 – Strontium 90



## 5.6 Isotopes utilisés comme sources de particules $\alpha$

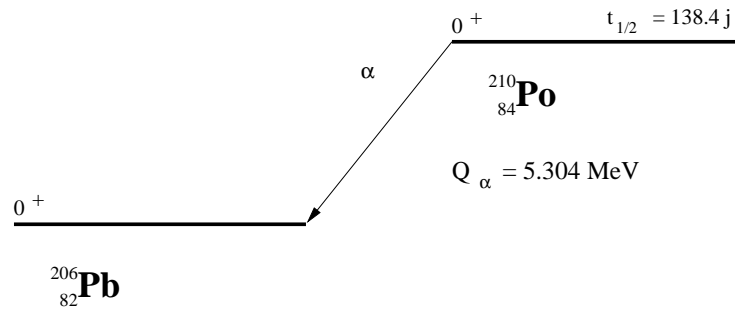


FIG. 5.7 – Polonium 210

$\alpha : \alpha_1 : 5.304 \text{ MeV (100\%)}$

On part en fait du  $^{210}\text{Pb}$  (voir figure 5.4) qui a une période beaucoup plus longue (21 années) et qui donne du  $^{210}\text{Po}$  à la suite de deux désintégrations  $\beta^-$ .

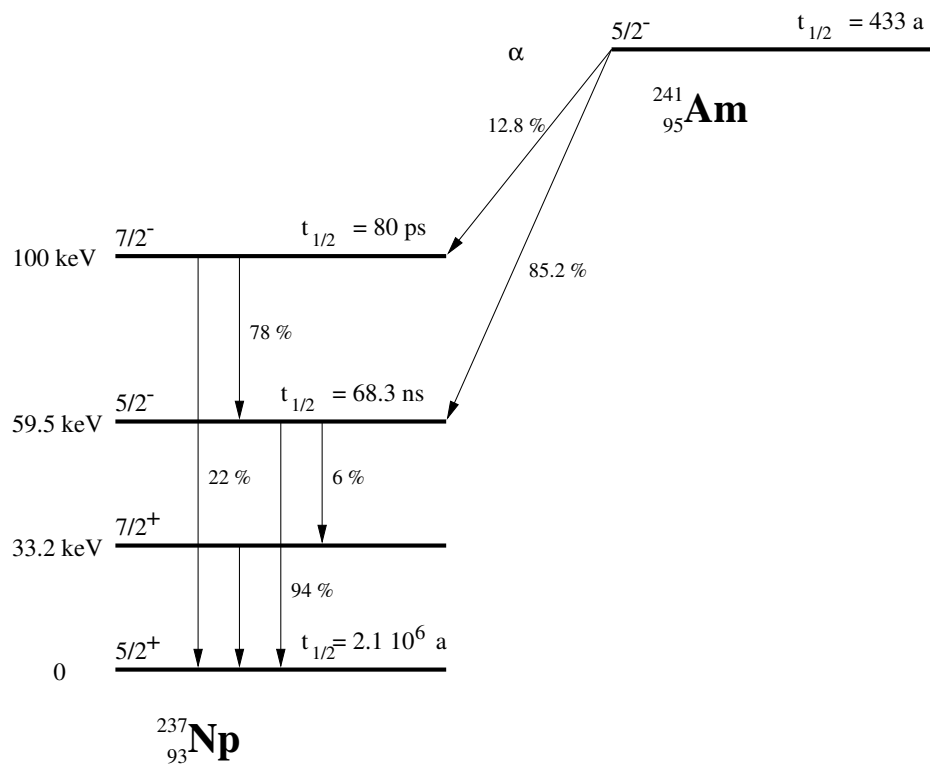


FIG. 5.8 – Américium 241

- $\alpha$  :  $\alpha_1$  : 5.486 MeV (86%)  
 $\alpha_2$  : 5.443 MeV (12.7%)  
 $\gamma$  :  $\gamma_1$  : 0.0263 MeV, ( $\gamma$  2.5%)  
 $\gamma_2$  : 0.0332 MeV  
 $\gamma_3$  : 0.0435 MeV, ( $\gamma$  0.07%)  
 $\gamma_4$  : 0.0595 MeV, ( $\gamma$  36%), ( $\gamma_1/\gamma_2/\gamma_3/\gamma_4$  : 3.0/0.2/0.22/36.0)  
cette transition  $\gamma_4$  est fortement convertie, la conversion se fait  
par les électrons de la couche  $L$  ( $L_I/L_{II}/L_{III}$  : 53/100/30)  
 $\gamma_3$  : 0.1030 MeV, ( $\gamma$  0.019%)



### 5.7 Energie de liaison des $e^-$ atomiques

	$1s_{1/2}$	$2s_{1/2}$	$2p_{1/2}$	$2p_{3/2}$	$3s_{1/2}$	$3p_{1/2}$	$3p_{3/2}$	$3d_{3/2}$	$3d_{5/2}$	$4s_{1/2}$	$4p_{1/2}$	$4p_{3/2}$	$4d_{3/2}$	$4d_{5/2}$	$4f_{5/2}$	$4f_{7/2}$	$5s_{1/2}$	$5p_{1/2}$	$5p_{3/2}$	$5d_{3/2}$	$5d_{5/2}$	$6s_{1/2}$	$6p_{1/2}$	$6p_{3/2}$
E1	K	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$	$M_5$	$N_1$	$N_2$	$N_3$	$N_4$	$N_5$	$N_6$	$N_7$	$O_1$	$O_2$	$O_3$	$O_4$	$O_5$	$P_1$	$P_2$	$P_3$
1 H	0.014																							
2 He	0.0246																							
3 Li	0.0548	0.001																						
4 Be	0.1117	0.003																						
5 B	0.191	e	e																					
6 C	0.2847	e	e																					
7 N	0.4099	e	e																					
8 O	0.5431	e	e																					
9 F	0.6967	e	e																					
10 Ne	0.8704	0.0485	0.0217	0.0216																				
11 Na	1.0717	0.0634	0.0306	0.0303	0.001																			
12 Mg	1.3030	0.0886	0.0495	0.0492	e																			
13 Al	1.5582	0.1180	0.0731	0.0727	e	e																		
14 Si	1.839	0.149	0.100	0.099	e	e																		
15 P	2.149	0.189	0.136	0.135	e	e																		
16 S	2.472	0.229	0.165	0.164	e	e																		
17 Cl	2.823	0.270	0.202	0.200	e																			
18 Ar	3.2059	0.3263	0.2506	0.2486	0.0292	0.0158																		
19 K	3.6084	0.3786	0.2973	0.2946	0.0348	0.0183																		
20 Ca	4.0385	0.438	0.3504	0.3468	0.044	0.0248																		
21 Sc	4.4895	0.4980	0.4036	0.3987	0.0511	0.0283		0.0008																
22 Ti	4.9658	0.5614	0.4610	0.4549	0.0584	0.0326		0.0008																
23 V	5.4657	0.6272	0.5211	0.5134	0.0663	0.0372		0.0007																
24 Cr	5.9908	0.6978	0.5853	0.5760	0.0752	0.0431		0.0020																
25 Mn	6.5382	0.769	0.6506	0.6394	0.0824	0.0473		0.0011																
26 Fe	7.1114	0.848	0.7207	0.7076	0.0916	0.0530		0.0008																
27 Co	7.7114	0.9266	0.7962	0.7810	0.1014	0.0594		0.0004																
28 Ni	8.3324	1.0103	0.8715	0.8542	0.1109	0.0666		0.0006																
29 Cu	8.9805	1.099	0.9526	0.9328	0.1225	0.0772	0.0751	0.0028																
30 Zn	9.6608	1.1962	1.0451	1.0220	0.1399	0.0913	0.0887	0.0102																
31 Ga	10.367	1.298	1.143	1.117	0.158	0.107	0.103	0.018																
32 Ge	11.104	1.413	1.249	1.217	0.181	0.129	0.122	0.029																
33 As	11.867	1.527	1.359	1.323	0.204	0.147	0.141	0.042																
34 Se	12.658	1.654	1.476	1.436	0.231	0.167	0.162	0.056																
35 Br	13.474	1.782	1.596	1.550	0.257	0.189	0.182	0.070	0.069															
36 Kr	14.326	1.925	1.731	1.678	0.293	0.222	0.214	0.095	0.094	0.027	0.014													
37 Rb	15.200	2.065	1.865	1.805	0.321	0.248	0.239	0.112	0.111	0.029	0.014													
38 Sr	16.105	2.216	2.007	1.940	0.358	0.280	0.269	0.135	0.133	0.038	0.020													
39 Y	17.039	2.373	2.155	2.080	0.395	0.313	0.301	0.160	0.158	0.046	0.026													
40 Zr	18.000	2.534	2.309	2.225	0.433	0.347	0.333	0.185	0.182	0.054	0.031													
41 Nb	18.983	2.695	2.462	2.368	0.466	0.376	0.360	0.205	0.202	0.055		0.031												
42 Mo	20.000	2.866	2.625	2.520	0.505	0.410	0.393	0.230	0.226	0.062	0.035													
43 Tc	21.044	3.042	2.793	2.677	0.544	0.445	0.425	0.257	0.253	0.068*	0.039													
44 Ru	22.117	3.224	2.967	2.838	0.585	0.483	0.461	0.284	0.279	0.075	0.043													
45 Rh	23.220	3.412	3.146	3.004	0.627	0.521	0.496	0.312	0.307	0.081	0.048													
46 Pd	24.350	3.605	3.331	3.174	0.670	0.559	0.531	0.340	0.335	0.086	0.051													
47 Ag	25.514	3.806	3.524	3.352	0.717	0.602	0.573	0.374	0.368	0.095	0.059													
48 Cd	26.711	4.018	3.727	3.538	0.770	0.651	0.617	0.411	0.405	0.108	0.067													
49 In	27.940	4.238	3.938	3.730	0.826	0.702	0.664	0.451	0.444	0.122	0.077													
50 Sn	29.200	4.465	4.156	3.929	0.884	0.757	0.715	0.496	0.485	0.137	0.089		0.025	0.024										
51 Sb	30.491	4.699	4.381	4.132	0.944	0.812	0.766	0.537	0.528	0.152	0.099	0.033	0.032											

E1	$1s_{1/2}$ K	$2s_{1/2}$ $L_1$	$2p_{1/2}$ $L_2$	$2p_{3/2}$ $L_3$	$3s_{1/2}$ $M_1$	$3p_{1/2}$ $M_2$	$3p_{3/2}$ $M_3$	$3d_{3/2}$ $M_4$	$3d_{5/2}$ $M_5$	$4s_{1/2}$ $N_1$	$4p_{1/2}$ $N_2$	$4p_{3/2}$ $N_3$	$4d_{3/2}$ $N_4$	$4d_{5/2}$ $N_5$	$4f_{5/2}$ $N_6$	$4f_{7/2}$ $N_7$	$5s_{1/2}$ $O_1$	$5p_{1/2}$ $O_2$	$5p_{3/2}$ $O_3$	$5d_{3/2}$ $O_4$	$5d_{5/2}$ $O_5$	$6s_{1/2}$ $P_1$	$6p_{1/2}$ $P_2$	$6p_{3/2}$ $P_3$
52 Te	31.814	4.939	4.612	4.341	1.006	0.870	0.819	0.583	0.573	0.169	0.110	0.042	0.040											
53 I	33.170	5.188	4.852	4.557	1.072	0.931	0.875	0.631	0.620	0.186	0.123	0.050												
54 Xe	34.566	5.453	5.107	4.787	1.149	1.002	0.941	0.689	0.677	0.213	Q 146	0.069	0.068				0.023	0.013	0.012					
55 Cs	35.985	5.713	5.360	5.012	1 217	1.065	0.998	0.740	0.724	0.231	0.162	0.077	0.075				0.023							
56 Ba	37.441	5.987	5.624	5.247	1.293	1.137	1.063	0.796	0.781	0.253	0.180	0.093	0.090				0.040							
57 La	38.925	6.267	5.891	5.483	1.362	1.205	1.124	0.852	0.835	0.271	0.196	0.103					0.036	0.018						
58 Ce	40.444	6.549	6.165	5.724	1.435	1.273	1.186	0.901	0.883	0.289	0.207	0.112	0.108				0.038	0.018						
59 Pr	41.991	6.835	6.441	5.965	1.511	1.338	1.243	0.951	0.931	0.304	0.218	0.118	0.115				0.038	0.023						
60 Nd	43.569	7.126	6.722	6.208	1.576	1.403	1.298	1.000	0.978	0.321	0.230	0.124	0.121				0.038	0.022						
61 Pm	45.185*	7.430	7.015	6.465	1.656	1.478	1.364	1.060	1.034	0.337	0.242	0.133	0.129				0.038*	0.022*						
62 Sm	46.835	7.737	7.312	6.717	1.728	1.546	1.425	1.111	1.085	0.351	0.251	0.137	0.132				0.033	0.026						
63 Eu	48.519	8.052	7 618	6.977	1.805	1.619	1.486	1.166	1.136	0.366	0.261	0.141	0.136				0.037	0.027						
64 Gd	50.239	8.376	7.931	7.243	1.888	1.695	1.551	1.225	1.193	0.383	0.311	0.272	0.147	0.142			0.043	0.028						
65 Tb	51.996	8.708	8.252	7.515	1.970	1.770	1.614	1.278	1.244	0.400	0.322	0.284	0.152	0.148			0.042	0.028						
66 Dy	53.788	9.047	8.581	7.790	2.050	1.845	1.679	1.335	1.298	0.419	0.339	0.297	0.158	0.155			0.066	0.029						
67 Ho	55.618	9.395	8.918	8.071	2.123	1.918	1.736	1.386	1.346	0.431	0.349	0.309	0.164	0.161			0.051	0.020						
68 Er	57.486	9.752	9.265	8.358	2.211	2.010	1.816	1.457	1.413	0.453	0.366	0.320	0.172	0.169			0.064	0.033						
69 Tm	59.390	10.116	9.617	8.648	2.305	2.088	1.883	1.513	1.466	0.470	0.382	0.333	0.180	0.176			0.051	0.030						
70 Yb	61.332	10.487	9.978	8.943	2.397	2.172	1.949	1.576	1.527	0.487	0.399	0.346	0.189	0.185			0.053	0.023						
71 Lu	63.314	10.870	10.349	9.244	2.491	2.264	2.024	1.640	1.589	0.507	0.412	0.359	0.206	0.196	0.007		0.057	0.028						
72 Hf	65.351	11.272	10.739	9.561	2.601	2.365	2.108	1.716	1.662	0.538	0.437	0.380	0.224	0.214	0.019	0.017	0.065	0.038	0.031					
73 Ta	67.413	11.680	11.136	9.881	2.705	2.466	2.191	1.790	1.732	0.563	0.462	0.402	0.239	0.227	0.025	0.023	0.068	0.042	0.034					
74 W	69.523	12.099	11.542	10.205	2.817	2.572	2.278	1.869	1.807	0.592	0.489	0.423	0.255	0.243	0.034	0.032	0.074	0.044	0.034					
75 Re	71.675	12.527	11.957	10.535	2.932	2.682	2.367	1.949	1.883	0.625	0.518	0.445	0.274	0.260	0.043	0.040	0.083	0.046	0.035					
76 Os	73.871	12.968	12.385	10,871	3.049	2.792	2.458	2.031	1.960	0.655	0.547	0.469	0.290	0.273	0.054	0.051	0.084	0.058	0.046					
77 Ir	76.111	13.419	12.824	11.215	3.174	2.909	2.551	2.116	2.041	0.690	0.577	0.495	0.312	0.296	0.064	0.061	0.096	0.063	0.051					
78 Pt	78.395	13.880	13.273	11.564	3.298	3.027	2.646	2.202	2,121	0.724	0.608	0.520	0.332	0.315	0.075	0.071	0.102	0.066	0.052					
79 Au	80.722	14.353	13.733	11.918	3.425	3.150	2.743	2.291	2.206	0.759	0.644	0.546	0.352	0.334	0.088	0.084	0.108	0.072	0.054					
80 Hg	83.103	14.839	14.209	12.284	3.562	3.279	2.847	2.385	2.295	0.800	0.677	0.571	0.379	0.360	0.104	0.100	0.120	0.081	0.058					
81 Tl	85.529	15.347	14.698	12.657	3.704	3.416	2.957	2.485	2.390	0.846	0.722	0.609	0.407	0.386	0.123	0.119	0.137	0.100	0.076	0.015	0.012			
82 Pb	88.005	15.861	15.200	13.035	3.851	3.554	3.066	2.586	2.484	0.894	0.764	0.645	0.434	0.412	0.141	0.136	0.148	0.105	0.086	0.020	0.018			
83 Bi	90.526	16.388	15.709	13.418	3.999	3.696	3.177	2.687	2.580	0.939	0.805	0.679	0.464	0.441	0.162	0.157	0.160	0.117	0.093	0.027	0.025			
84 PO	93.105	16.939	16.244	13.814	4.149	3.854	3.302	2.798	2.683	0.995	0.851	0.705	0.500	0.473	0.184*		0.177*	0.132*	0.104*	0.031				
85 At	95.730	17.493	16.785	14.214	4.317*	4.008	3.426	2.909	2.787	1.042*	0.886	0.740	0.533	0.507	0.210*		0.195*	0.148*	0.115*	0.040*				
86 Rn	98.400	18.049	17.337	14.619	4.482*	4.159	3.538	3.022	2.892	1.097*	0.929	0.768	0.567	0.541*	0.238*		0.214*	0.164*	0.127*	0.048*	0.026*			
87 Fr	101.140	18.639	17.906	15.031	4.652*	4.327*	3.663	3.136	3.000	1.153*	0.980	0.810	0.603	0.577	0.268*		0.234*	0.182*	0.140*	0.058*	0.034*			
88 Ra	103.920	19.237	18.484	15.444	4.822	4.490	3.792	3.248	3.105	1.208*	1.058	0.879	0.636	0.603	0.299		0.254	0.200	0.153	0.068	0.044	0.019		
89 Ac	106.760	19.840	19.083	15.871	5.002	4.656	3.909	3.370	3.219	1.269*	1.080	0.890	0.675	0.639*	0.319*		0.272*	0.215*	0.167*	0.080*				
90 Th	109.650	20.472	19.693	16.300	5.182	4.831	4.046	3.491	3.332	1.330	1.168	0.968	0.714	0.677	0.344	0.335	0.290	0.229	0.182	0.095	0.088	0.060	0.049	0.043
91 Pa	112.600	21.105	20 314	16,733	5.367	5.001	4.174	3.611	3.442	1.387	1.224	1.007	0.743	0.708	0.371	0.360	0.310	0.223	0.195	0.105	0.096	0.071	0.043	0.033
92 U	115.610	21.758	20.948	17.168	5.548	5.181	4.304	3.728	3.552	1.442	1.273	1.045	0.780	0.738	0.392	0.381	0.324	0.260	0.206	0.109	0.101			
93 Np	118.680	22.420	21.599	17.608	5.722	5.366	4.435	3.850	3.664	1.501	1.328	1.087	0.817	0.773	0.415	0.404	0.338*	0.283	0.212	0.116	0.105			
94 Pu	121.820	21.102	22.266	18,057	5,933	5.546	4.562	3,973	3.778	1.558	1,377	1,120	0,849	0,801	0.422		0.352	0.279	0.212	0.116	0.105			
95 Am	125.030	23.773	22.944	18.504	6.120	5.710	4.667	4.092	3.887	1.617	1.412	1.136	0.883	0.832	0.464	0.449	0.351	0.290	0.216	0.119	0.109	0.050	0.040	0.032
96 Cm	128.220*	24.460*	23.779*	18.930*	6.288*	5.895*	4.797*	4.227*	3.971*	1.643*	1.440	1,154					0.382*							
97 Bk	131.590	25.275	24.385	19.452	6.556	6.147	4.977	4.366	4.132	1.755	1.554	1,235					0.398*							
98 Cf	135.960	26.110	25.250	19.930	6.754	6.359	5.109	4.497	4.253	1.791	1.616	1,279					0.419							
99 Es	139.490	26.900	26.020	20.410	6.977	6.574	5.252	4.630	4.374	1.868	1.680	1,321					0.435							
100 Fm	143.090	27.700	26.810	20.900	7.205	6.793	5.397	4.766	4.498	1.937	1.747	1,366					0.454							
101 Md	146.780	28.530	27.610	21.390	7.441	7.019	5.546	4.903	4.622	2.010	1.814	1,410					0.472							
102 No	150.540	29.380	28.440	21.880	7.675	7.245	5.688	5.037	4.741	2.078	1.876	1,448					0.484							
103 Lr	154.380	30.240	29.280	22.360	7.900	7.460	5.810	5.150	4.860	2.140	1.930	1,480					0.490							
104	158.300	31.120	30.140	22.840	8.120	7.660	5.910	5,240	4.980	2.200	1.970	1,510					0.500							



## Annexe A

### Tabulation de quelques fonctions utilisées en statistique

## A.1 Loi de Gauss

Définition :

$$\phi(t)dt = Prob(t < T < t + \Delta t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (\text{A.1})$$

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^t \phi(x) dx \quad (\text{A.2})$$



t	$\psi(t)$	$\phi(t)$	t	$\psi(t)$	$\phi(t)$	t	$\psi(t)$	$\phi(t)$	t	$\psi(t)$	$\phi(t)$
0.00	0.50000	0.39894	1.00	0.84134	0.24197	2.00	0.97724	0.05399	2.92	0.99824	0.00561
0.02	0.50797	0.39886	1.02	0.84613	0.23713	2.02	0.97830	0.05186	2.94	0.99835	0.00529
0.04	0.51595	0.39862	1.04	0.85083	0.23229	2.04	0.97932	0.04980	2.96	0.99846	0.00499
0.06	0.52392	0.39822	1.06	0.85542	0.22746	2.06	0.98030	0.04779	2.98	0.99855	0.00470
0.08	0.53188	0.39766	1.08	0.85992	0.22265	2.08	0.98123	0.04586	3.00	0.99865	(-3)4.43184
0.10	0.53982	0.39695	1.10	0.86433	0.21785	2.10	0.98213	0.04398	3.05	0.99885	(-3)3.80976
0.12	0.54775	0.39608	1.12	0.86864	0.21306	2.12	0.98299	0.04216	3.10	0.99903	(-3)3.26681
0.14	0.55567	0.39505	1.14	0.87285	0.20830	2.14	0.98382	0.04040	3.15	0.99918	(-3)2.79425
0.16	0.56355	0.39386	1.16	0.87697	0.20357	2.16	0.98461	0.03870	3.20	0.99918	(-3)2.79425
0.18	0.57142	0.39253	1.18	0.88099	0.19886	2.18	0.98537	0.03706	3.25	0.99942	(-3)2.02904
0.20	0.57925	0.39104	1.20	0.88493	0.19418	2.20	0.98609	0.03547	3.30	0.99951	(-3)1.72256
0.22	0.58706	0.38940	1.22	0.88876	0.18954	2.22	0.98679	0.03394	3.35	0.99959	(-3)1.45873
0.24	0.59483	0.38761	1.24	0.89251	0.18493	2.24	0.98745	0.03246	3.40	0.99966	(-3)1.23221
0.26	0.60256	0.38568	1.26	0.89616	0.18037	2.26	0.98808	0.03103	3.45	0.99971	(-3)1.03828
x0.28	0.61026	0.38360	1.28	0.89972	0.17584	2.28	0.98869	0.02965	3.50	0.99976	(-4)8.72682
0.30	0.61791	0.38138	1.30	0.90319	0.17136	2.30	0.98927	0.02832	3.55	0.99980	(-4)7.31664
0.32	0.62551	0.37903	1.32	0.90658	0.16693	2.32	0.98982	0.02704	3.60	0.99984	(-4)6.11901
0.34	0.63307	0.37653	1.34	0.90987	0.16255	2.34	0.99035	0.02581	3.65	0.99986	(-4)5.10464
0.36	0.64057	0.37391	1.36	0.91308	0.15822	2.36	0.99086	0.02463	3.70	0.99989	(-4)4.24780
0.38	0.64802	0.37115	1.38	0.91620	0.15394	2.38	0.99134	0.02349	3.75	0.99991	(-4)3.52595
0.40	0.65542	0.36827	1.40	0.91924	0.14972	2.40	0.99180	0.02239	3.80	0.99992	(-4)2.91946
0.42	0.66275	0.36526	1.42	0.92219	0.14556	2.42	0.99223	0.02134	3.85	0.99994	(-4)2.41126
0.44	0.67003	0.36213	1.44	0.92506	0.14145	2.44	0.99265	0.02032	3.90	0.99995	(-4)1.98655
0.46	0.67724	0.35889	1.46	0.92785	0.13741	2.46	0.99305	0.01935	3.95	0.99996	(-4)1.63256
0.48	0.68438	0.35553	1.48	0.93056	0.13343	2.48	0.99343	0.01842	4.00	0.99996	(-4)1.33830
0.50	0.69146	0.35206	1.50	0.93319	0.12951	2.50	0.99379	0.01752	4.05	0.99997	(-4)1.09434
0.52	0.69846	0.34849	1.52	0.93574	0.12566	2.52	0.99413	0.01667	4.10	0.99997	(-5)8.92616
0.54	0.70540	0.34481	1.54	0.93821	0.12187	2.54	0.99445	0.01584	4.15	0.99998	(-5)7.26259
0.56	0.71226	0.34104	1.56	0.94062	0.11815	2.56	0.99476	0.01505	4.20	0.99998	(-5)5.89430
0.58	0.71904	0.33717	1.58	0.94294	0.11450	2.58	0.99505	0.01430	4.25	0.99999	(-5)4.77186
0.60	0.72574	0.33322	1.60	0.94520	0.11092	2.60	0.99533	0.01358	4.30	0.99999	(-5)3.85351
0.62	0.73237	0.32918	1.62	0.94738	0.10740	2.62	0.99560	0.01289	4.35	0.99999	(-5)3.10414
0.64	0.73891	0.32506	1.64	0.94949	0.10396	2.64	0.99585	0.01223	4.40	0.99999	(-5)2.49424
0.66	0.74537	0.32086	1.66	0.95154	0.10058	2.66	0.99609	0.01160	4.45	0.99999	(-5)1.99917
0.68	0.75174	0.31659	1.68	0.95352	0.09728	2.68	0.99631	0.01099	4.50	0.99999	(-5)1.59837
0.70	0.75803	0.31225	1.70	0.95543	0.09404	2.70	0.99653	0.01042	4.55	0.99999	(-5)1.27473
0.72	0.76423	0.30785	1.72	0.95728	0.09088	2.72	0.99673	0.00987	4.60	0.99999	(-5)1.01408
0.74	0.77035	0.30338	1.74	0.95907	0.08779	2.74	0.99692	0.00934	4.65	0.99999	(-6)8.04718
0.76	0.77637	0.29887	1.76	0.96079	0.08477	2.76	0.99710	0.00884	4.70	0.99999	(-6)6.36982
0.78	0.78230	0.29430	1.78	0.96246	0.08182	2.78	0.99728	0.00836	4.75	0.99999	(-6)5.02850
0.80	0.78814	0.28969	1.80	0.96406	0.07895	2.80	0.99744	0.00791	4.80	0.99999	(-6)3.96129
0.82	0.79389	0.28503	1.82	0.96562	0.07614	2.82	0.99759	0.00748	4.85	0.99999	(-6)3.11217
0.84	0.79954	0.28034	1.84	0.96711	0.07340	2.84	0.99774	0.00707	4.90	0.99999	(-6)2.43896
0.86	0.80510	0.27561	1.86	0.96855	0.07074	2.86	0.99788	0.00667	4.95	0.99999	(-6)1.90660
0.88	0.81057	0.27086	1.88	0.96994	0.06814	2.88	0.99801	0.00630	5.00	0.99999	(-6)1.48671
0.90	0.81593	0.26608	1.90	0.97128	0.06561	2.90	0.99813	0.00595			
0.92	0.82121	0.26128	1.92	0.97257	0.06315						
0.94	0.82639	0.25647	1.94	0.97381	0.06076						
0.96	0.83147	0.25164	1.96	0.97500	0.05844						
0.98	0.83645	0.24680	1.98	0.97614	0.05618						

## A.2 Loi de distribution du $\chi^2$

définition :

$$P\nu(\chi^2)d\chi^2 = Prob(\chi^2 < \chi^2 < \chi^2 + d\chi^2) + \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma(\frac{\nu}{2})} e^{-\frac{\chi^2}{2}} (\chi^2)^{\frac{\nu}{2}-1} d\chi^2 \quad (\text{A.3})$$

$$\alpha = \int_{\chi_{\alpha}^2}^{\infty} P\nu(\chi^2) d\chi^2 \quad (\text{A.4})$$

La table suivante donne la valeur de  $\chi^2$  à partir de  $\alpha$  et du nombre de degré de liberté  $\nu$  :

$\alpha$ $\nu$	0.995	0.99	0.975	0.95	0.9	0.75	0.5	0.25	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005	0.0001
1	(-5)3.92704	(-4)1.57088	(-4)9.82069	(-3)3.93214	0.01579	0.10153	0.45493	1.32330	2.70554	3.84146	5.02389	6.63490	7.87944	10.828	12.116	15.137
2	(-2)-1.00251	(-2)2.01007	(-2)5.06356	0.102887	0.21072	0.57536	1.38629	2.77259	4.60517	5.99147	7.37776	9.21034	10.5966	13.816	15.202	18.421
3	(-2)7.17212	0.114832	0.215795	0.351846	0.58437	1.21253	2.36597	4.10835	6.25139	7.81473	9.34840	11.3449	12.8381	16.266	17.730	21.108
4	0.206990	0.297110	0.484419	0.710721	1.06362	1.92255	3.35670	5.38527	7.77944	9.48773	11.1433	13.2767	14.8602	18.467	19.997	23.513
5	0.411740	0.554300	0.831211	1.145476	1.61031	2.67460	4.35146	6.62568	9.23635	11.0705	12.8325	15.0863	16.7496	20.515	22.105	25.745
6	0.675727	0.872085	1.237347	1.63539	2.20413	3.45460	5.34812	7.84080	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119	18.5476	22.458	24.103	27.856
7	0.989265	1.239043	1.68987	2.16735	2.83311	4.25485	6.34581	9.03715	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753	20.2777	24.322	26.018	29.877
8	1.344419	1.646482	2.17973	2.73264	3.48954	5.07064	7.34412	10.2188	13.3616	15.5073	17.5346	20.0902	21.9550	26.125	27.868	31.828
9	1.734926	2.087912	2.70030	3.32511	4.16816	5.89883	8.34283	11.3887	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660	23.5893	27.877	29.666	33.720
10	2.15585	2.55821	3.24697	3.94030	4.66518	6.73720	9.34182	12.5489	15.9871	18.3070	20.4831	23.2093	25.1882	29.588	31.420	35.564
11	2.60321	3.05347	3.81575	4.57481	5.57779	7.58412	10.3410	13.7007	17.2750	19.6751	21.9200	24.7250	26.7569	31.264	33.137	37.367
12	3.07382	3.57056	4.40379	5.22603	6.30380	8.43842	11.3403	14.8454	18.5494	21.0261	23.3367	26.2170	28.2995	32.909	34.821	39.134
13	3.56503	4.10691	5.00874	5.89186	7.04150	9.29906	12.3398	15.9839	19.8119	22.3621	24.7356	27.6883	29.8194	34.528	36.478	40.871
14	4.07468	4.66043	5.62872	6.57063	7.78953	10.1653	13.3393	17.1170	21.0642	23.6848	26.1190	29.1413	31.3193	36.123	38.109	42.579
15	4.60094	5.22935	6.26214	7.26094	8.54675	11.0365	14.3389	18.2451	22.3072	24.9958	27.4884	30.5779	32.8013	37.697	39.719	44.263
16	5.14224	5.81221	6.90766	7.96164	9.31223	11.9122	15.3385	19.3688	23.5418	26.2962	28.8454	31.9999	34.2672	39.252	41.308	45.925
17	5.69724	6.40776	7.56418	8.67176	10.0852	12.7919	16.3381	20.4887	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087	35.7185	40.790	42.879	47.560
18	6.26481	7.01491	8.23075	9.39046	10.8649	13.6753	17.3379	21.6049	25.9894	28.8693	31.5264	34.8053	37.1564	42.312	44.434	49.189
19	6.84398	7.63273	8.90655	10.1170	11.6509	14.5620	18.3376	22.7178	27.2036	30.1435	32.8523	36.1908	38.5822	43.820	45.973	50.706
20	7.43386	8.26040	9.59083	10.3508	12.4426	15.4518	19.3374	23.8277	28.4120	31.4104	34.1696	37.5662	39.9968	45.315	47.498	52.386
21	8.03366	8.89720	10.28293	11.5913	13.2396	16.3444	20.3372	24.9348	29.6151	32.6705	35.4789	38.9321	41.4010	46.797	49.011	53.962
22	8.64272	9.54249	10.9823	12.3380	14.0415	17.2396	21.3370	26.0393	30.8133	33.9244	36.7807	40.2894	42.7956	48.268	50.511	55.525
23	9.26042	10.19567	11.6885	13.0905	14.8479	18.1373	22.3369	27.1413	32.0069	35.1225	38.0757	41.6384	44.1813	49.728	52.000	57.075
24	9.88623	10.8564	12.4011	13.8484	15.6587	19.0372	23.3367	28.2412	33.1963	36.4151	39.3641	42.9798	45.5585	51.179	53.479	58.613
25	10.5197	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734	19.9393	24.3366	29.3389	34.3816	37.6525	40.6465	44.3141	46.9278	52.620	54.947	60.140
26	11.1603	12.1981	13.8439	15.3791	17.2919	20.8434	25.3364	30.4345	35.5631	38.8852	41.9232	45.6417	48.2899	54.052	56.407	61.657
27	11.8076	12.8786	14.5733	16.1513	18.1138	21.7494	26.3363	31.5284	36.7412	40.1133	43.1944	46.9630	49.6449	55.476	57.858	63.164
28	12.4613	13.5648	15.3079	16.9279	18.9392	22.6572	27.3363	32.6205	37.9159	41.3372	44.4607	48.2782	50.9933	56.892	59.300	64.662
29	13.1211	14.2565	16.0471	17.7083	19.7677	23.5666	28.3362	33.7109	39.0875	42.5569	45.7222	49.5879	52.3356	58.302	60.735	66.152
30	13.7867	14.9535	16.7908	18.4926	20.5992	24.4776	29.3360	34.7998	40.2560	43.7729	46.9792	50.8922	53.6720	59.703	62.162	67.633
40	20.7065	22.1643	24.4331	26.5093	29.0505	33.6603	39.3354	45.6160	51.8050	55.7585	59.3417	63.6907	66.7659	73.402	76.095	82.062
50	27.9907	29.7067	32.3574	34.7642	37.6886	42.9421	49.3349	56.3336	63.1671	67.5048	71.4202	76.1539	79.4900	86.661	89.560	95.969
60	35.5346	37.4848	40.4817	43.1879	46.4589	52.2938	59.3347	66.9814	74.3970	79.0819	83.2976	88.3794	91.9517	99.607	102.695	109.503
70	43.2752	45.4418	48.7576	51.7393	55.3290	61.6983	69.3344	77.5766	85.5271	90.5312	95.0231	100.425	104.215	112.317	115.578	122.755
80	51.1720	53.5400	57.1532	60.3915	64.2778	71.1445	79.3343	88.1303	96.5782	101.879	106.629	112.329	116.321	124.839	128.261	135.783
90	59.1963	61.7541	65.6466	69.1260	73.2912	80.6247	89.3342	98.6499	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299	137.208	140.782	148.627
100	67.3276	70.0648	74.2219	77.9295	82.3581	90.1332	99.3341	109.141	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169	149.449	153.167	161.319



## Annexe B

# Mesure de la durée de vie d'états nucléaires excités

Mesurer une durée de vie revient à déterminer la distribution des intervalles de temps séparant l'événement physique correspondant à la formation du niveau et l'événement physique le dépeuplant.

Cependant cette distribution, théoriquement une exponentielle décroissante, n'apparaît pas ainsi dans les résultats bruts de l'expérience et ce, à cause de la résolution temporelle finie du dispositif.

En effet, dans la mesure, nous disposons d'un appareillage qui, pour la mesure d'un intervalle  $t$  rigoureusement fixe, donne des résultats distribués selon une loi  $f(T - t)$  où  $T$  indique le résultat effectif de la mesure de  $t$ .

Supposons la distribution  $f(T - t)$  normalisée :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t - T) dT = 1 \quad (\text{B.1})$$

Pour la distribution des temps de décroissance des niveaux excités

$$\begin{array}{ll} p(t) = \lambda e^{-\lambda t} & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{array} \quad \int_{-\infty}^{\infty} p(t) dt = 1$$

l'appareillage donnera en  $T$  un résultat qui sera la somme de toutes les contributions des mesures de  $t$ , contributions toutes distribuées selon  $f(T - t)$ ;

notons par  $N(T)$  le résultat de la mesure de  $p(t)$  :

$$\begin{aligned} N(T) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(T-t) p(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(T-t) \lambda e^{-\lambda t} dt \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

En posant  $X = T - t$  :

$$\begin{aligned} N(T) &= \int_T^{\infty} f(X) \lambda e^{-\lambda(T-X)} dX \\ &= \lambda e^{-\lambda(T)} \int_{-\infty}^T f(X) e^{-\lambda X} dX \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

En dérivant par rapport au temps, nous obtenons de la distribution  $N(T)$  :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dT} N(T) &= -\lambda N(T) + \lambda e^{-\lambda(T)} \frac{d}{dT} \int_{-\infty}^T f(X) e^{-\lambda X} dX \\ &= \lambda (f(T) - N(T)) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

et

$$\frac{d}{dT} \ln N(T) = -\lambda \left( 1 - \frac{f(T)}{N(T)} \right) \quad (\text{B.5})$$

- a) Ainsi, pour autant que  $f(T) \ll N(T)$ , la dérivée logarithmique de la distribution des temps mesurés donne directement la constante de décroissance  $\lambda (=1/\tau)$ . Pour réaliser cette condition, on se placera assez loin du maximum de la distribution  $N(T)$ .
- b) La relation (1) montre que les deux distributions normées  $f(T)$  et  $N(T)$  se coupent au maximum de  $N(T)$ .
- c) De la relation (1), on tire également :

$$f(T) = \tau \frac{d}{dt} N(T) + N(T) \quad (\text{B.6})$$

ce qui permet d'obtenir graphiquement la distribution  $f(T)$ , c'est-à-dire la résolution temporelle de l'appareillage, une fois connue la durée de vie  $\tau$ .

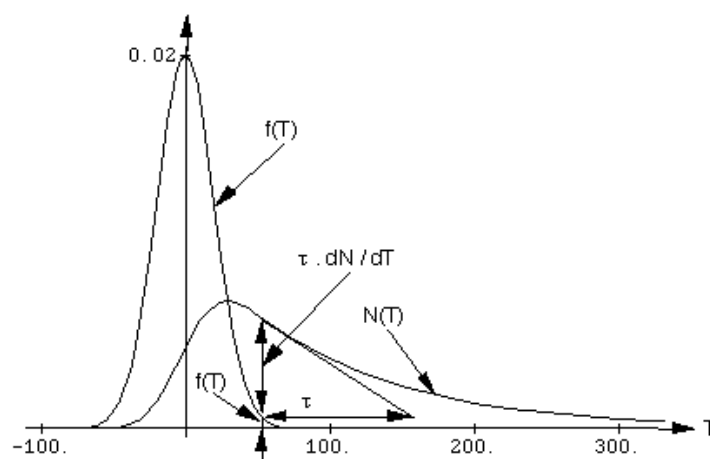


FIG. B.1 – Distribution des temps de vie d'un état excité





# Annexe C

## Notions de radioprotection

### C.1 Généralités

Les rayonnements atomiques et nucléaires présentent un danger certain pour les êtres vivants, ceci d'autant plus qu'aucun des sens dont l'homme est doté ne lui permet de les détecter, si ce n'est après coup, alors qu'il est trop tard, par les dégâts biologiques provoqués.

Il importe donc d'être prudent dans toutes les manipulations mettant en jeu des corps radioactifs. On observera les **règles élémentaires** suivantes :

1. Manipuler les produits radioactifs avec des pinces, des gants si une contamination est à craindre ; éviter toute souillure des locaux.
2. Ne pas fumer, boire ou manger dans les locaux réservés à la préparation et la manipulation des produits radioactifs.
3. Connaître le niveau de radioactivité aux places de travail, le réduire autant que possible par l'effet de la distance, par des écrans, limiter la durée d'exposition.

On peut distinguer deux sortes d'irradiation du corps humain : l'irradiation externe et **l'irradiation interne qui est particulièrement dangereuse**. Les précautions à prendre doivent donc être décuplées lorsque les corps radioactifs à manipuler ne sont pas sous forme scellée ou tout au moins sous une forme propre à éviter toute contamination, c'est à dire lorsqu'ils se trouvent à l'état de poudres, de solutions ou d'émanations gazeuses. Une fois toutes les précautions prises, le travail avec des sources radioactives n'est en fait pas plus dangereux que certains autres travaux ; en particulier, les manipulations faites dans les laboratoires d'enseignement de physique nucléaire utilisent,

dans la grande majorité des cas, des sources scellées ou contenues dans des montages suffisamment étanches et d'intensités très faibles.

En bref, il s'agit de travailler en parfaite connaissance de cause, sans crainte excessive, mais avec calme, prudence et rapidité s'il y a lieu.

## C.2 Effets biologiques des rayonnements

### Unités dosimétriques

Tout rayonnement nucléaire ou atomique interagit avec le milieu qu'il traverse ; il lui cède de l'énergie et peut être cause d'altérations diverses. L'étude de l'effet des rayonnements sur la matière se scinde en deux, selon qu'il s'agit de matière vivante, - on s'intéresse alors aux effets biologiques - ou de matière inerte, - ce sont dans ce cas les variations des propriétés physiques, chimiques etc..., qui retiennent l'attention. Dans le premier cas, objet de cette étude, l'ionisation et l'excitation constituent les mécanismes fondamentaux, qu'il faut donc étudier et mesurer ; si leur importance est égale pour ce qui est de l'énergie transférée au milieu, du point de vue biologique seule l'ionisation est à considérer, son effet étant, dans l'état actuel des connaissances, très nettement le plus grand. Il n'est peut-être pas inutile de rappeler que c'est grâce à leur interaction avec la matière, l'ionisation tout spécialement, que les rayonnements peuvent être détectés.

Le passage des particules chargées dans la matière produit une ionisation directe ; l'interaction des X et  $\gamma$  engendre une ionisation indirecte, due aux électrons ; les neutrons, eux aussi, provoquent une ionisation indirecte, dont peuvent être responsable des protons, des particules  $\alpha$ , ou encore d'autres particules selon le type de réaction produite. L'ionisation spécifique (nombre de paires d'ions créées par unité de longueur) dépend du milieu, de la charge de la particule et de sa vitesse ; un minimum d'ionisation se produit lorsque l'énergie cinétique de la particule est égale environ à deux fois son énergie de masse ; au dessous de ce minimum, l'ionisation spécifique croît très vite lorsque la vitesse diminue. Un fait remarquable est que  $w$ , énergie moyenne perdue dans la création d'une paire d'ions, est, en première approximation, une constante, caractéristique du milieu, mais indépendante de la nature et de l'énergie de la particule : cette constatation expérimentale est particulièrement bien vérifiée pour les milieux gazeux, l'argon notamment ; pour l'air,  $w = 34$  eV (valeur mesurée pour des électrons).

L'unité fondamentale de **dose d'exposition**, ou de "quantité de rayonnement" relativement à sa capacité d'ioniser l'air, pour les rayonnements électromagnétiques, est le **Roentgen** (symbole R), défini comme étant la quantité de rayonnement X ou  $\gamma$  telle que l'émission corpusculaire associée libère dans 1 cm<sup>3</sup> d'air sec aux conditions normales (0,001293 g) des ions portant une charge de chaque signe égale à une unité électrostatique. Le roentgen n'est donc pas une unité de dose absorbée, mais d'ionisation dans l'air. Cependant, et tant que  $w$  peut être considérée comme constante, il est possible d'établir une correspondance entre dose d'exposition et dose absorbée (énergie cédée par unité de masse de matière); ainsi, dans l'air normal, où  $w = 34 \text{ eV} / \text{paire d'ions}$

$$1\text{R} = 2.5810 - 4\text{C/kg}$$

La définition même du roentgen restreint son utilisation, en toute rigueur, aux RX et gamma d'énergie inférieure à 3 MeV.

L'unité de **dose absorbée** est le **rad** ("radiation absorbed dose"), qui vaut 100 ergs/g; elle s'applique à tout rayonnement, directement ionisant ou non, et à n'importe quel milieu; c'est une densité d'énergie. Comme le roentgen, le rad est une unité physique; mais sa mesure directe est très difficile (calorimétrie). Dans le **système SI**, **l'unité de dose absorbée est le Gray** (symbole Gy) qui vaut :

$$1 \text{ Gy} = 1 \text{ J/kg} = 100 \text{ rad}$$

Pour une même énergie cédée à un gramme de tissu vivant, les dommages biologiques peuvent être fort différents, selon le type et l'énergie du rayonnement, et selon la répartition des effets dans ce gramme de tissu, répartition qui dépend essentiellement de l'ionisation spécifique. C'est pourquoi il s'est avéré nécessaire de définir une nouvelle unité, le **rem** ("**roentgen equivalent man**") ou "équivalent de dose", en laquelle on a convenu d'exprimer les doses absorbées lorsqu'on s'intéresse à leurs effets biologiques sur l'homme; il est possible alors de les comparer, de les totaliser. Par définition, le rem est la dose de rayonnement absorbée dont l'efficacité biologique est la même que celle d'un rad de rayons X de 200 keV. En toute généralité :

$$\text{Dose biologique (rem)} = \text{dose absorbée (rad)} \times \text{E.B.R.}$$

Le facteur multiplicatif est l'efficacité biologique relative E.B.R. (en anglais R.B.E.) ; il est égal à 1 pour les X,  $\gamma$ ,  $\beta$  et électrons de toutes énergies ; il est supérieur à 1 pour les autres particules, et ce, d'autant plus que l'ionisation spécifique est plus élevée (voir la table ci-après). Le rem n'est pas une unité physique ; sa mesure directe n'est donc pas possible.

Dans un gramme de tissu mou, l'énergie dissipée par un rayonnement d'un roentgen est de 94 à 97 ergs, soit 0.94 à 0.97 rad (pour  $100 \text{ keV} < E < 2 \text{ MeV}$ ) ; ainsi, dans ce cas, et à quelques pour-cent près :

$$1 \text{ R} = 1 \text{ rad} = 1 \text{ rem}$$

Dans le **système SI**, on exprime l'équivalent de dose en **Sievert** (symbole Sv), qui vaut

$$1 \text{ Sievert} = 100 \text{ rem}$$

C'est la faible variation du rapport entre les énergies absorbées par l'air et par les tissus mous pour des X et des  $\gamma$  d'énergie comprise entre 100 KeV et 2 MeV qui permet de déterminer une dose biologique par une simple mesure d'ionisation ; le fait que les valeurs numériques soient presque égales, s'il simplifie les calculs, peut entraîner des erreurs et des confusions.

Alors que les doses, qu'elles soient d'exposition, absorbée ou biologique, s'expriment en roentgen, Gray (rad) , et Sievert (rem), respectivement, et représentent un effet intégré, les intensités ou **débîts de doses** sont rapportées à l'unité de temps ; les unités les plus courantes étant le R/h, le mR/h, le Sv/h, le mSv/h (millisievert/heure), le rem/h, le mrem/h (millirem par heure).

**Facteurs E.B.R. et flux maximums tolérés pour les divers rayonnements** (irradiation externe globale)

Rayonnement	E.B.R. moyen	Flux correspondant à 2.5 mrem/h (ou 0.025 mSv/h)
X et $\gamma$	1	$1400/E$ [MeV] photons $\cdot$ cm $^{-2}$ $\cdot$ sec $^{-1}$ ( $0.07 < E < 2$ MeV)
$\beta$ et électrons	1	23 électrons ou 15 $\beta$ de 1 MeV par cm $^2$ et par sec incidents sur le tissu
$\alpha$ de la radioactivité	15	0.003 $\alpha$ de 5 MeV par cm $^2$ et par sec
protons ( $< 10$ MeV)	10	0.06 p de 5 MeV par cm $^2$ et par sec
ions lourds	20	0.0002 ion d'oxygène par cm $^2$ et par sec
neutrons thermiques	2.8	600 n thermiques par cm $^2$ et par sec
neutrons rapides ( $E < 10$ MeV)	10	19 n de 2 MeV par cm $^2$ et par sec

### Doses de tolérance.

Les normes fédérales actuellement en vigueur, édictées en 1976 et qu'il faut scrupuleusement respecter, sont les suivantes :

#### a) Irradiation externe

Sur l'ensemble du corps, en particulier les yeux, les organes génitaux et la moelle :

Pour les personnes exposées professionnellement, la dose accumulée à tout âge  $N$  ( $N > 18$ ) ne doit pas dépasser la dose  $D$  fournie par la relation :

$$D = 50(N - 18) \text{ mSv} = 5(N - 18) \text{ rem}$$

ce qui correspond à une moyenne de **50 mSv/an (5 rem/an)**.

En outre, la dose reçue en toute période de **13 semaines consécutives** ne doit en aucun cas dépasser **30 mSv (3 rem)** ; pour les personnes de **sexe féminin** en âge d'avoir des enfants, la **dose maximale trimestrielle accumulée dans des irradiations à l'abdomen est de 13 mSv (1.3 rem)**.

La limite est fixée à 5 mSv/année (0.5 rem/année), dès 18 ans seulement, pour une catégorie limitée de la population, les personnes vivant au voisinage d'installations nucléaires par exemple.

Pour l'ensemble de la population, la dose tolérée est de 50 mSv (5 rem) pour toute la vie. Les irradiations médicales, l'effet du rayonnement naturel (interne, cosmique et terrestre) n'entrent pas en ligne de

compte dans le calcul des doses reçues lorsqu'il s'agit de les comparer aux normes de tolérance ; une irradiation accidentelle unique (pour toute la vie) est également exceptée si elle ne dépasse pas 250 mSv (25 rem).

Les doses indiquées sont relatives à une irradiation globale du corps, donc aussi des organes les plus radio-sensibles ; les normes peuvent être plus élevées, c'est à dire moins strictes, pour des irradiations locales affectant par exemple la peau, les mains, les pieds. Il est bon de noter que 50 mSv/année correspond à 1 mSv/ semaine en moyenne, ou encore, pour une semaine de travail de 40 heures, à un débit de dose moyen limite de 0.025 mSv/h.

#### b) Irradiation interne

Les effets dans ce cas dépendent essentiellement du radioisotope en cause, non seulement de son activité, de sa période, de la nature et de l'énergie du rayonnement émis, mais aussi de la radiosensibilité de l'organisme dans lequel il est susceptible de se fixer sélectivement et de la durée moyenne de fixation. L'irradiation interne, rappelons-le, peut être extrêmement dangereuse.

Les normes de tolérance, définies d'après les limites données ci-dessus, sont indiquées en fractions de microcurie par millilitre d'air ou d'eau, par exemple ; les ordres de grandeur des concentrations tolérables s'échelonnent entre  $10^{-6}$  et  $10^{-12}$   $\mu\text{Ci/ml}$ .

Certains radio-éléments sont particulièrement dangereux, tels, par exemple,  $^{131}\text{I}$ ,  $^{90}\text{Sr}$  et la plupart des émetteurs  $\alpha$ , comme le  $^{210}\text{Po}$ ,  $^{226}\text{Ra}$  et ses dérivés,  $^{239}\text{Pu}$ , etc. Alors que les effets des  $\beta$  et surtout des  $\alpha$  peuvent, le plus souvent, être négligés lors d'irradiations externes, c'est la situation inverse qu'il faut envisager dans le cas des irradiations internes.

#### Les effets somatiques et génétiques de l'irradiation

Il y a lieu de distinguer les **effets somatiques**, affectant l'individu seul, et les **effets génétiques** qui peuvent agir sur sa descendance ; les premiers sont caractérisés par un certain seuil d'action, par une capacité de restauration et par une dépendance vis à vis du rythme de l'irradiation, alors que les seconds, peu connus et totalement incontrôlables, semblent irrémédiablement cumulatifs, dans l'espèce et dans le temps, et sans seuil.

Pour ce qui est des effets somatiques, une irradiation de l'organisme humain a les conséquences directes suivantes (dose unique sur le corps entier) :

0-25rem	probablement pas d'effets durables, en tout cas pas décelables.
50 rem	altérations passagères du sang, effets retardés légers possibles.
100 rem	nausées, changements considérables de la formule sanguine, raccourcissement de l'espérance de vie.
200 rem	vomissement, faiblesse, épilation. Guérison probable.
400 rem	mortalité dans le 50% des cas.
600 rem	dose létale à 100%.

Les affections les plus graves qui peuvent se déclarer, après un temps de latence assez long souvent, suite à une forte irradiation, sont, selon les organes atteints, des cancers divers (du sang - leucémie -, des os, de la peau) et la cataracte.

Les normes de tolérance ont été établies en premier lieu en tenant compte des effets somatiques, qui seuls sont relativement connus actuellement ; elles ont été rendues progressivement plus sévères pour tenir compte des effets génétiques possibles, surtout en ce qui concerne l'ensemble de la population. Il n'en reste pas moins que ces doses sont des **limites dont il faut se tenir le plus éloigné possible**, ne serait-ce précisément qu'à cause des effets génétiques.

Les lésions provoquées par les rayonnements dans un édifice biologique, le corps humain en particulier, sont des lésions de cellules ; les effets macroscopiques constatés résultent donc de dégâts microscopiques dûs surtout à l'ionisation. La radio-sensibilité des cellules varie pour une même dose absorbée d'un tissu à l'autre ; les organes comprenant les tissus les plus sensibles sont dits organes critiques ; ce sont essentiellement les tissus sanguiformateurs (la moelle notamment), les organes génitaux et le cristallin. L'effet biologique est fonction de l'énergie absorbée par le tissu, mais aussi, du moins en ce qui concerne les effets somatiques, du débit de dose ; une dose de 1.5 Sv (150 rem) reçue progressivement en 30 ans n'entraîne que peu ou pas de conséquences biologiques décelables, alors qu'appliquée en un temps très court elle provoque des troubles relativement graves.

Il est intéressant de noter que le fond de rayonnement naturel (cosmique, tellurique et interne) correspond à une dose biologique annuelle de 1.75 mSv (175 mrem), sous nos latitudes et au niveau de la mer.

Les radioscopies et, à un degré moindre, les radiographies représentent des irradiations importantes, la dose d'exposition étant très vite de quelques

roentgen.

### C.3 Les instruments de mesure de dose

Les contrôles dosimétriques s'effectuent à l'aide d'instruments appropriés, fixes ou portatifs, conçus pour indiquer des intensités de dose (mR/h, mrem/h, mSv/h), soit des doses intégrés (mR, mrem ou mGy).

Les **films et émulsions nucléaires**, dont l'épaisseur et la composition peuvent varier pour les rendre sensibles aux  $\beta$ , X,  $\gamma$ , neutrons lents ou rapides, constituent le type même de détecteur portatif de surveillance personnel, permettant de connaître la dose totale reçue pendant une période déterminée. Pour les  $\beta$ , X,  $\gamma$  et neutrons lents, un dépouillement photométrique des films suffit, alors que pour les neutrons rapides, un comptage au microscope des traces des protons de recul est nécessaire.

Le Département de la Santé Publique du Canton de Vaud utilise, quant à lui, des **dosimètres thermoluminescents** constitués de pastilles de LiF : lorsqu'un rayonnement X,  $\beta$  ou  $\gamma$  traverse le cristal, il le ionise ; les électrons de la bande de valence passent dans la bande de conduction. Lors de leur relaxation, ces électrons retombent dans des pièges dont le niveau d'énergie est suffisamment éloigné de celle de la bande de conduction afin d'interdire, à température ambiante, le passage des électrons vers la bande de conduction. La capture des trous créés par l'ionisation se fait de la même manière (voir figure C.1 a)). Le dosimètre thermoluminescent intègre ainsi la dose, la mesure de cette dose intégrée étant la quantité d'électrons et trous créés par la particule ionisante et capturée dans les pièges. Après la période d'exposition, le nombre de porteurs capturés peut être déterminé : on chauffe la pastille de LiF à une température donnée par la différence d'énergie des niveaux du piège à électron et de la bande de conduction ; la recombinaison d'un électron et d'un trou piégé permet l'émission d'un photon visible (3 à 4 eV) que l'on peut mesurer avec un photomulticateur (figure C.1 b)).

Les **stylos dosimètres** sont aussi des détecteurs portatifs et personnels ; ils ont l'avantage de donner une indication immédiate de la dose totale reçue. Ils ne sont habituellement sensibles qu'aux  $\gamma$ . Leur principe de fonctionnement est celui d'un électromètre, à fibre de quartz le plus souvent, qui sert d'indicateur, monté dans une petite chambre d'ionisation. La décharge observée est une mesure directe de l'ionisation créée dans la chambre. La graduation peut être faite en mR (ou R).



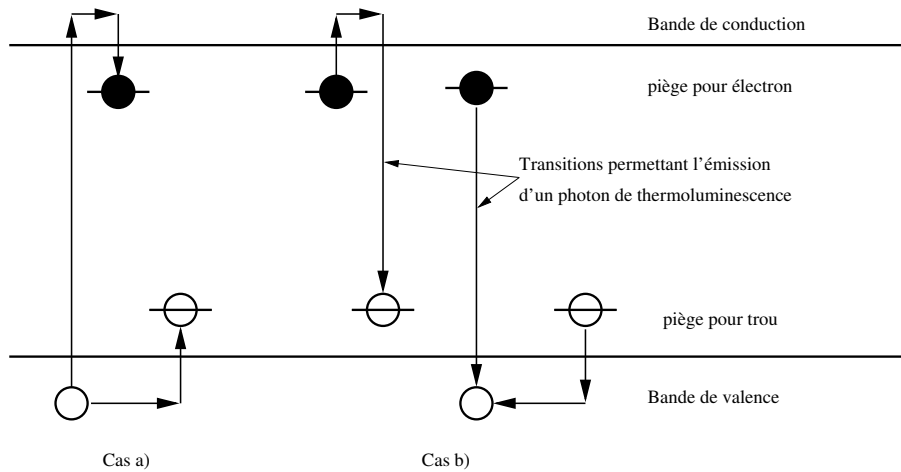


FIG. C.1 – Principe de fonctionnement d'un dosimètre à thermoluminescence.

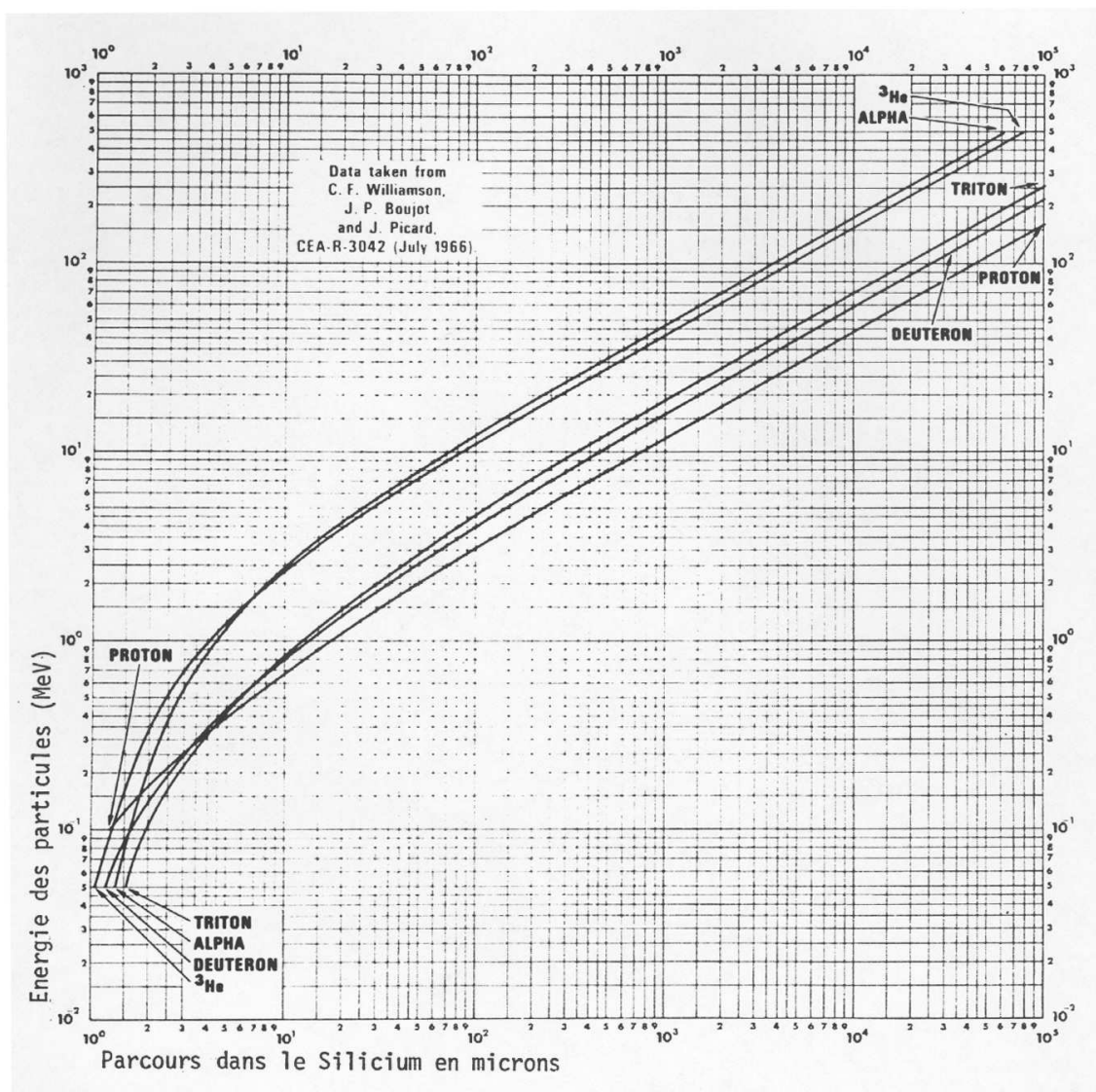
- a) ionisation et piégeage des électrons et des trous
- b) mesure du nombre d'électrons (ou de trous) piégés

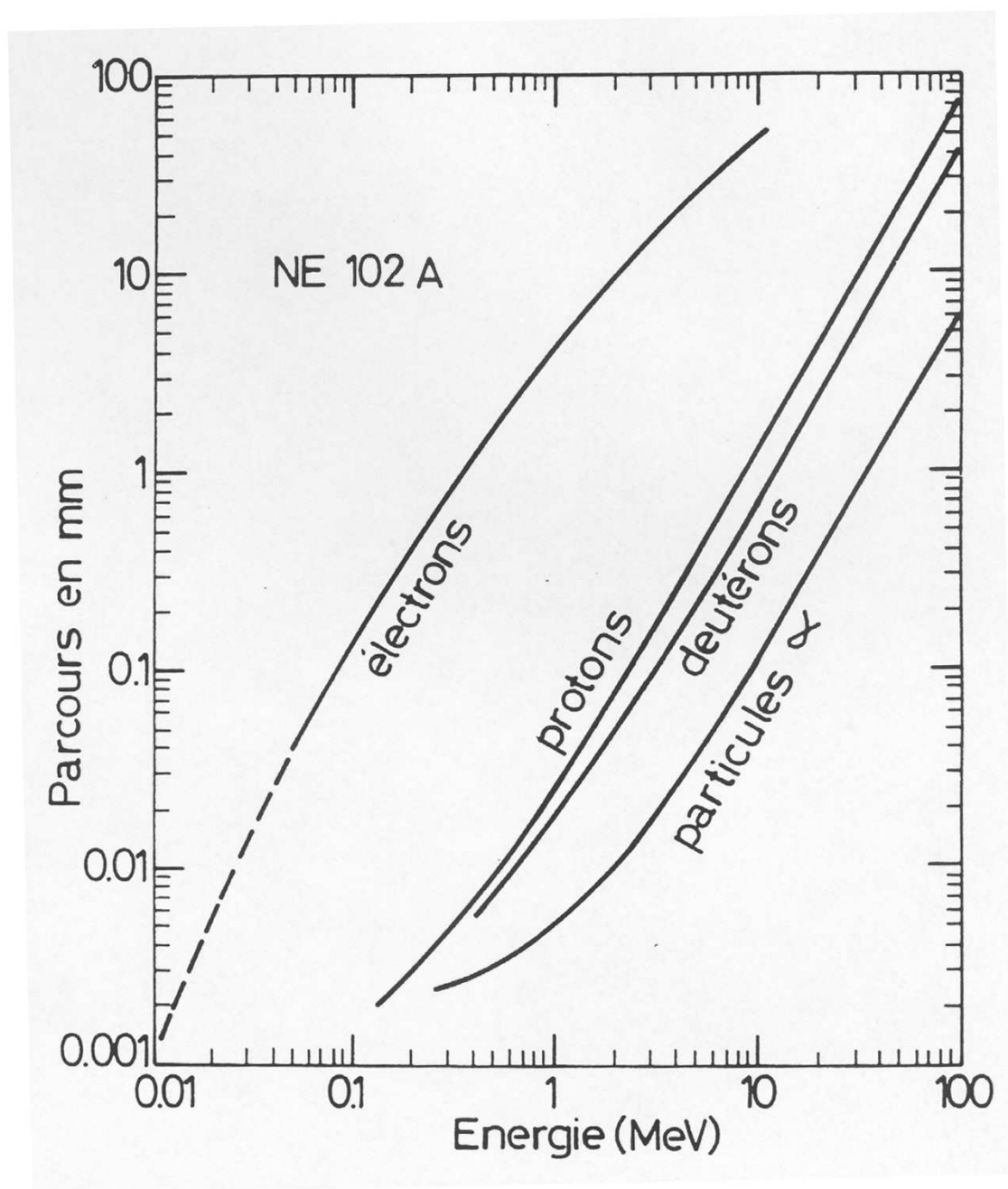
On utilise aussi fréquemment des appareils portatifs simples et robustes dont l'élément détecteur est le compteur **Geiger-Müller** ; l'instrument indique un courant moyen résultant de l'intégration, avec une certaine constante de temps, des impulsions fournies par le tube compteur ; la graduation est le plus souvent directement en mR/h ou mR/h. L'étalonnage est réalisé pour une énergie donnée, par exemple celle des  $\gamma$  du  $^{60}\text{Co}$  ; il n'est évidemment pas valable pour des énergies différentes, puisque le compteur Geiger-Müller ne mesure pas une ionisation mais délivre un signal lors de la détection dans son enceinte d'un  $\gamma$ , détection qui se fait avec une efficacité dépendante de l'énergie. Le compteur Geiger-Müller permet ainsi de mesurer des débits de dose d'exposition dus aux RX, aux  $\gamma$  et aux  $\beta$ , pour autant qu'ils ne soient pas trop "mous". Une fenêtre mince, donc délicate, prévue à cet effet, peut être découverte ou non.



# Annexe D

## Tables

FIG. D.1 – Planche 1 : Parcours des  $\alpha$ , t, d, p dans le Silicium

FIG. D.2 – Planche 2 : Parcours des  $\alpha$ , t, d, p dans le cristal NE102A

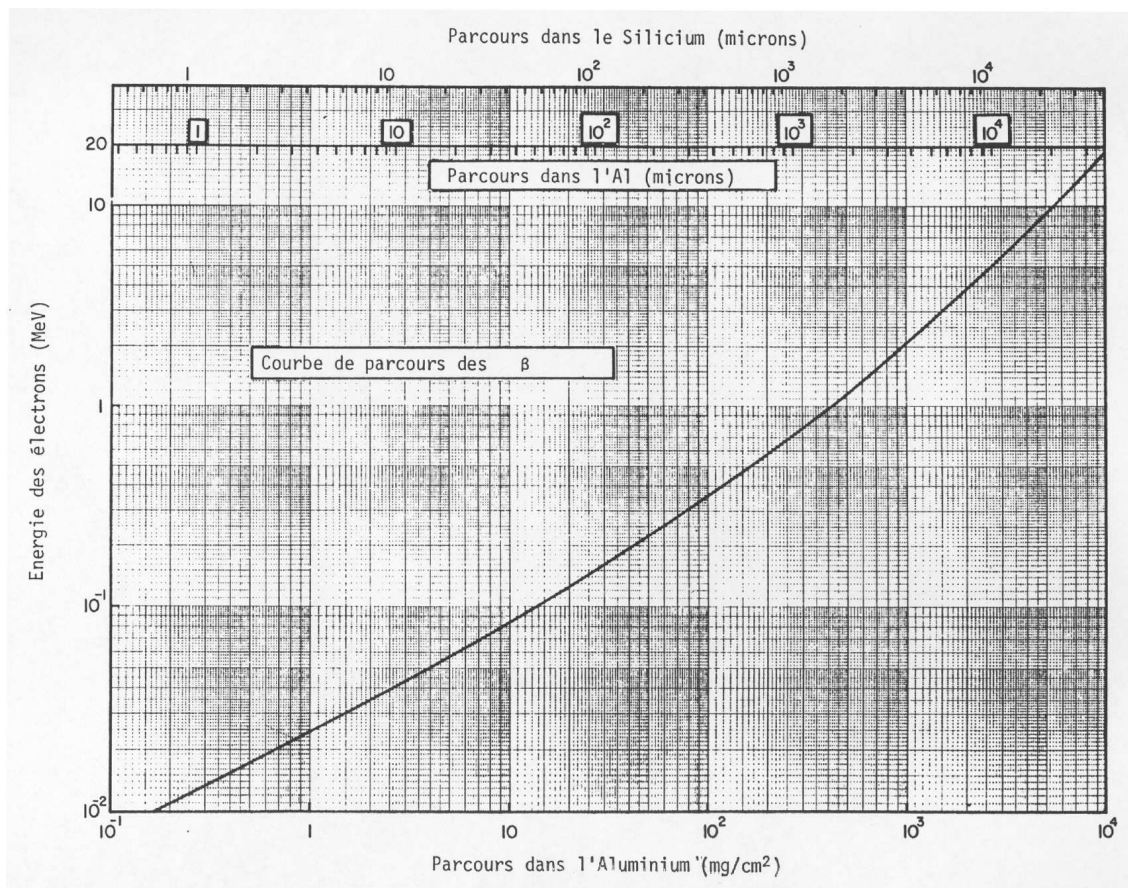


FIG. D.3 – Planche 3 : Relation entre l'énergie et le parcours des  $e^-$  dans le Si

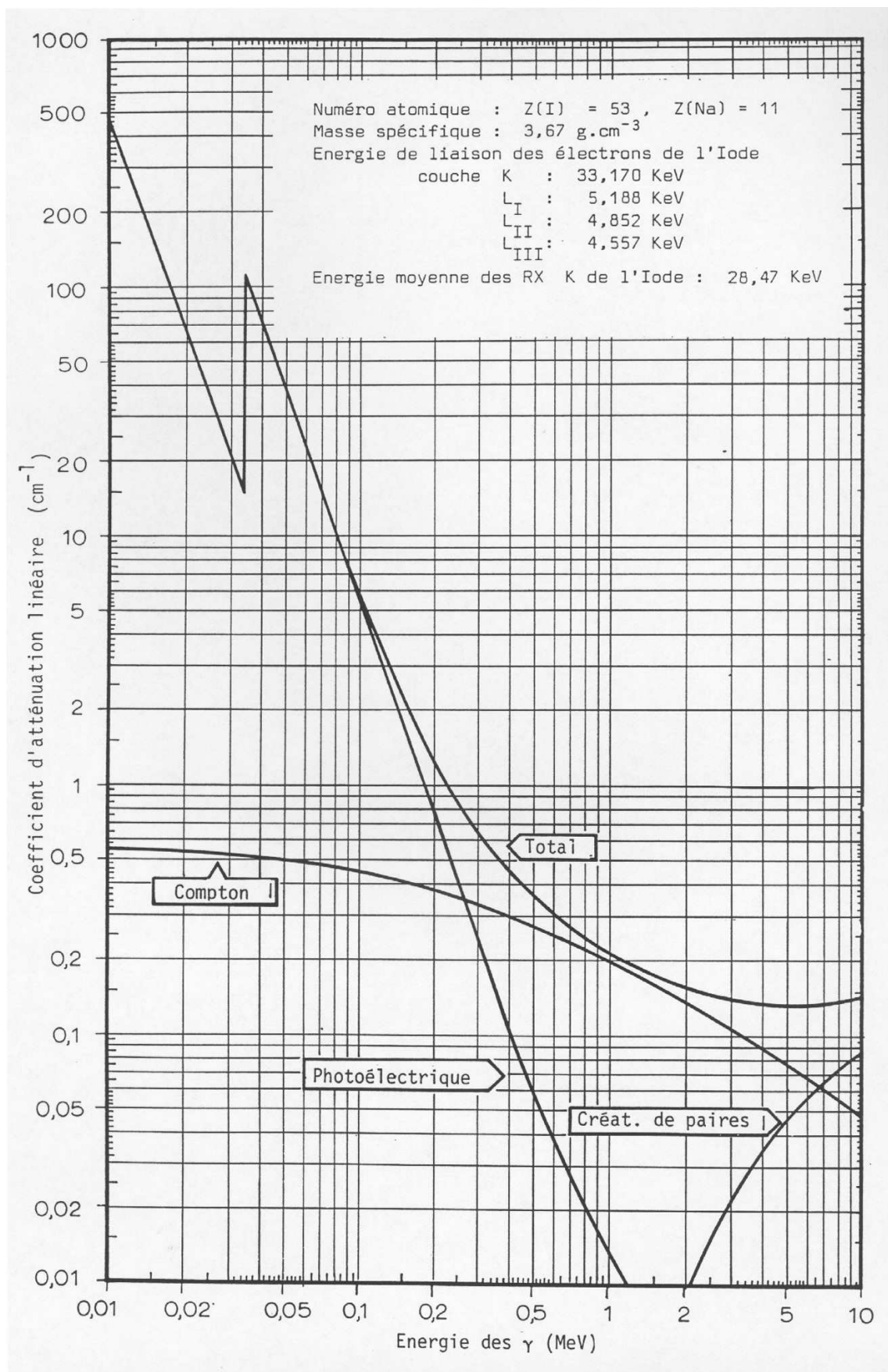


FIG. D.4 – Planche 4 : Coefficient d'atténuation linéaire du NaI

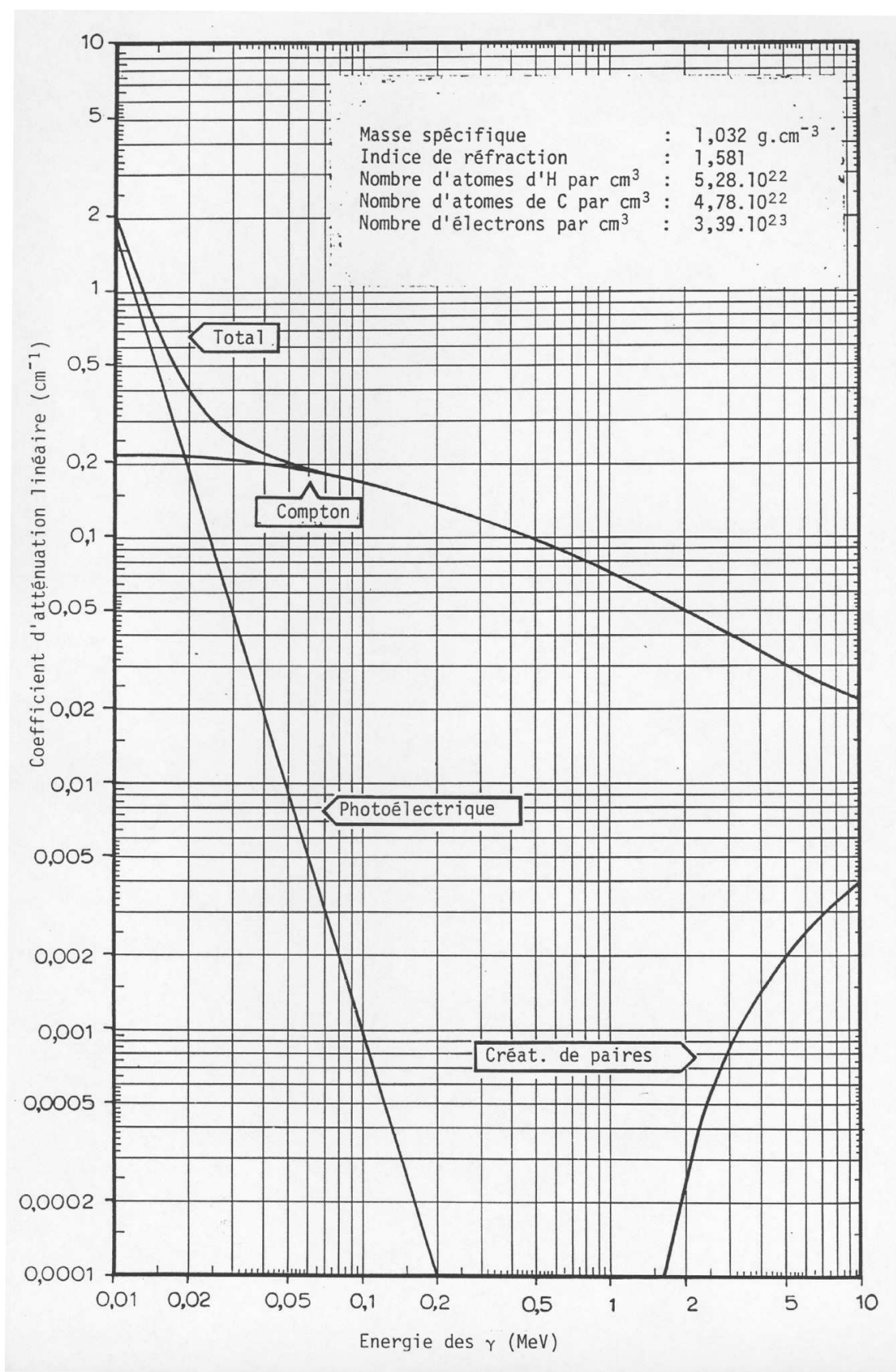


FIG. D.5 – Planche 5 : Coefficient d'atténuation linéaire pour les scintillateurs plastiques



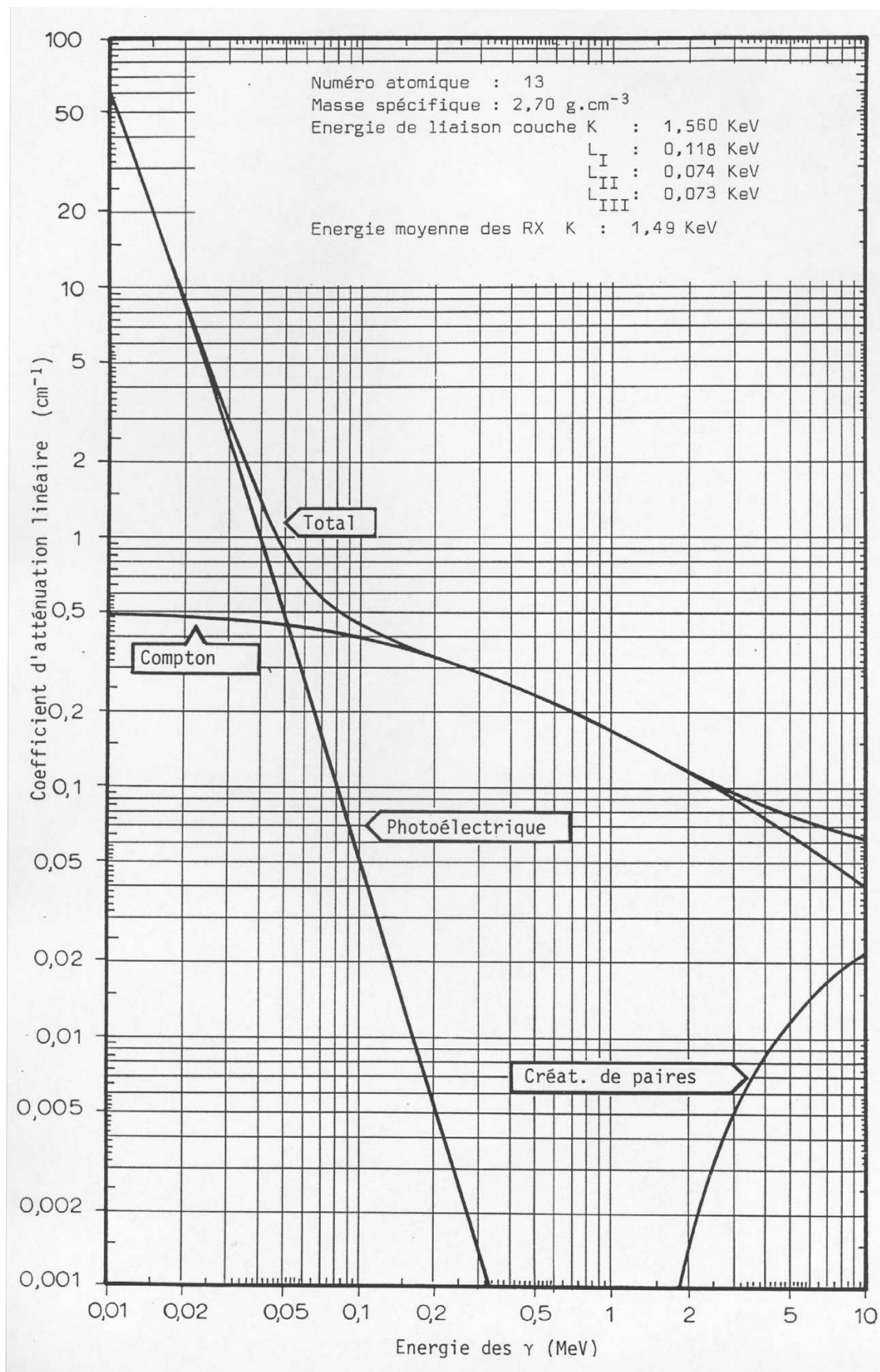


FIG. D.6 – Planche 6 : Coefficient d'atténuation linéaire de l'Aluminium

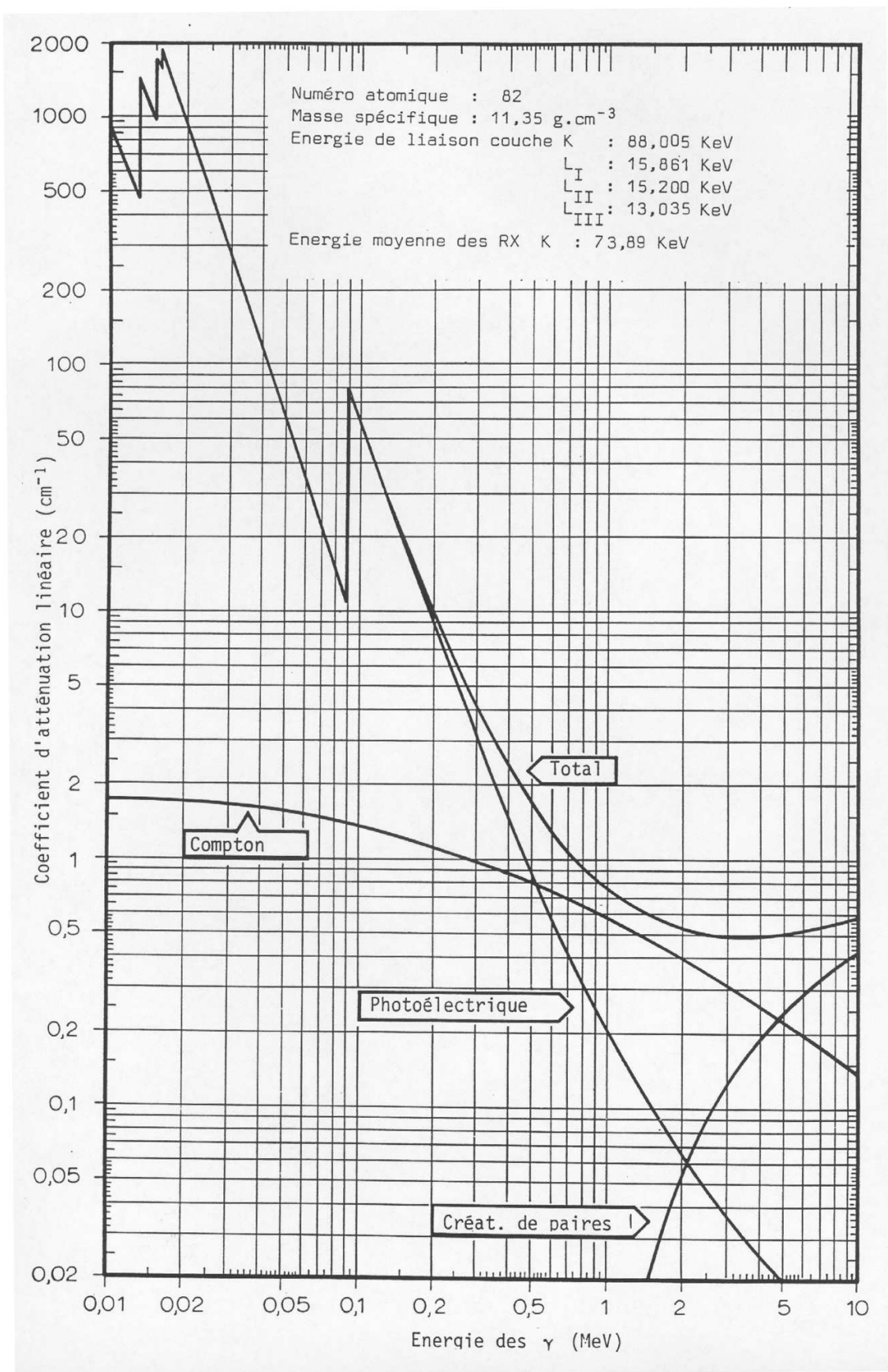


FIG. D.7 – Planche 7 : Coefficient d'atténuation linéaire du Plomb

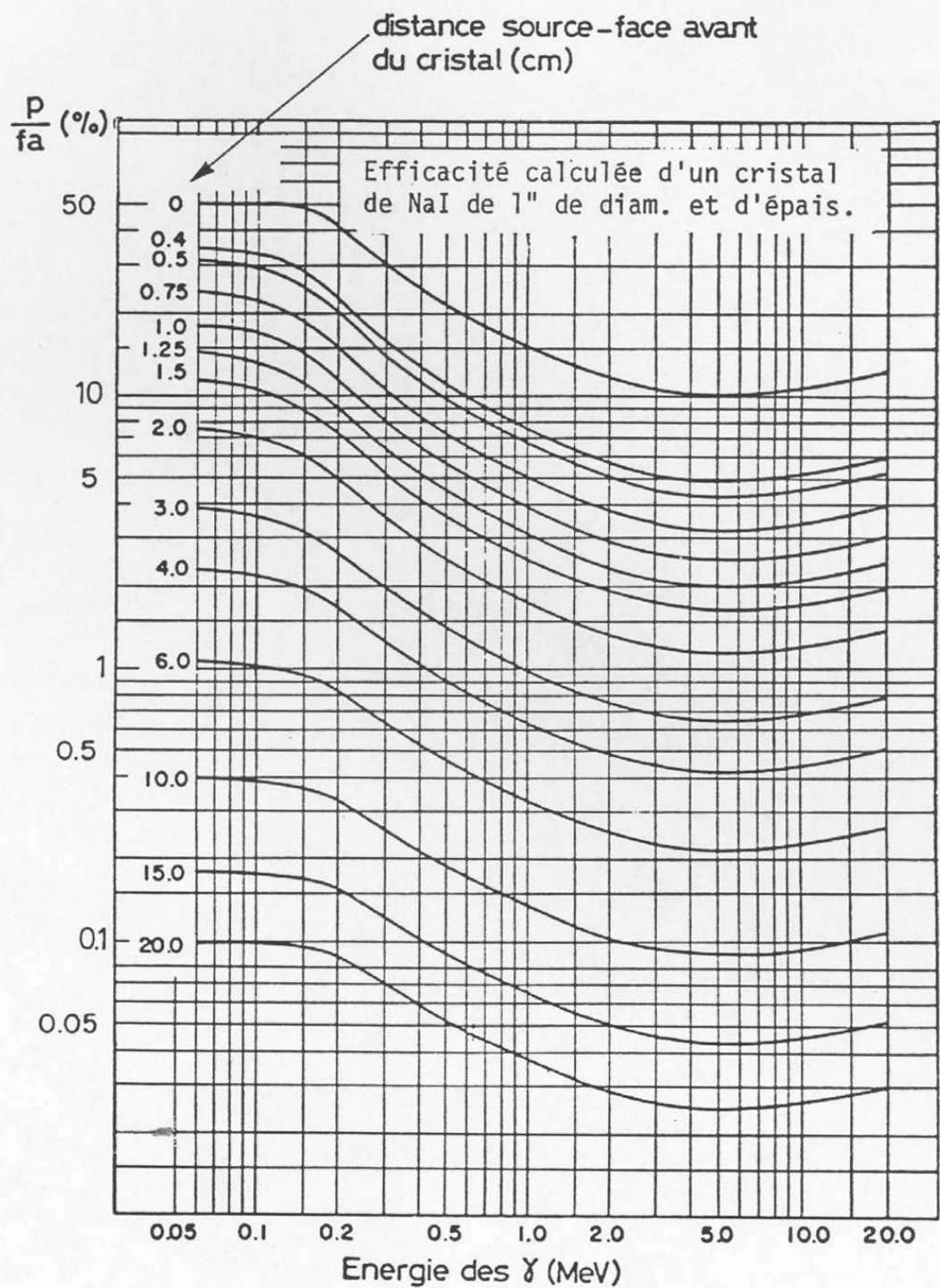


FIG. D.8 – Planche 8 : Efficacité calculée de NaI de 2,54 cm de diamètre et d'épaisseur

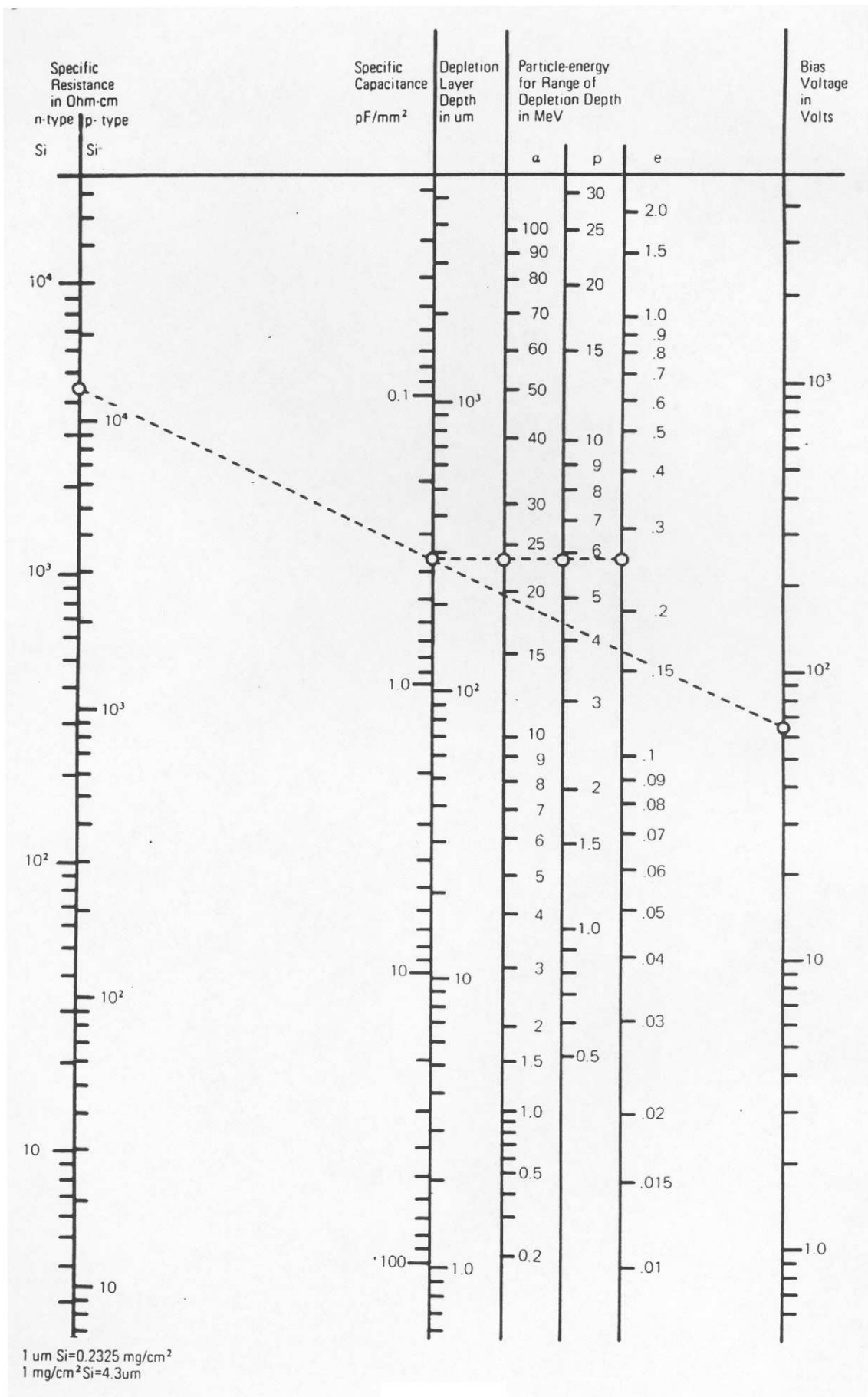


FIG. D.9 – Planche 9 : Caractéristique de fonctionnement d'un semicteur au Si

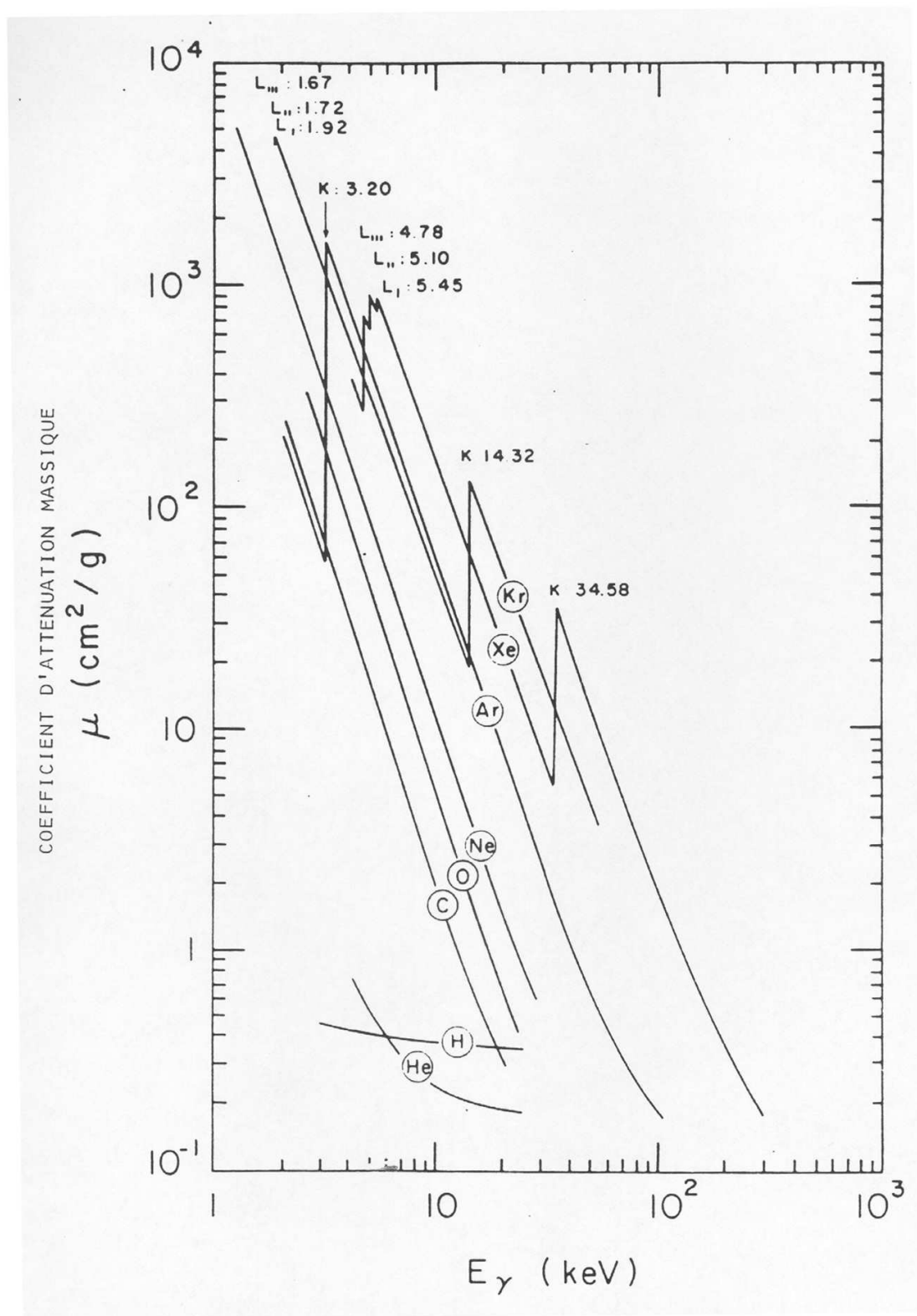


FIG. D.10 – Planche 10 : Coefficient d'atténuation massique pour certains gaz

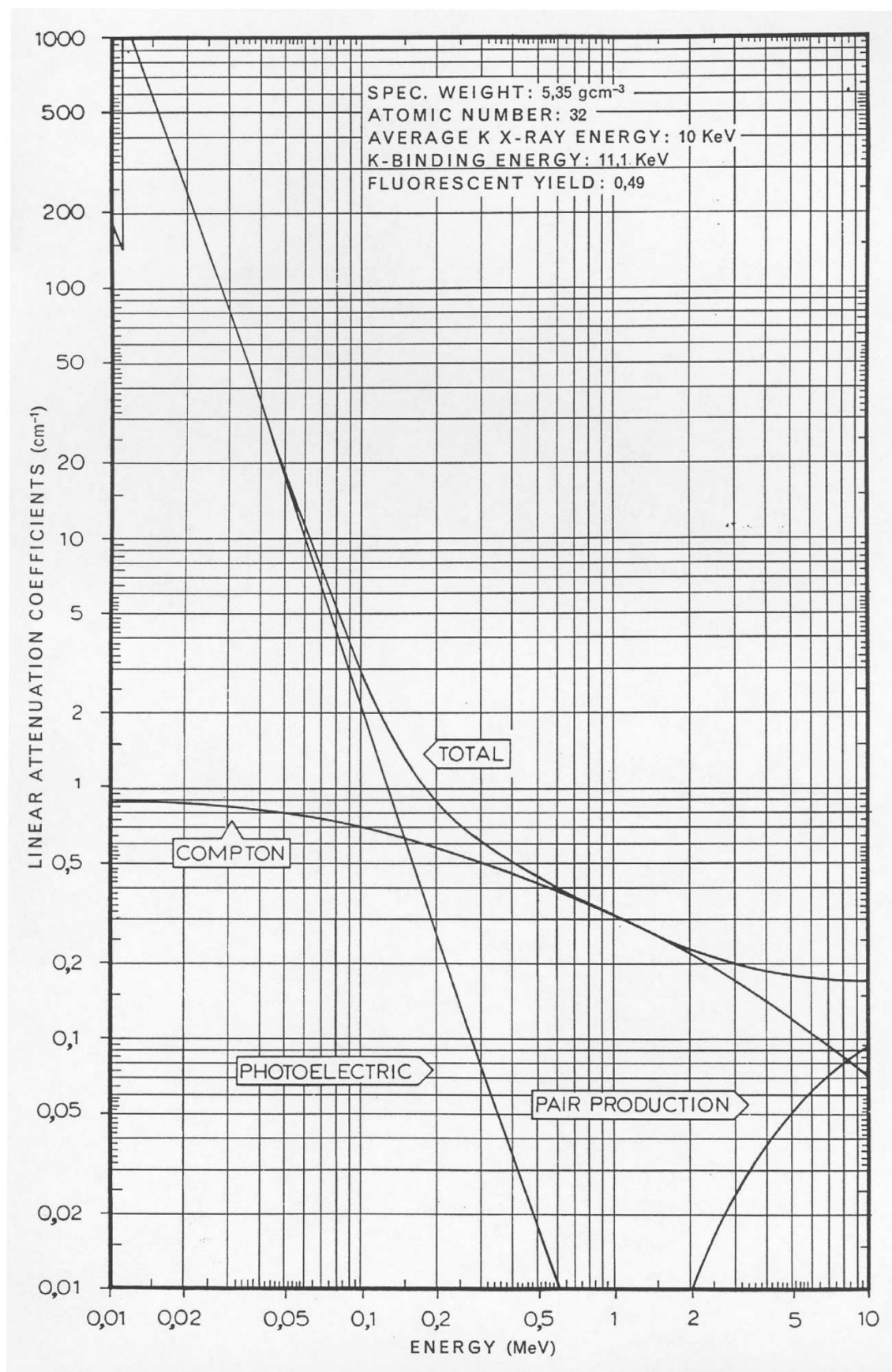


FIG. D.11 – Planche 11 : Coefficient d'atténuation linéaire du Germanium



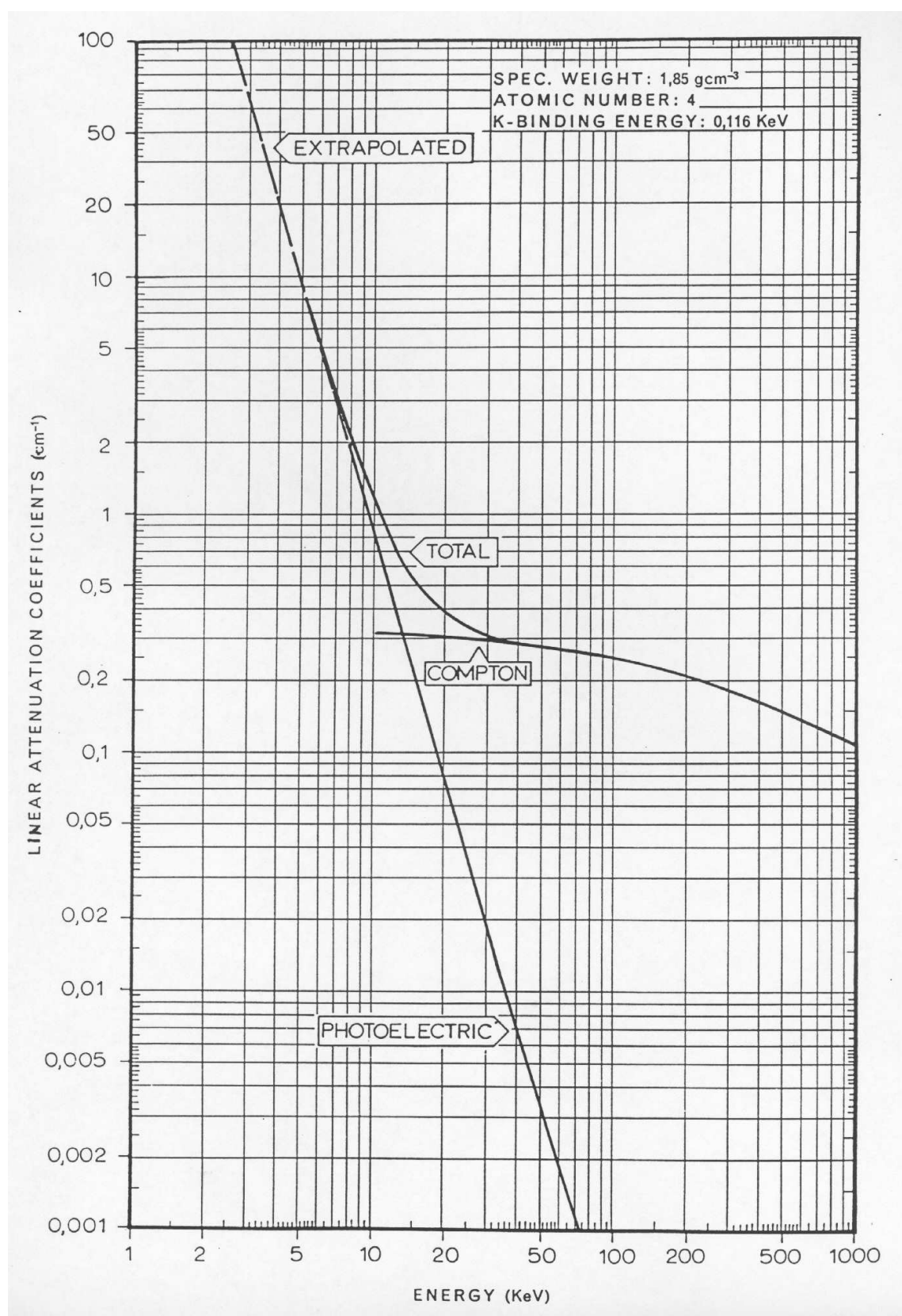


FIG. D.12 – Planche 12 : Coefficient d'atténuation linéaire du Beryllium





# Table des figures

1.1	Schéma de désintégration du $^{57}\text{Co}$ . . . . .	3
2.1	Chambre d'ionisation . . . . .	7
2.2	Compteur proportionnel . . . . .	8
2.3	Impulsions à la sortie d'un GM . . . . .	10
2.4	Différents domaines d'utilisation d'un détecteur à gaz . . . . .	11
2.5	Détecteur à scintillations . . . . .	12
2.6	Rendement relatif de scintillation en fonction de l'énergie perdue dans un scintillateur NE102A par des électrons, protons et alphas. Le rendement absolu pour des électrons est $\eta=3.7\%$	14
2.7	Alimentation et circuit d'anode d'un PM . . . . .	17
2.8	Forme de l'impulsion de tension sur l'anode du PM . . . . .	18
2.9	Élargissement d'une raie spectrale . . . . .	20
2.10	Jonction abrupte P-N à l'équilibre thermodynamique (ND, NA = concentration des atomes dopeurs) . . . . .	24
2.11	Zone de peuplement des N et P dans les semicteurs . . . . .	25
2.12	Comparaison de deux types de préamplificateurs . . . . .	27
3.1	Forme et caractéristique d'une impulsion . . . . .	30
3.2	Spectre intégral en fonction de $V_s$ . . . . .	33
3.3	Spectre intégral réel . . . . .	34
3.4	Spectre intégral et différentiel . . . . .	35
3.5	Sélection d'un signal au moyen de la largeur de bande . . . . .	36
3.6	Chaîne de détection . . . . .	38
4.1	Densité de probabilité de la loi binômiale . . . . .	42
4.2	Densité de probabilité de la loi de Poisson . . . . .	43
4.3	Densité de probabilité de la loi de Gauss . . . . .	44

4.4	Densité de probabilité de la loi du $\chi^2$ . . . . .	48
4.5	Nombre d'événement dans l'intervalle $\Delta t$ pour $t$ fixé . . . . .	53
4.6	Régression linéaire . . . . .	61
4.7	Zone de réjection pour le test de l'hypothèse du $\chi^2$ . . . . .	64
5.1	Césium 137 . . . . .	69
5.2	Sodium 22 . . . . .	70
5.3	Cobalt 60 . . . . .	71
5.4	Plomb 210 . . . . .	72
5.5	Cobalt 57 . . . . .	73
5.6	Strontium 90 . . . . .	74
5.7	Polonium 210 . . . . .	75
5.8	Américium 241 . . . . .	76
B.1	Distribution des temps de vie d'un état excité . . . . .	89
C.1	Principe de fonctionnement d'un dosimètre à thermoluminescence. . . . .	99
D.1	Planche 1 : Parcours des $\alpha$ , $t$ , $d$ , $p$ dans le Silicium . . . . .	102
D.2	Planche 2 : Parcours des $\alpha$ , $t$ , $d$ , $p$ dans le cristal NE102A . . . . .	103
D.3	Planche 3 : Relation entre l'énergie et le parcours des $e^-$ dans le Si . . . . .	104
D.4	Planche 4 : Coefficient d'atténuation linéaire du NaI . . . . .	105
D.5	Planche 5 : Coefficient d'atténuation linéaire pour les scintillateurs plastiques . . . . .	106
D.6	Planche 6 : Coefficient d'atténuation linéaire de l'Aluminium . . . . .	107
D.7	Planche 7 : Coefficient d'atténuation linéaire du Plomb . . . . .	108
D.8	Planche 8 : Efficacité calculée de NaI de 2,54 cm de diamètre et d'épaisseur . . . . .	109
D.9	Planche 9 : Caractéristique de fonctionnement d'un semicteur au Si . . . . .	110
D.10	Planche 10 : Coefficient d'atténuation massique pour certains gaz . . . . .	111
D.11	Planche 11 : Coefficient d'atténuation linéaire du Germanium . . . . .	112
D.12	Planche 12 : Coefficient d'atténuation linéaire du Beryllium . . . . .	113