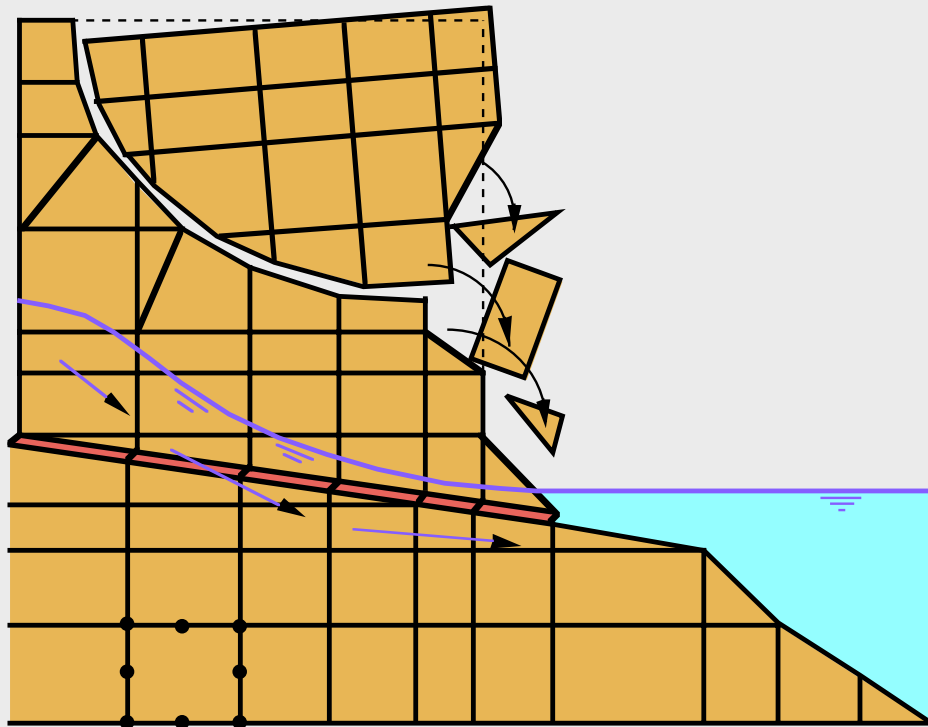


**Cycle postgrade:
Géologie Appliquée à l'Ingénierie et à
l'Environnement**

Michel Dysli

**B3-5: Introduction aux
éléments finis**

Documents distribués



2^{ème} édition, juin 1997

Document No	Titre
-	Buts du cours
1	Bibliographie
2	Scalaire, vecteur, tenseur
2a	Equations de contraintes et déformations (cours mécanique des sols B2-2)
3	Exemple d'un tenseur: le tenseur des contraintes
4	Les équations et leur solution
4a	Solution équations de contraintes et déformations (cours mécanique des sols B2-2)
5	Différences finies
5a	Calcul d'un écoulement souterrain avec un tableur
6	Eléments finis
7	Autres éléments finis
8	Exemples de discrétisation en éléments finis
8a	Exemples de discrétisation en éléments finis (suite)
9	Fonctions de transformation et d'interpolation
9a	Fonctions de transformation et d'interpolation (suite)
10	Matrices d'élasticité
11	Relations entre les noeuds et l'intérieur de l'élément (1 ^{ère} partie)
11a	Relations entre les noeuds et l'intérieur de l'élément (suite)
12	Détermination de la matrice déformation - déplacement
13	Application numérique
14	Application numérique (suite)
15	Principe de la résolution par la méthode des déplacements
16	FEM, BEM, KEM
Annexe	Rappel du calcul matriciel

Buts du cours "Introduction aux éléments finis" (8 heures):

- **Comprendre les principes de la méthode des éléments finis appliquée au calcul des contraintes et déformations et à celui des écoulements souterrains.**
- **Avoir les bases nécessaires pour s'en servir dans des cas simples.**

Et non pas :

Etre capable d'écrire des programmes sur ordinateur relatifs à cette méthode... Il faudrait pour cela un cours de 100 à 200 heures!

Méthode: approche physique par des cas particuliers

Bibliographie

1. Acquisitions conseillées

BATHE K.-J. (1996). *Finite element procedures*. Prentice-Hall.

BRITTO A. M., GUNN M. J. (1987). *Critical State Soil Mechanics via Finite Elements*. Ellis Horwood Limited, Halsted Press: a division of John Wiley & Sons,

DHATT G., TOUZOT G. (1984). *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Maloine SA Paris.

PRAT M. (1995). *La modélisation des ouvrages*, Hermès, Paris.

ZIENKIEWICZ O. C. (1979). *La méthode des éléments finis*. 3e éd., McGraw Hill.

ZIENKIEWICZ O. C. (1977). *The Finite Element Method*. 3rd ed., McGraw Hill.

2. Autres

CHEN W. F., MIZUNO E. (1990). *Nonlinear Analysis in Soil Mechanics*. Elsevier

DESAI C. S., SIRIWARDANE H. J. (1984). *Constitutive laws for engineering materials*. Prentice-Hall.

Des éditions plus récentes pourraient exister.

Scalaire, vecteur, tenseur

En physique, lorsqu'un simple nombre suffit à définir une grandeur (température, densité, module élastique, par ex.), ce nombre est un *scalaire*.

Si la grandeur a non seulement une dimension mais aussi une direction, on l'appellera alors *vecteur*. Une force, une accélération, un déplacement sont des vecteurs. Dans un système d'axes cartésien à 3 dimensions, il faut 3 composantes au moins pour définir un vecteur, soit par exemple deux angles et une intensité, ou 3 projections sur les axes du système choisi.

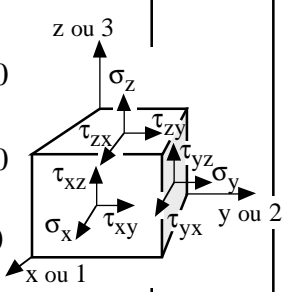
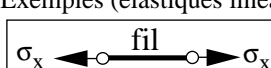
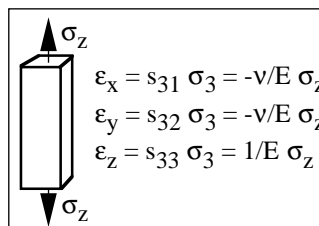
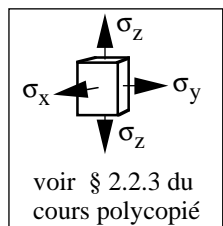
Une modification du système de référence induit une modification des 3 composantes définissant le vecteur. Il est cependant possible de dériver de ce vecteur une quantité scalaire qui est indépendante de sa direction. Par exemple, si l'on considère un vecteur déplacement de composantes d_1, d_2, d_3 , la grandeur de ce vecteur: $d = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}$ est indépendante de sa direction; c'est l'*invariant* du vecteur.

La notion de *tenseur* est plus abstraite. On pourrait lui donner la signification physique d'une représentation d'un champ: champ de vitesses, champ de contraintes par exemple. Dans la définition des composantes d'un tel champ, nous devons nous référer *deux fois* à des directions, par exemple, pour un champ de contrainte: premièrement à l'orientation du solide élémentaire et deuxièmement à l'orientation des contraintes proprement dites sur les faces de ce solide. Il faudrait donc $3 \cdot 3 = 9$ composantes pour définir un tel tenseur. Cependant un tenseur cartésien est symétrique et seules 6 composantes suffisent à le définir complètement.

Si pour un vecteur il est possible de dériver *un* invariant, un tenseur donne *trois* invariants dans un système à 3 dimensions.

Type	Scalaire	Vecteur	Tenseur
Ordre de la matrice	0	1	2
Exemple	pois volumique	déplacement	contrainte
Notations	γ	$\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$
Notations indicielles	γ	d_i	σ_{ij}
Nombre de composantes dans un système de coordonnées à 3 dimensions	3^0	$3^1 = 3$	$3^2 = 9$
Valeurs indépendantes	1	3	9 en général 6 avec symétrie: $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$
Invariants	1	1	3

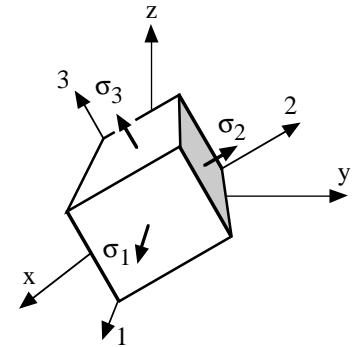
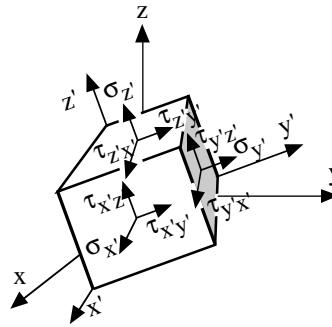
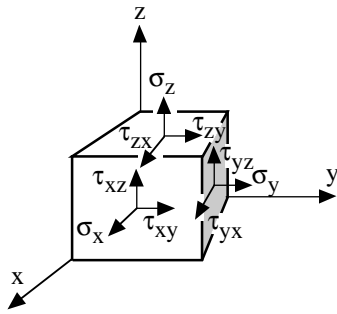
Les équations des contraintes et déformations

Notation indicielle (d'Einstein)	Notation xyz	Nbre équations	Nbre inconnues	
<p>1. Equations d'équilibre</p> $\frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i} + F_j = 0$ <p>$i = 1,2,3 =$ direction des normales aux faces $j = 1,2,3 =$ direction des axes</p> <p>$\sigma = \sigma' + u$ $u =$ pression interstitielle $F_j =$ force par unité de volume En général, F_x (ou F_1) = F_y (ou F_2) = 0 sauf si forces d'inertie (séisme par ex.) F_z (ou F_3) = $-\rho \cdot g$ car sol = milieu pesant</p>	$\frac{\partial \sigma'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} + F_x = 0$ <p>qui s'écrit habituellement :</p> $\frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} + F_x = 0$ $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} + F_y = 0$ $\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} + F_z = 0$ 	3	6 3 σ 3 τ $\tau_{ij} = \tau_{ji}$	
<p>2. Relations déformation-déplacement (équations géométriques)</p> $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ <p>$i = 1,2,3$ $j = 1,2,3$ $u_{i,j} =$ vecteur des déplacements</p> <p>Formulation de Lagrange : la position d'un point est décrite en fonction de ses coordonnées initiales (avant déformation).</p> <p>Par opposition à la formulation d'Euler où la position d'un point est décrite en fonction de ses coordonnées après déformation.</p>	$\epsilon_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}$ <p>$u_x = u ; u_y = v ; u_z = w$</p> $\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$ $\epsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \qquad \gamma_{xy} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$ $\gamma_{yz} = \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$ $\gamma_{zx} = \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)$	6	9 u, v, w $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$	
<p>3. Relations contrainte-déformation (lois constitutives, équations d'état, équations de déformabilité)</p> <p>$R(\epsilon_{ij}, \sigma_{ij}) = 0$ ou $\epsilon_{ij} = f(\sigma_{ij}) = s_{ij} \cdot \sigma_{ij}$ $i =$ direction des σ, τ $j =$ direction des ϵ</p> <p>$s_{ij} = \text{cte} \Rightarrow$ loi linéaire $s_{ij} = f(\sigma, \epsilon, t) \Rightarrow$ loi non linéaire</p> <p>s_{ij} est la matrice du matériau et son inverse s_{ij}^{-1} la matrice d'élasticité. s_{ij} est symétrique, elle a donc, pour le cas le plus général d'un matériau anisotrope : $36 - 15 = 21$ termes. Exemples (élastiques linéaires) :</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;">  <p>$\epsilon_x = s_{11} \sigma_x = 1/E \sigma_x$</p> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;">  <p>$\epsilon_x = s_{31} \sigma_3 = -\nu/E \sigma_3$ $\epsilon_y = s_{32} \sigma_3 = -\nu/E \sigma_3$ $\epsilon_z = s_{33} \sigma_3 = 1/E \sigma_3$</p> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;">  <p>voir § 2.2.3 du cours polycopié</p> </div> </div>		<p>Total intermédiaire</p>	9	15
		il manque 6 équations		
<p>$R(\epsilon_{ij}, \sigma_{ij}) = 0$ ou $\epsilon_{ij} = f(\sigma_{ij}) = s_{ij} \cdot \sigma_{ij}$</p> $\epsilon_{ij} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} \end{Bmatrix} \qquad \sigma_{ij} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix}$ $s_{ij} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ s_{21} & & & & & \\ s_{31} & & & & & \\ s_{41} & & & & & \\ s_{51} & & & & & \\ s_{61} & & & & & \end{bmatrix} \qquad \text{etc.}$	6	0		
		Total final	15	15

Exemple d'un tenseur: le tenseur des contraintes

1, 2, 3 = axes des contraintes principales

$\tau = 0$ sur les faces



tenseur des contraintes :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

avec: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$
 $\tau_{xz} = \tau_{zx}$
 $\tau_{zy} = \tau_{yz}$

tenseur des contraintes principales :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Invariants du tenseur des contraintes (sans démonstration)

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2$$

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2 \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2$$

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1$$

$$I_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$$

$$\sigma' = \sigma - u$$

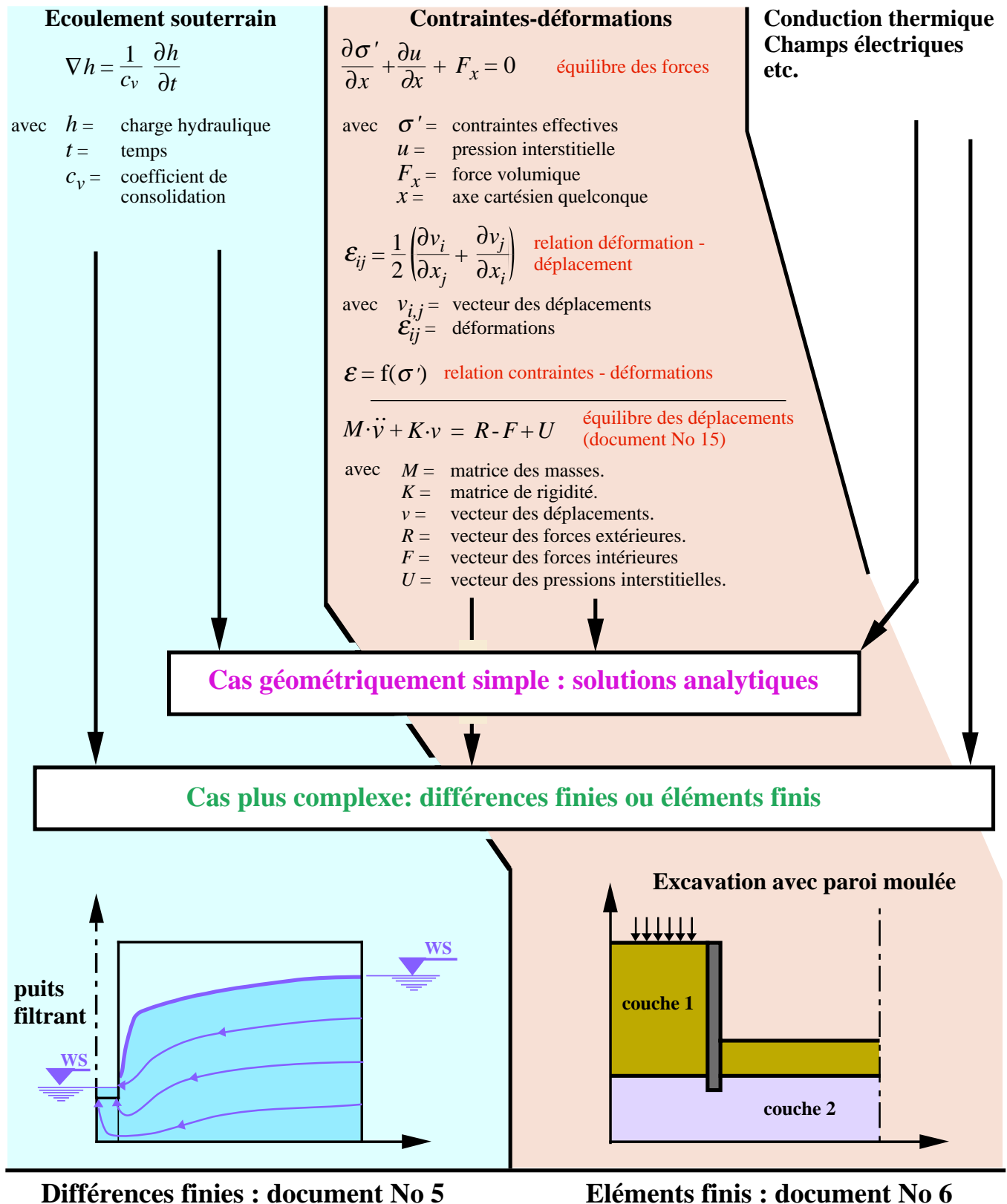
σ' = contrainte effective
 σ = contrainte totale
 u = pression interstitielle

$$\begin{bmatrix} \sigma'_x & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{yx} & \sigma'_y & \tau'_{yz} \\ \tau'_{zx} & \tau'_{zy} & \sigma'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma'_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{bmatrix}$$

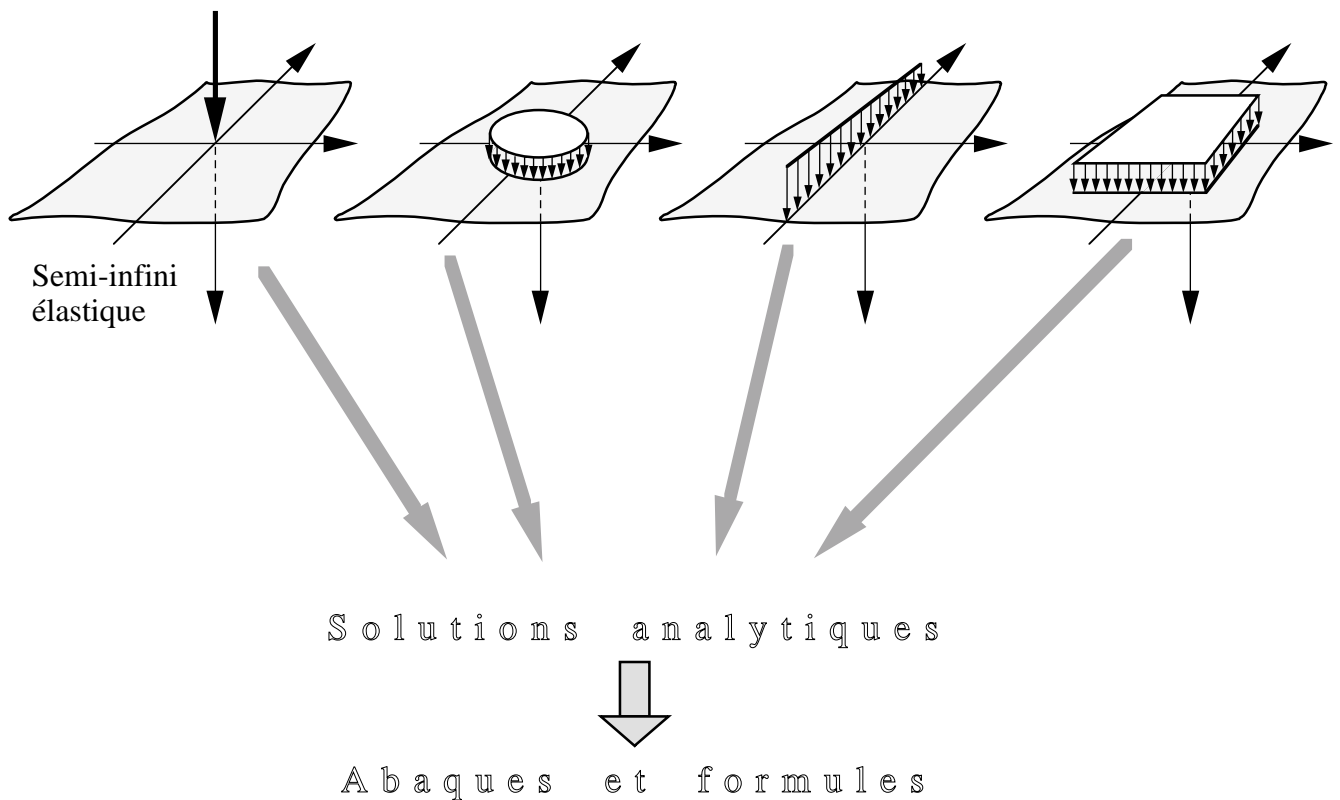
pression interstitielle =
 tenseur sphérique

Les équations et leur solution



Solution des équations de contraintes et déformations

Charges simples pouvant conduire à une solution analytique :

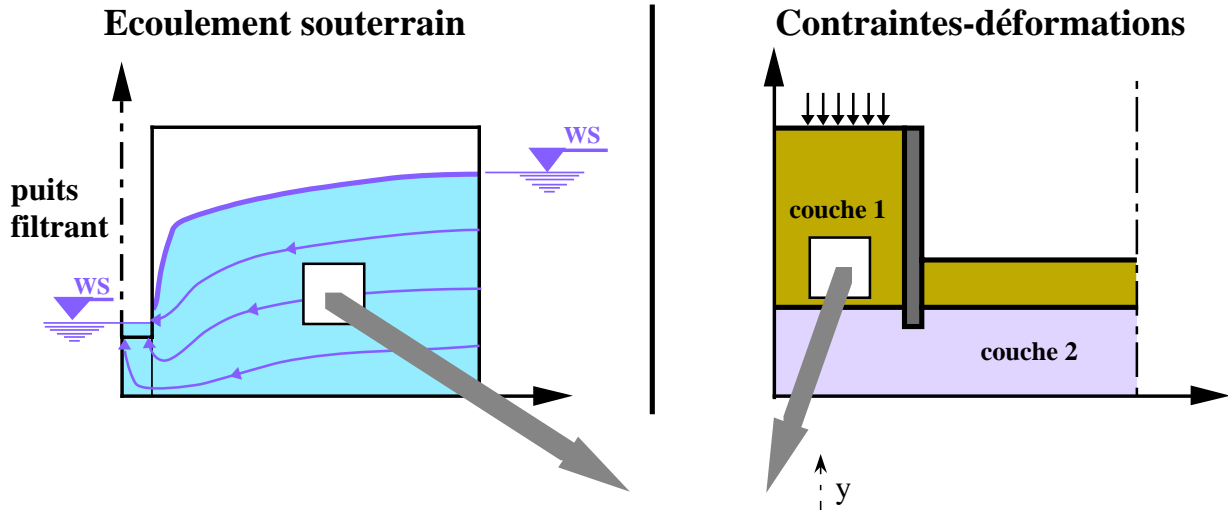


Recordon Ed. (1980). Abaques du cours photocopié de mécanique des sols de l'EPFL.

Giroud J.-P. (1975). Tables pour le calcul des fondations, Tomes 1 et 2. Dunod, Paris.

Poulos H. G., Davis E. H. (1974). Elastic solutions for soil and rock mechanics. John Wiley & Sons.

Différences finies

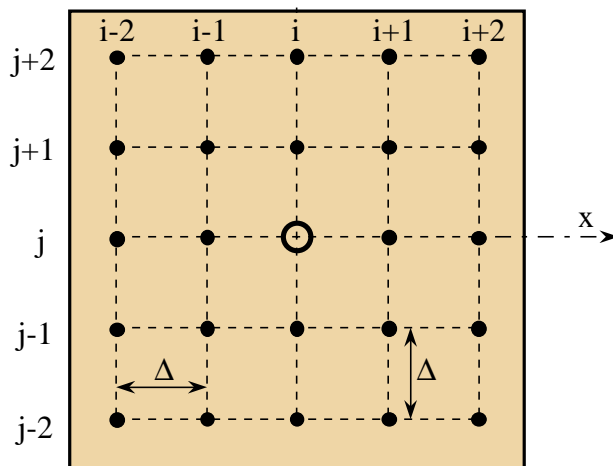


$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{F_{i+1,j} - F_{i-1,j}}{2\Delta}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{F_{i,j+1} - F_{i,j-1}}{2\Delta}$$

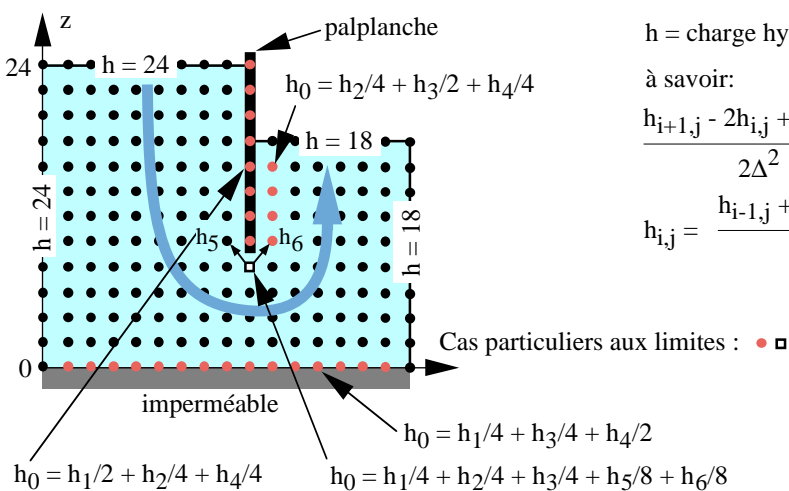
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{F_{i+1,j} - 2F_{i,j} + F_{i-1,j}}{2\Delta^2}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{F_{i,j+1} - 2F_{i,j} + F_{i,j-1}}{2\Delta^2}$$



F = contraintes, déformations, déplacements, températures, pressions, moments, charge hydraulique, etc.

Exemple: écoulement souterrain

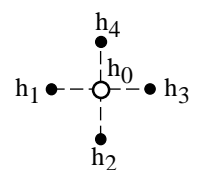


Equation pour régime permanent: $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$

h = charge hydraulique = z + u / γ_w avec u = pression interstitielle
 à savoir:

$$\frac{h_{i+1,j} - 2h_{i,j} + h_{i-1,j}}{2\Delta^2} + \frac{h_{i,j+1} - 2h_{i,j} + h_{i,j-1}}{2\Delta^2} = 0$$

$$h_{i,j} = \frac{h_{i-1,j} + h_{i,j-1} + h_{i+1,j} + h_{i,j+1}}{4} \quad \text{ou} \quad h_0 = \frac{h_1 + h_2 + h_3 + h_4}{4}$$

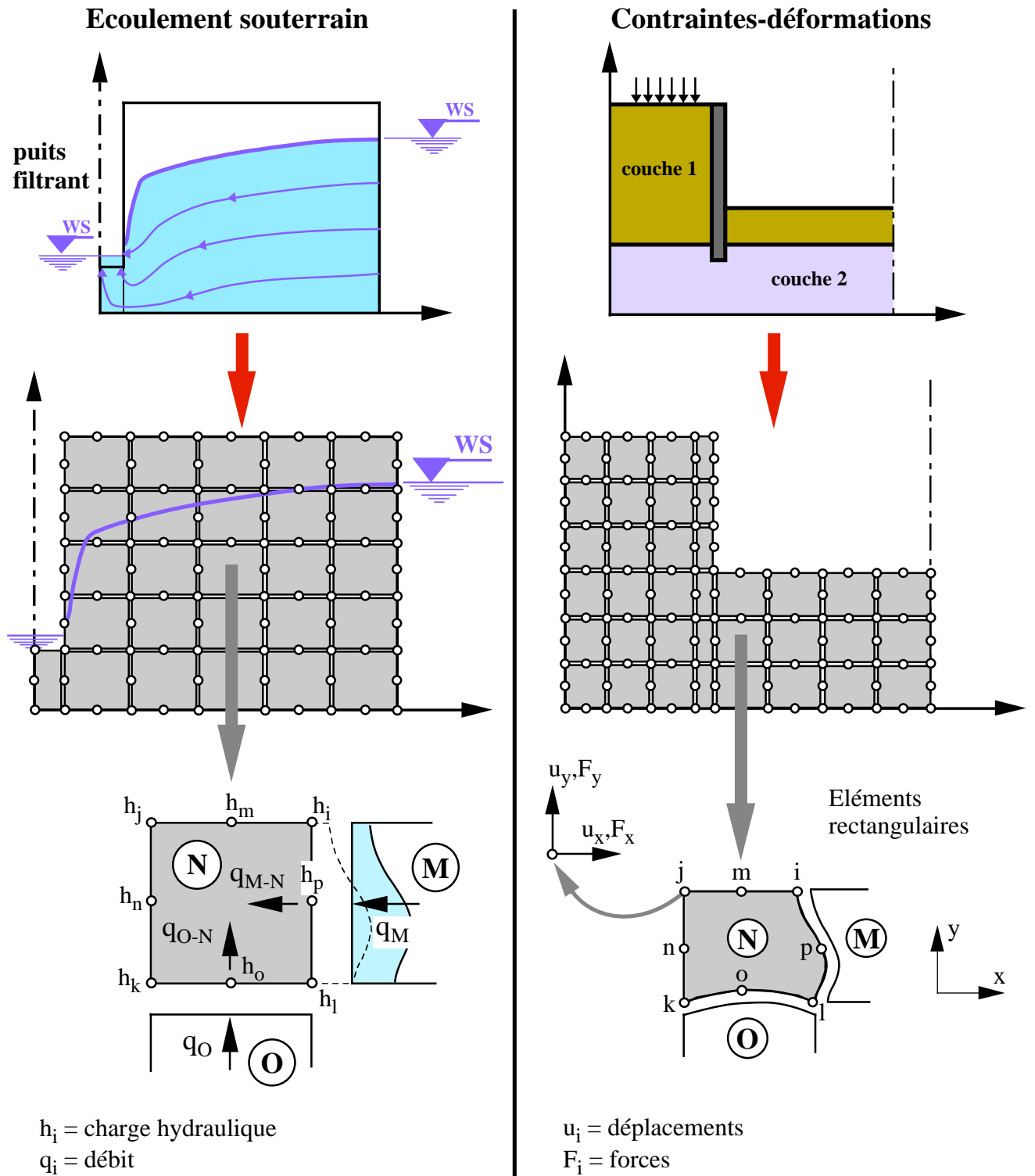


Excellent moyen = tableur

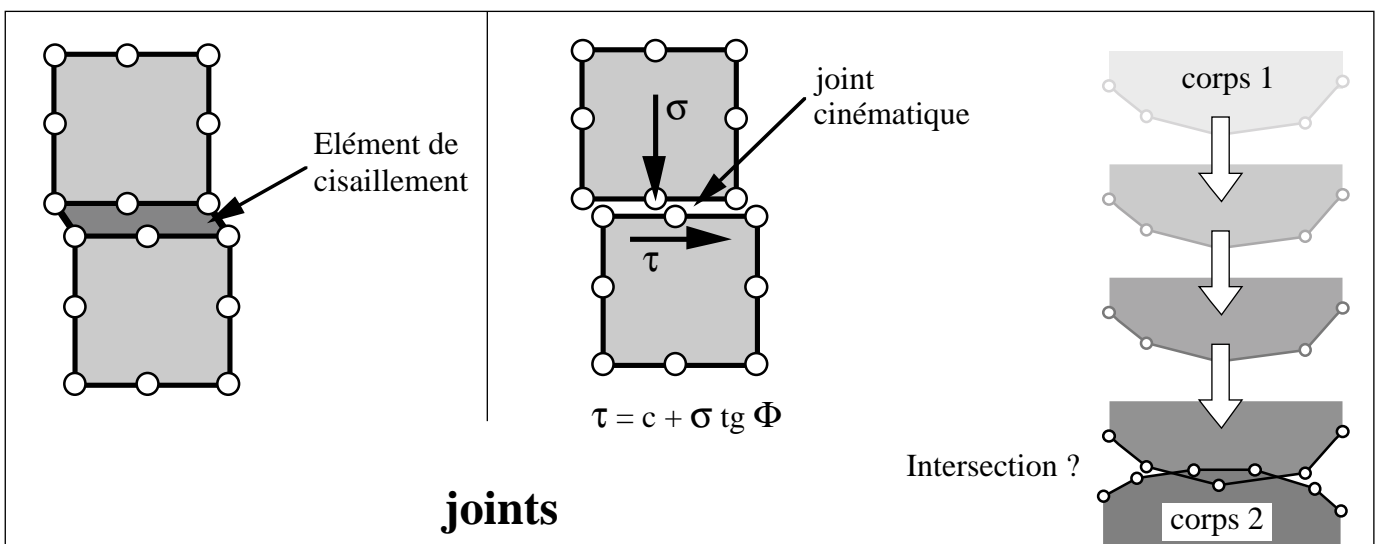
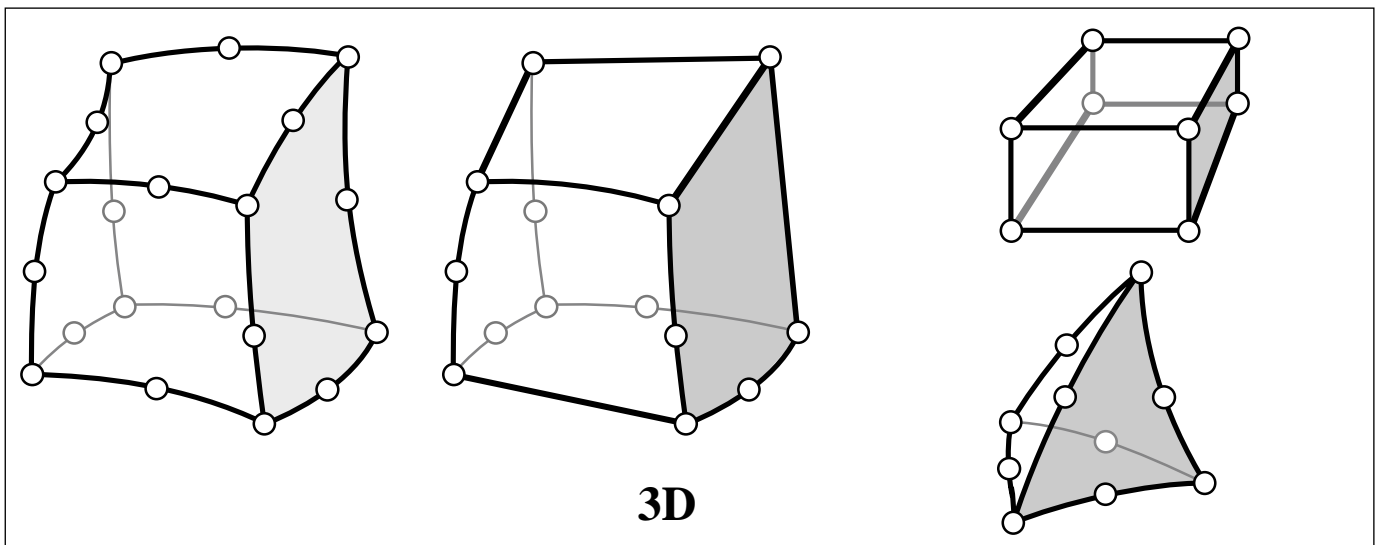
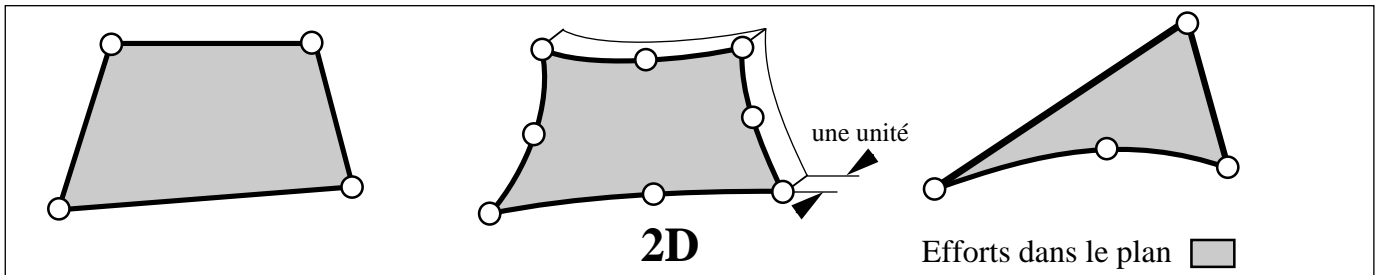
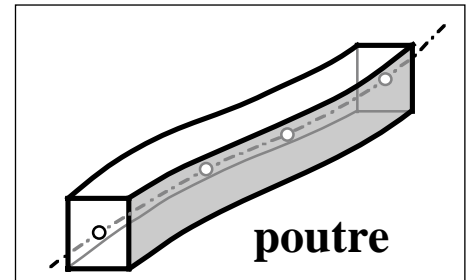
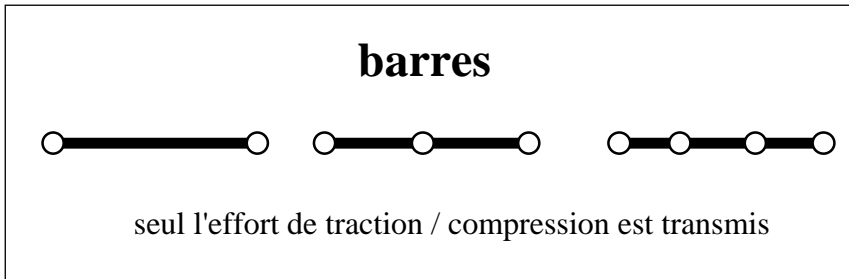
Calcul d'un écoulement souterrain avec un tableur

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1								x						
2	z	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
3	24	24	24	24	24	24	24	24						
4	22	24	23.92	23.83	23.75	23.67	23.61	23.59						
5	20	24	23.83	23.66	23.49	23.32	23.19	23.14						
6	18	24	23.74	23.48	23.21	22.94	22.70	22.57	18	18	18	18	18	18
7	16	24	23.66	23.31	22.94	22.53	22.10	21.75	18.36	18.32	18.25	18.17	18.08	18
8	14	24	23.59	23.16	22.70	22.15	21.42	20.21	18.81	18.68	18.51	18.33	18.16	18
9	12	24	23.54	23.05	22.53	21.94	21.23	20.37	19.53	19.08	18.76	18.49	18.24	18
10	10	24	23.50	22.98	22.44	21.85	21.20	20.51	19.86	19.36	18.96	18.62	18.30	18
11	8	24	23.48	22.94	22.39	21.82	21.22	20.61	20.04	19.54	19.10	18.71	18.35	18
12	6	24	23.47	22.92	22.37	21.81	21.24	20.68	20.14	19.65	19.20	18.78	18.39	18
13	4	24	23.46	22.91	22.36	21.81	21.26	20.72	20.20	19.71	19.25	18.82	18.41	18
14	2	24	23.46	22.91	22.36	21.82	21.28	20.75	20.23	19.74	19.28	18.84	18.42	18
15	0	24	23.46	22.91	22.36	21.82	21.29	20.76	20.24	19.75	19.29	18.85	18.42	18
16														
17														
18					=(E9+F10+G9+F8)/4									

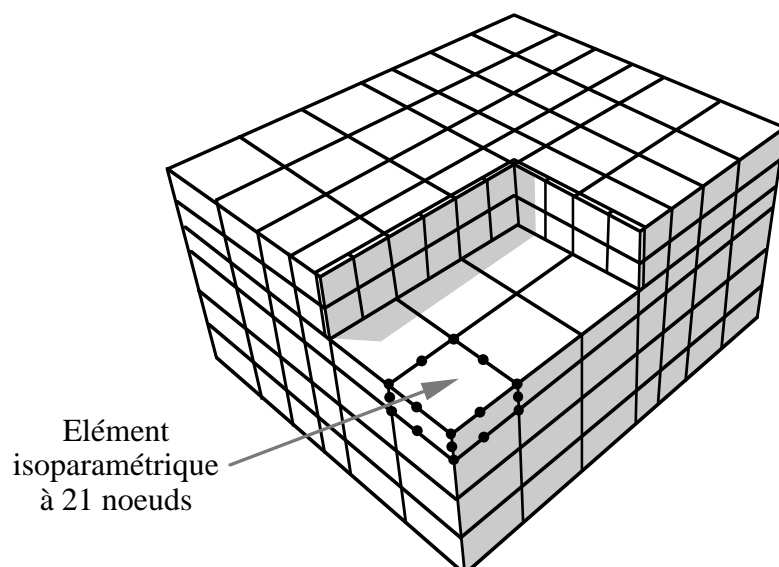
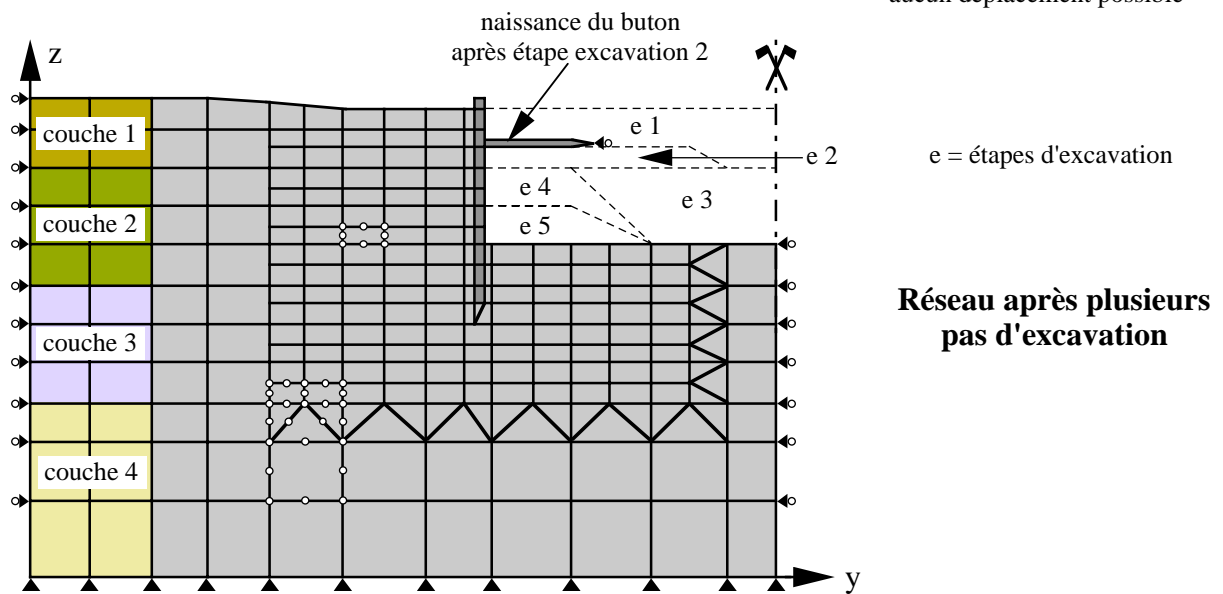
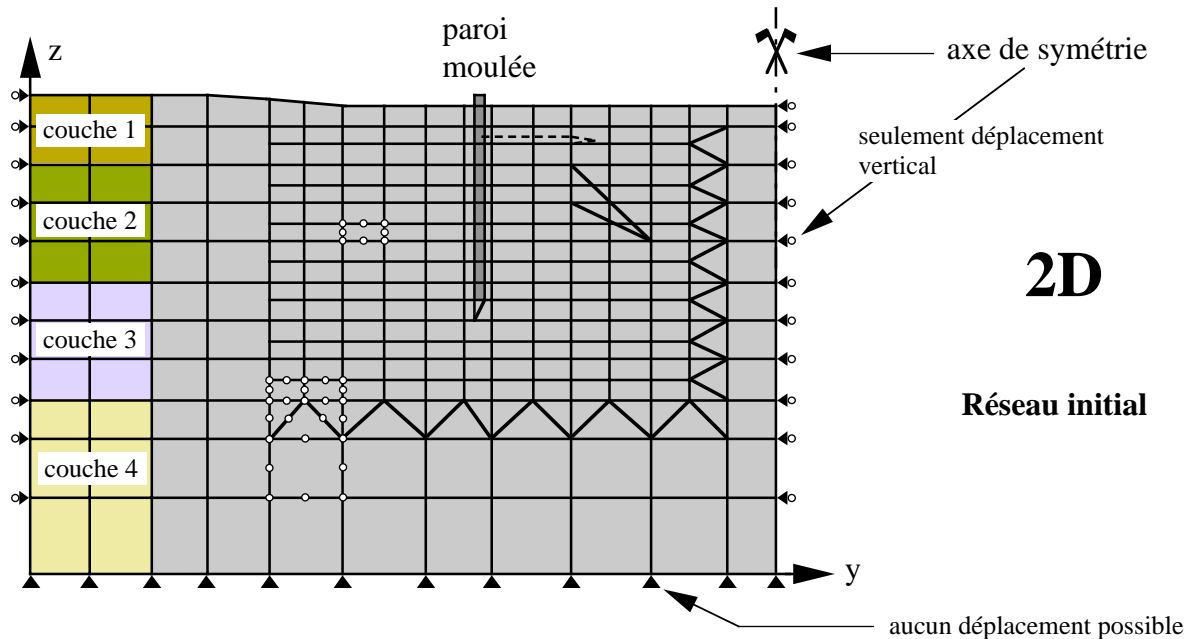
Eléments finis



Autres éléments finis exemples parmi de nombreux autres



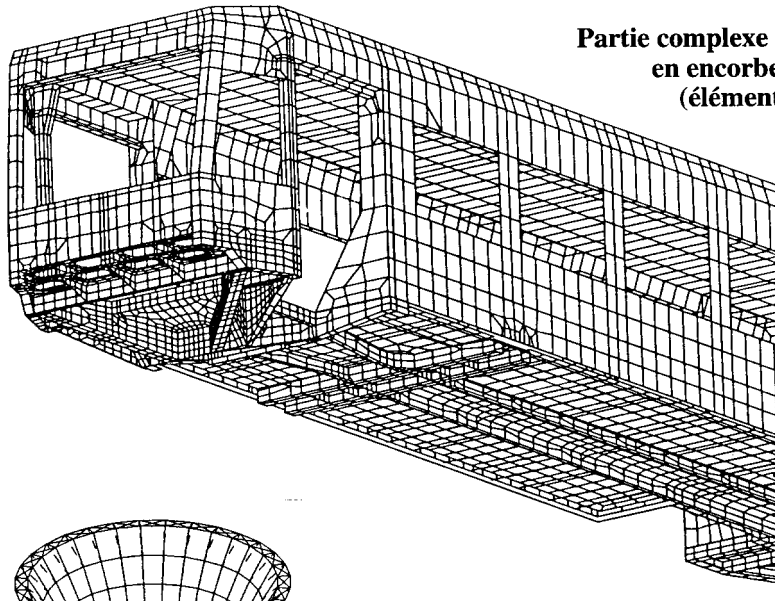
Exemples de discrétisation en éléments finis



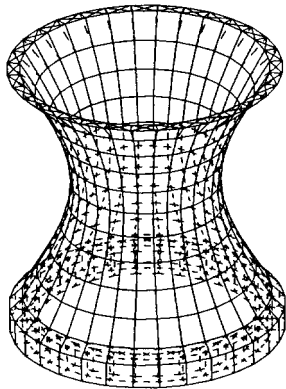
De par la symétrie seul 1/4 de l'excavation est modélisée

3D

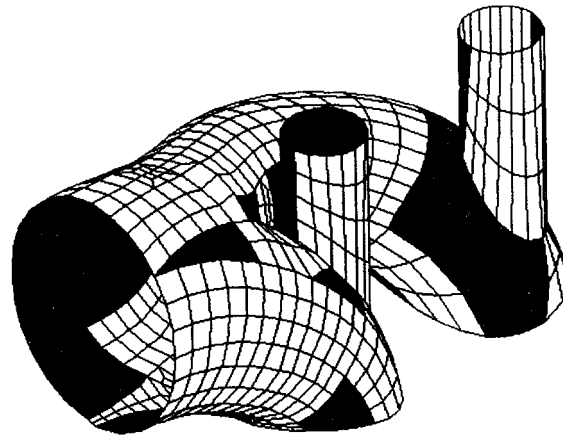
Exemples de discrétisation en éléments finis (suite)



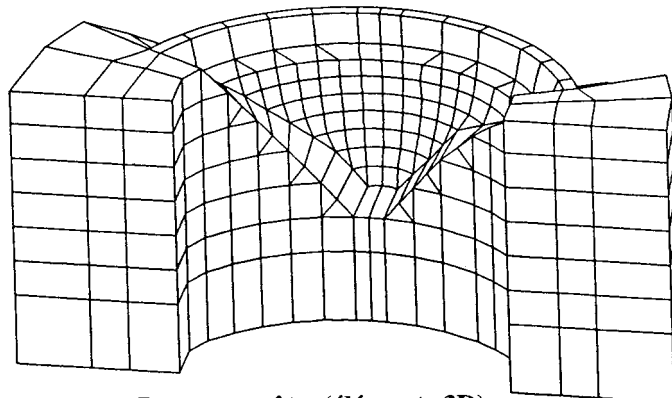
Partie complexe d'un bâtiment
en encorbellement
(éléments 3D)



Tour de refroidissement
(coque 3D)



Coque complexe

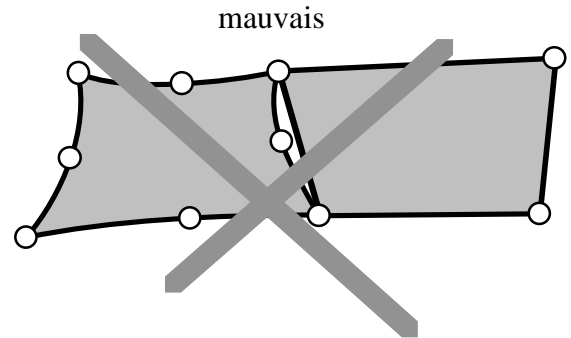
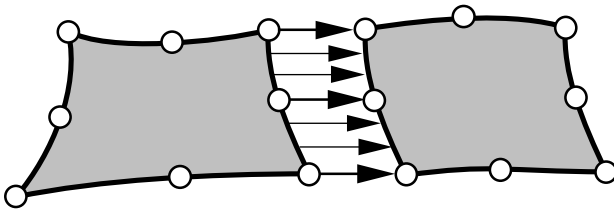


Barrage voûte (éléments 3D)

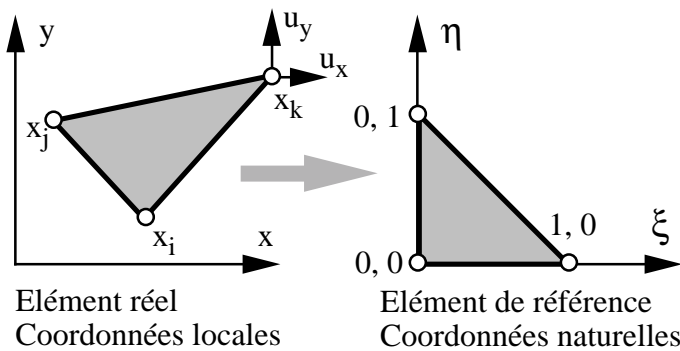
Fonctions de transformation et d'interpolation (1^{ère} partie)

Approche très simple n'utilisant que les forces, les déplacements, les contraintes et les déformations. Les mêmes principes s'appliquent par analogie aux écoulements souterrains et à tous les autres champs.

1) Compatibilité des déplacements entre les côtés de deux éléments voisins



2) Fonction de transformation géométrique: Transformation des coordonnées réelles en coordonnées de référence Exemple pour un élément triangulaire



$\bar{h}(\xi) =$ fonction de transformation géométrique

Par exemple, pour l'élément triangulaire :

$$x(\xi, \eta) = \bar{h}_1(\xi, \eta) \cdot x_i + \bar{h}_2(\xi, \eta) \cdot x_j + \bar{h}_3(\xi, \eta) \cdot x_k$$

$$x(\xi, \eta) = \{\bar{h}\} \begin{Bmatrix} x_i \\ x_j \\ x_k \end{Bmatrix}$$

De la même manière :

$$y(\xi, \eta) = \{\bar{h}\} \begin{Bmatrix} y_i \\ y_j \\ y_k \end{Bmatrix}$$

Fonctions de transformation et d'interpolation (suite)

Approche très simple n'utilisant que les forces, les déplacements, les contraintes et les déformations. Les mêmes principes s'appliquent par analogie aux écoulements souterrains et à tous les autres champs.

3) Fonctions d'interpolation:

Passage des valeurs aux noeuds (variables nodales) à celles en tout point d'un élément

Exemple pour un élément triangulaire

$u_{i,j,k}$ = variables nodales = variables attachées aux noeuds de l'élément réel comme des déplacements, des forces ou une pression interstitielle.

Passage des valeurs aux noeuds (variables nodales u) à celles en tout point x,y ou ξ,η du triangle :

$$u(x,y) = \{h_1(x,y) \quad h_2(x,y) \quad h_3(x,y)\} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{Bmatrix}$$

$$u(\xi,\eta) = \{h_1(\xi,\eta) \quad h_2(\xi,\eta) \quad h_3(\xi,\eta)\} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{Bmatrix}$$

$h(\xi,\eta)$ = fonction d'interpolation sur l'élément de référence

$h(x)$ = fonction d'interpolation sur l'élément réel

Pour le triangle (interpolation linéaire) :

Pour le triangle (interpolation linéaire) :

$$h_1(x,y) = \frac{1}{2A} [(y_k - y_j)(x_j - x) - (x_k - x_j)(y_j - y)]$$

$$h_1(\xi,\eta) = 1 - \xi - \eta$$

$$h_2(x,y) = \frac{1}{2A} [(y_i - y_k)(x_k - x) - (x_i - x_k)(y_k - y)]$$

$$h_2(\xi,\eta) = \xi$$

$$h_3(x,y) = \frac{1}{2A} [(y_j - y_i)(x_i - x) - (x_j - x_i)(y_i - y)]$$

$$h_3(\xi,\eta) = \eta$$

$$2A = (x_k - x_j)(y_i - y_j) - (x_i - x_j)(y_k - y_j)$$

Elément:	
isoparamétrique	$\bar{h}(\xi) = h(\xi)$
sub-paramétrique	ordre $\bar{h}(\xi) <$ ordre $h(\xi)$
super-paramétrique	ordre $\bar{h}(\xi) >$ ordre $h(\xi)$

4) Jacobien

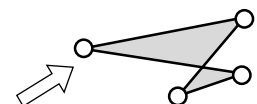
Toutes les expressions des fonctions d'interpolation qui impliquent des dérivées de u (variable nodale) en x, y sont transformées en dérivées de ξ et η grâce à la matrice de transformation dite *matrice jacobienne* ou *Jacobien J* :

u = quelque chose

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

$$\{\partial_\xi\} = [J] \cdot \{\partial_x\}$$

$$\{\partial_x\} = [J]^{-1} \cdot \{\partial_\xi\}$$



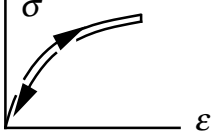
Problème lors de l'inversion si, par exemple, le déterminant de J est nulle

Matrices d'élasticité

Forme générale de la relation $\sigma - \epsilon$ pour un corps élastique:

Première solution: décomposition du tenseur des contraintes en un tenseur sphérique σ_m et en un tenseur déviatorique σ_o . Les tenseurs correspondant des déformations sont ϵ_m et ϵ_o .

L'indice o de σ et ϵ est la lettre o et non pas le chiffre 0.

élasticité linéaire:	élasticité non linéaire :	
$\sigma_m = 3K \cdot \epsilon_m$	$\dot{\sigma}_m = 3K \cdot \dot{\epsilon}_m$	
$\sigma_o = 2G \cdot \epsilon_o$	$\dot{\sigma}_o = 2G \cdot \dot{\epsilon}_o$	

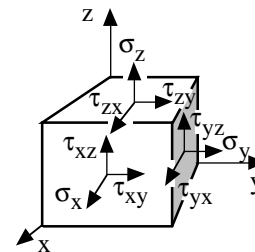
avec :

K = coefficient de compressibilité
 [kPa par ex.]

G = module de glissement ou de cisaillement [kPa]

Deuxième solution: usage de vecteurs de contraintes et de déformations

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ s_{21} & & & & & \\ s_{31} & & & & & \\ s_{41} & & & & & \\ s_{51} & & & & & \\ s_{61} & & & & & \end{bmatrix} \text{ etc.}$$



$\epsilon_{ij} = s_{ij} \cdot \sigma_{ij}$ et $\sigma_{ij} = s_{ij}^{-1} \cdot \epsilon_{ij}$ forme la plus utilisée
 s_{ij}^{-1} est l'inverse de la matrice s_{ij}

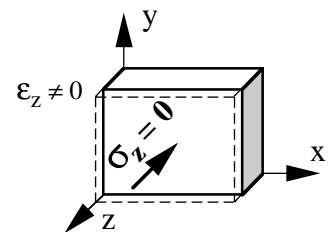
Rappel: $\sigma_{xy} = \tau_{xy}$
 $2\epsilon_{xy} = \gamma_{xy}$

Simplifications (2D)

Contraintes planes ($\sigma_z = 0$)

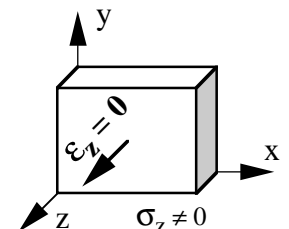
$$\sigma_{ij} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad \epsilon_{ij} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \sigma_{ij} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \epsilon_{ij} = [D] \cdot \epsilon_{ij}$$

$D = \text{matrice d'élasticité}$



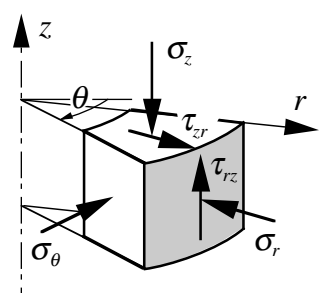
Déformations planes ($\epsilon_z = 0$)

$$\sigma_{ij} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad \epsilon_{ij} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \sigma_{ij} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \epsilon_{ij} = [D] \cdot \epsilon_{ij}$$



Symétrie de révolution

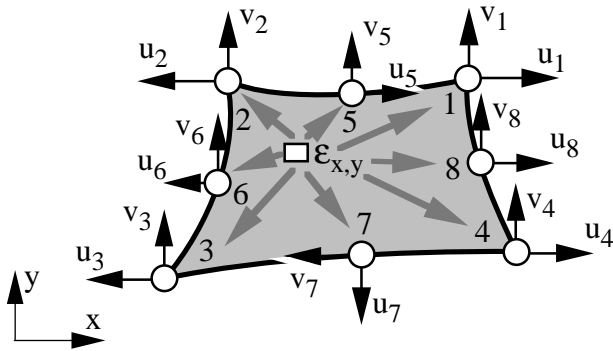
$$\sigma_{ij} = \begin{Bmatrix} \sigma_z \\ \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} \quad \epsilon_{ij} = \begin{Bmatrix} \epsilon_z \\ \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} \quad \sigma_{ij} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ 0 & 1-\nu & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \epsilon_{ij}$$



Relations entre les noeuds et l'intérieur de l'élément (1^{ère} partie)

Approche très simple n'utilisant que les forces, les déplacements, les contraintes et les déformations.

1) Relation entre les déformations à l'intérieur de l'élément et les déplacements aux noeuds : Matrice des déformations - déplacements



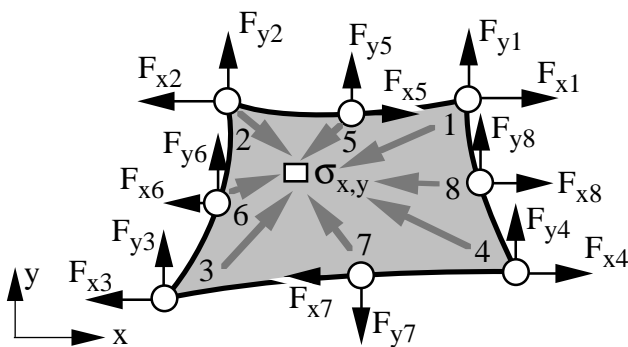
document No 35 module B22 : $\varepsilon(x,y) = \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{matrix} \right\}$

Une matrice B différente pour chaque point x,y

$$\{\varepsilon(x,y)\} = [B(x,y)] \begin{Bmatrix} u_{\text{noeuds}} \\ v_{\text{noeuds}} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Dimensions (lignes · colonnes):			
\mathcal{E}	B	u, v	
3	3·6	6	élément triangulaire à 3 noeuds
3	3·8	8	élément rectangulaire à 4 noeuds
3	3·16	16	élément rectangulaire à 8 noeuds

2) Relation entre les contraintes à l'intérieur de l'élément et les forces aux noeuds : Matrice des forces aux noeuds - contraintes



$$\sigma(x,y) = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\{F_{\text{noeuds}}\} = [C(x,y)] \{\sigma(x,y)\} \quad (2)$$

Dimensions (lignes · colonnes):			
F	C	σ	
6	6·3	3	élément triangulaire à 3 noeuds
8	8·3	3	élément rectangulaire à 4 noeuds
16	16·3	3	élément rectangulaire à 8 noeuds

Pas utilisée par la suite

3) Points de Gauss et méthode des résidus pondérés

Dans le cas de l'élément isoparamétrique avec $h = h > 1$ (par exemple interpolation cubique) on peut utiliser, pour passer des déplacements aux noeuds aux déformations à l'intérieur de l'élément, la méthode d'intégration numérique de Gauss qui permet de calculer, avec une très bonne approximation, les déformations et les contraintes en des points déterminés: les *points de Gauss*, dont les positions permettent d'obtenir la précision maximale.

La méthode de Gauss fait partie d'un ensemble de méthodes dénommé: *méthode des résidus pondérés*. Cette méthode générale d'intégration numérique – qui utilise des fonctions de pondérations – permet de passer d'un système d'équations aux dérivées partielles à une formulation intégrale en utilisant les *fonctions de d'interpolation* (polynomiale par exemple). La précision de la formulation intégrale dépend de la position du point considéré dans l'élément. Ces formulations intégrales sont nombreuses, par exemple:

- méthode de Gauss déjà citée
- méthode de Ritz
- méthode de Legendre
- méthode de Galerkin (à la mode aujourd'hui!)
- méthode de Newton-Cotes

} = environ Gauss
 => différente des autres et moins précises.

Dans la relation $\{\varepsilon(x,y)\} = [B(x,y)] \begin{Bmatrix} u_{\text{noeuds}} \\ v_{\text{noeuds}} \end{Bmatrix}$, la matrice B est formée de termes provenant des fonctions de pondérations, des fonctions d'interpolation et des fonctions de transformation géométrique. Un exemple de constitution de cette matrice est donné sur le document no 12.

Relations entre les noeuds et l'intérieur de l'élément (suite)

Approche très simple n'utilisant que les forces, les déplacements, les contraintes et les déformations.

4) Relation forces - déplacements avec usage de la matrice d'élasticité **D** et de la matrice **B**

$$\{F_{noeuds}\} = [K] \begin{Bmatrix} u_{noeuds} \\ v_{noeuds} \end{Bmatrix} \quad (3) \quad \text{avec } [K] = \text{matrice de rigidité de l'élément}$$

Dimensions de K (lignes · colonnes):	
6·6	élément triangulaire à 3 noeuds
8·8	élément rectangulaire à 4 noeuds
16·16	élément rectangulaire à 8 noeuds

$$[K] = \int_S [B]^T [D] [B] dS \quad (4) \quad \text{sans démonstration, intégration sur le surface de l'élément}$$

$$dS = \det[J] d\xi d\eta \quad (5) \quad \xi, \eta = \text{coordonnées naturelles, } J = \text{Jacobien (document 9a), } \det = \text{déterminant}$$

$$[K] = \int_S [A] d\xi d\eta \quad (6) \quad \text{avec } [A] = [B]^T [D] [B] \det [J]$$

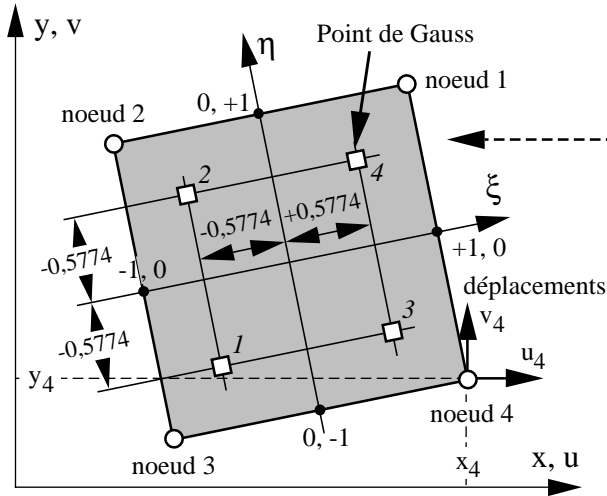
$$[K] = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} [A]_{i,j} \quad (7) \quad \text{ou } [A]_{i,j} \text{ est évaluée à chaque point } \xi_i \text{ et } \eta_i$$

$[\alpha]_{i,j}$ sont des constantes qui dépendent des valeur de ξ_i et η_i (intégration de Gauss)

Il reste à assembler tous les éléments. La méthode générale utilisée pour cela fait l'objet du document 15. Nous allons avant dire encore quelques mots sur les méthodes d'intégration numérique, dont celle de Gauss (document 12).

Détermination de la matrice déformation - déplacement

Deux dimension, élément à 4 noeuds avec 4 points d'intégration (degré n = 2)



Fonctions d'interpolation:		(sans démonstration)				
Noeuds :	4	5	6	7	8	9
$h_1 = 1/4 (1 + \xi)(1 + \eta)$		$-1/2h_5$	$-1/2h_8$	$-1/4h_9$
$h_2 = 1/4 (1 - \xi)(1 + \eta)$		$-1/2h_5$	$-1/2h_6$			$-1/4h_9$
$h_3 = 1/4 (1 - \xi)(1 - \eta)$		$-1/2h_6$	$-1/2h_7$		$-1/4h_9$
$h_4 = 1/4 (1 + \xi)(1 - \eta)$		$-1/2h_7$	$-1/2h_8$	$-1/4h_9$
$h_5 = 1/2 (1 - \xi^2)(1 + \eta)$		$-1/4h_9$
$h_6 = 1/2 (1 - \xi)(1 - \eta^2)$		$-1/4h_9$
$h_7 = 1/2 (1 - \xi^2)(1 - \eta)$		$-1/4h_9$
$h_8 = 1/2 (1 + \xi)(1 - \eta^2)$		$-1/4h_9$
$h_9 = 1/2 (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$		$-1/4h_9$

$$z = h_1 z_1 + h_2 z_2 + h_3 z_3 + \dots + h_i z_i \text{ avec } z = x, y, u \text{ ou } v$$

ainsi:
$$\begin{aligned} x &= 1/4 (1 + \xi)(1 + \eta)x_1 + 1/4 (1 - \xi)(1 + \eta)x_2 + 1/4 (1 - \xi)(1 - \eta)x_3 + 1/4 (1 + \xi)(1 - \eta)x_4 \\ y &= 1/4 (1 + \xi)(1 + \eta)y_1 + 1/4 (1 - \xi)(1 + \eta)y_2 + 1/4 (1 - \xi)(1 - \eta)y_3 + 1/4 (1 + \xi)(1 - \eta)y_4 \\ u &= 1/4 (1 + \xi)(1 + \eta)u_1 + 1/4 (1 - \xi)(1 + \eta)u_2 + 1/4 (1 - \xi)(1 - \eta)u_3 + 1/4 (1 + \xi)(1 - \eta)u_4 \\ v &= 1/4 (1 + \xi)(1 + \eta)v_1 + 1/4 (1 - \xi)(1 + \eta)v_2 + 1/4 (1 - \xi)(1 - \eta)v_3 + 1/4 (1 + \xi)(1 - \eta)v_4 \end{aligned} \quad (1)$$

Nous savons déjà que (doc. No 11 ou module B22) :

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

et que (Jacobien, document No 9a) :

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \right\} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \right\} \\ \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \right\} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \right\} \end{aligned} \text{ à savoir en dérivant (1) :}$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \right\} = [J] \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \right\} \text{ et son inverse: } \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \right\} = [J]^{-1} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \right\}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= 1/4 (1 + \eta)x_1 - 1/4 (1 + \eta)x_2 - 1/4 (1 - \eta)x_3 + 1/4 (1 - \eta)x_4 \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} &= 1/4 (1 + \xi)x_1 + 1/4 (1 - \xi)x_2 - 1/4 (1 - \xi)x_3 - 1/4 (1 + \xi)x_4 \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= 1/4 (1 + \eta)y_1 - 1/4 (1 + \eta)y_2 - 1/4 (1 - \eta)y_3 + 1/4 (1 - \eta)y_4 \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} &= 1/4 (1 + \xi)y_1 + 1/4 (1 - \xi)y_2 - 1/4 (1 - \xi)y_3 - 1/4 (1 + \xi)y_4 \\ \frac{\partial u}{\partial \xi} &= 1/4 (1 + \eta)u_1 - 1/4 (1 + \eta)u_2 - 1/4 (1 - \eta)u_3 + 1/4 (1 - \eta)u_4 \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} &= 1/4 (1 + \xi)u_1 + 1/4 (1 - \xi)u_2 - 1/4 (1 - \xi)u_3 - 1/4 (1 + \xi)u_4 \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} &= 1/4 (1 + \eta)v_1 - 1/4 (1 + \eta)v_2 - 1/4 (1 - \eta)v_3 + 1/4 (1 - \eta)v_4 \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} &= 1/4 (1 + \xi)v_1 + 1/4 (1 - \xi)v_2 - 1/4 (1 - \xi)v_3 - 1/4 (1 + \xi)v_4 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{ainsi: } \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \right\} = \frac{1}{4} [J]_{ij}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 + \eta_j & 0 & -(1 + \eta_j) & 0 & -(1 - \eta_j) & 0 & 1 - \eta_j & 0 \\ 1 + \xi_i & 0 & 1 - \xi_i & 0 & -(1 - \xi_i) & 0 & -(1 + \xi_i) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$\left\{ \frac{\partial v}{\partial x} \right\} = \frac{1}{4} [J]_{ij}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 + \eta_j & 0 & -(1 + \eta_j) & 0 & -(1 - \eta_j) & 0 & 1 - \eta_j \\ 0 & 1 + \xi_i & 0 & 1 - \xi_i & 0 & -(1 - \xi_i) & 0 & -(1 + \xi_i) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$u = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

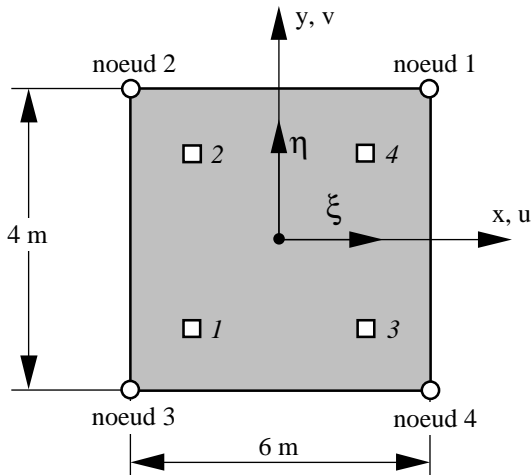
En évaluant les relations (3) et (4), on peut établir le matrice de transformation déformation - déplacement, à savoir la matrice B, en un point ξ_i, η_j : $\epsilon_{ij} = B_{ij} \cdot u$. Les indices i et j indiquent que la transformation est évaluée au point ξ_i, η_j .

Par exemple, si les axes x et y de l'exemple à 4 noeuds sont confondus avec les axes ξ et η et si l'élément est un carré de dimension 2 de coté, le Jacobien est une matrice unitaire et ainsi:

$$\epsilon_{ij} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \text{ d'où: } B = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 + \eta_j & 0 & -(1 + \eta_j) & 0 & -(1 - \eta_j) & 0 & 1 - \eta_j & 0 \\ 0 & 1 + \xi_i & 0 & 1 - \xi_i & 0 & -(1 + \xi_i) & 0 & -(1 + \xi_i) \\ 1 + \xi_i & 1 + \eta_j & 1 - \xi_i & -(1 + \eta_j) & -(1 - \xi_i) & -(1 - \eta_j) & -(1 + \xi_i) & 1 - \eta_j \end{bmatrix}$$

On peut constater que les valeurs de la matrice B dépendent des coordonnées naturelles ξ_i et η_j

Application numérique



En appliquant les relations (1) du document No 12:
 $x = 3\xi$ et $y = 2\eta$

$$\text{Jacobien} = \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial 3\xi}{\partial \xi} & \frac{\partial 2\eta}{\partial \xi} \\ \frac{\partial 3\xi}{\partial \eta} & \frac{\partial 2\eta}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Dans ce cas particulier \mathbf{J} est indépendant des ξ et η

$$\text{Son inverse, } \mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,333 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}$$

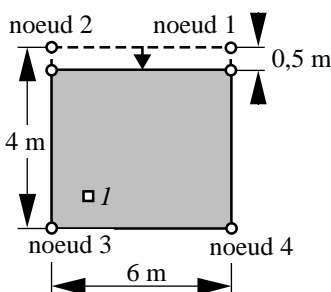
Avec les relations (3) et (4) du document No 12, on peut maintenant déterminer la matrice \mathbf{B} , par exemple pour le point de Gauss No 1 ($\xi_i = -0,5774$, $\eta_j = -0,5774$) :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0,333 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + \eta_j & 0 & -(1 + \eta_j) & 0 & -(1 - \eta_j) & 0 & 1 - \eta_j & 0 \\ 1 + \xi_i & 0 & 1 - \xi_i & 0 & -(1 - \xi_i) & 0 & -(1 + \xi_i) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0,14 & 0 & -0,14 & 0 & -0,53 & 0 & 0,53 & 0 \\ 0,21 & 0 & 0,79 & 0 & -0,79 & 0 & -0,21 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0,333 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 + \eta_j & 0 & -(1 + \eta_j) & 0 & -(1 - \eta_j) & 0 & 1 - \eta_j \\ 0 & 1 + \xi_i & 0 & 1 - \xi_i & 0 & -(1 - \xi_i) & 0 & -(1 + \xi_i) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 0,14 & 0 & -0,14 & 0 & -0,53 & 0 & 0,53 \\ 0 & 0,21 & 0 & 0,79 & 0 & -0,79 & 0 & -0,21 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

et ainsi $\mathbf{B}_1 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0,14 & 0 & -0,14 & 0 & -0,53 & 0 & 0,53 & 0 \\ 0 & 0,21 & 0 & 0,79 & 0 & -0,79 & 0 & -0,21 \\ 0,21 & 0,14 & 0,79 & -0,14 & -0,79 & -0,53 & -0,21 & 0,53 \end{bmatrix}$

Calculons enfin les déformations au point de Gauss No 1 ($\mathbf{\epsilon}_I$) pour le déplacement des noeuds suivant (cas trivial pour contrôle) :



$$\mathbf{\epsilon}_I = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0,14 & 0 & -0,14 & 0 & -0,53 & 0 & 0,53 & 0 \\ 0 & 0,21 & 0 & 0,79 & 0 & -0,79 & 0 & -0,21 \\ 0,21 & 0,14 & 0,79 & -0,14 & -0,79 & -0,53 & -0,21 & 0,53 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 0 \\ 0,5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{\epsilon}_I = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0,125 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{c.q.f.d. !}$$

Application numérique (suite)

Il reste maintenant à constituer la matrice de rigidité K de l'élément au moyen de la relation (7) du document No 11. Les coefficients α sont donnés sur le tableau ci-dessous (sans démonstration).

$$[K] = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} [A]_{i,j} = \alpha_1 [A]_1 + \alpha_2 [A]_2 + \alpha_3 [A]_3 + \alpha_4 [A]_4$$

Dans notre cas $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 1$

No des points de Gauss

Nbre de pts de Gauss	ξ	α
2	0,0	2.0000
4	$\pm 0,5774$	1.0000
6	$\pm 0,7746$	0,5555
	0,0000	0,8888
8	$\pm 0,8611$	0,3479
	$\pm 0,3400$	0,6521

Pour calculer A , il faut connaître la matrice d'élasticité D .
 En admettant $E = 20'000$ et $\nu = 0,3$ et des contraintes planes (doc. 10) :

$$[D] = \begin{bmatrix} 21'978 & 6'593 & 0 \\ 6'593 & 21'978 & 0 \\ 0 & 0 & 7'692 \end{bmatrix}$$

$$[A]_1 = [B]_1^T [D] [B]_1 =$$

292.3	159.5	317.2	188.8	-1091.2	-595.2	481.7	246.9
159.5	425.2	246.9	1316.3	-595.2	-1587.2	188.8	-154.3
317.2	246.9	1957.9	-595.2	-1183.9	-921.5	-1091.2	1269.8
188.8	1316.3	-595.2	5184.0	-704.9	-4913.1	1111.2	-1587.2
-1091.2	-595.2	-1183.9	-704.9	4072.9	2221.6	-1797.8	-921.5
-595.2	-1587.2	-921.5	-4913.1	2221.6	5924.3	-704.9	576.0
481.7	188.8	-1091.2	1111.2	-1797.8	-704.9	2407.4	-595.2
246.9	-154.3	1269.8	-1587.2	-921.5	576.0	-595.2	1165.5

$$[A]_2 =$$

2407.4	595.2	-1797.8	704.9	-1091.2	-1111.2	481.7	-188.8
595.2	1165.5	921.5	576.0	-1269.8	-1587.2	-246.9	-154.3
-1797.8	921.5	4072.9	-2221.6	-1183.9	704.9	-1091.2	595.2
704.9	576.0	-2221.6	5924.3	921.5	-4913.1	595.2	-1587.2
-1091.2	-1269.8	-1183.9	921.5	1957.9	595.2	317.2	-246.9
-1111.2	-1587.2	704.9	-4913.1	595.2	5184.0	-188.8	1316.3
481.7	-246.9	-1091.2	595.2	317.2	-188.8	292.3	-159.5
-188.8	-154.3	595.2	-1587.2	-246.9	1316.3	-159.5	425.2

etc.

$$[K] = 1 \cdot [A]_1 + 1 \cdot [A]_2 + 1 \cdot [A]_3 + 1 \cdot [A]_4$$

$$\{F_{noeuds}\} = [K] \begin{Bmatrix} u_{noeuds} \\ v_{noeuds} \end{Bmatrix}$$

$[K]$ = matrice de rigidité d'un élément

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ F_{x4} \\ F_{y4} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 8730.5 & 3571.4 & -2961.3 & -274.7 & -4364.7 & -3571.4 & -1404.5 & 274.7 \\ 3571.4 & 12699.0 & 274.7 & 3784.6 & -3571.4 & -6348.7 & -274.7 & -10134.9 \\ -2961.3 & 274.7 & 8730.5 & -3571.4 & -1404.5 & -274.7 & -4364.7 & 3571.4 \\ -274.7 & 3784.6 & -3571.4 & 12699.0 & 274.7 & -10134.9 & 3571.4 & -6348.7 \\ -4364.7 & -3571.4 & -1404.5 & 274.7 & 8730.5 & 3571.4 & -2961.3 & -274.7 \\ -3571.4 & -6348.7 & -274.7 & -10134.9 & 3571.4 & 12699.0 & 274.7 & 3784.6 \\ -1404.5 & -274.7 & -4364.7 & 3571.4 & -2961.3 & 274.7 & 8730.5 & -3571.4 \\ 274.7 & -10134.9 & 3571.4 & -6348.7 & -274.7 & 3784.6 & -3571.4 & 12699.0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

symétrique $k_{ij} = k_{ji}$

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \end{Bmatrix} = [k_{11}] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} + [k_{12}] \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} + [k_{13}] \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} + [k_{14}] \begin{Bmatrix} u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

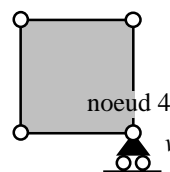
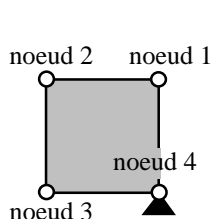
$$\begin{Bmatrix} F_{x2} \\ F_{y2} \end{Bmatrix} = [k_{21}] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} + [k_{22}] \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} + [k_{23}] \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} + [k_{24}] \begin{Bmatrix} u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

etc. Les sous-matrices k_{ij} sont aussi elles-mêmes symétriques

i = no noeud où l'on désire connaître les forces

j = no noeud où les déplacements sont connus

Appuis :



$c_1, c_2, c_3, c_4 = \text{constantes}$

d'où :

$$k_{14} = k_{41} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

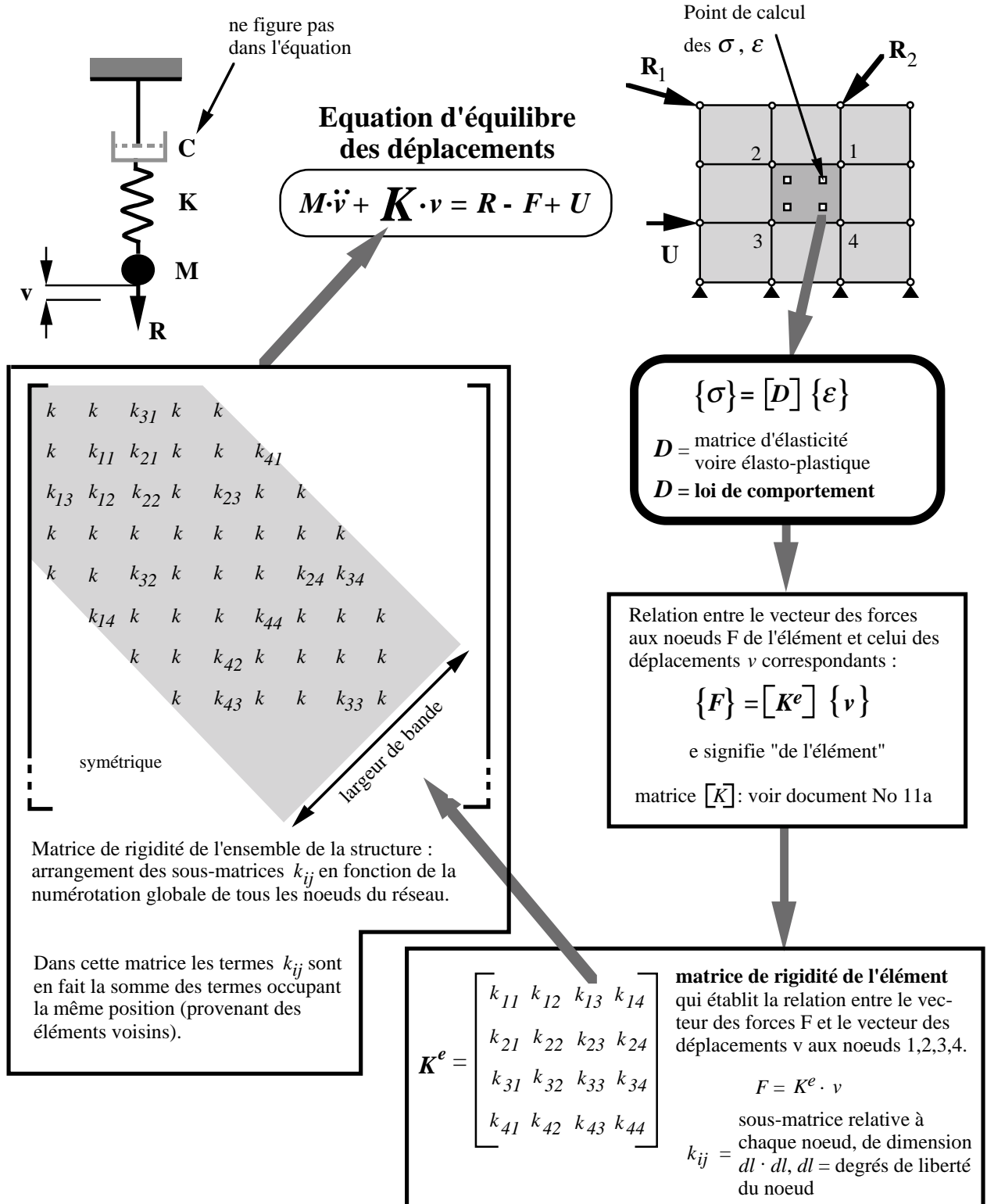
$$k_{34} = k_{43} = \begin{bmatrix} c_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k_{24} = k_{42} = \begin{bmatrix} c_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k_{44} = \begin{bmatrix} c_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

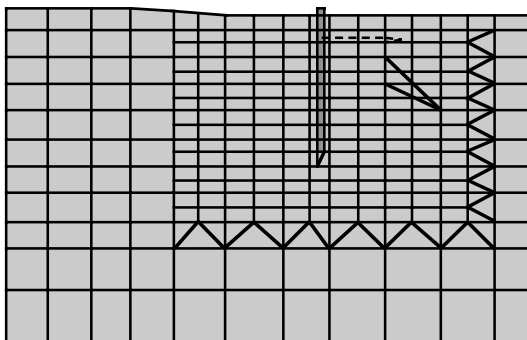
$$u_4 = v_4 = 0 \text{ d'où : } k_{14} = k_{41} = k_{24} = k_{42} = k_{34} = k_{43} = k_{44} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Principe de la résolution par le méthode des déplacements

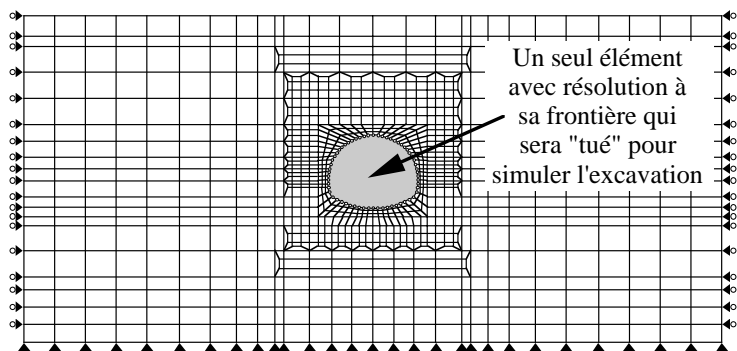


- avec :
- M = matrice des masses.
 - K = matrice de rigidité.
 - v = vecteur des déplacements, dénommé u ou $\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$ dans les précédents documents.
 - R = vecteur des forces extérieures.
 - F = vecteur des forces aux noeuds du système; forces équivalentes aux contraintes effectives.
 - U = vecteur de la résultante aux noeuds des pressions interstitielles.

FEM, BEM, KEM



FEM = Finite Element Method
 =
MEF = Méthode des Eléments finis

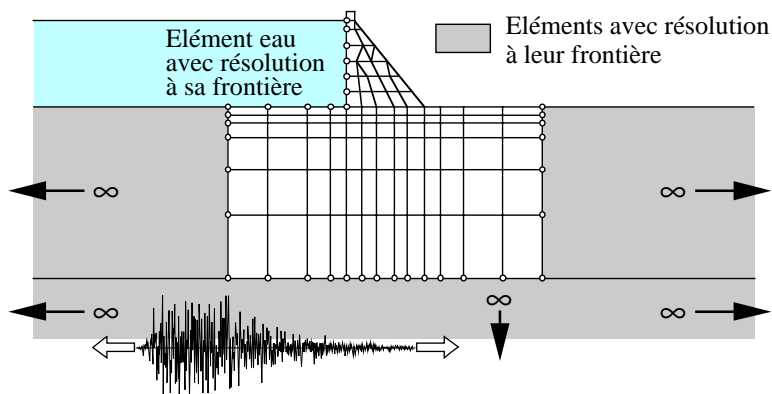


Simulation creuse tunnel

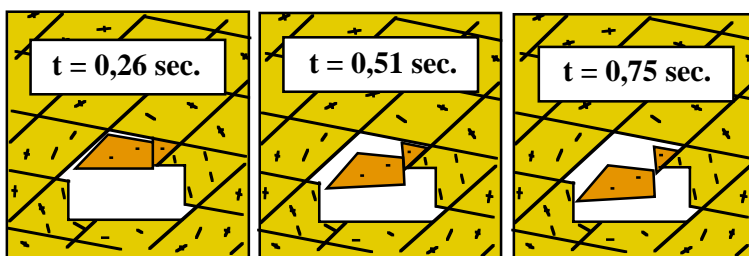
BE(M) = Boundary Element Method

= **(Méthode des) Eléments aux frontières**

(Méthode des éléments finis avec éléments spéciaux où les déplacements ne sont connus qu'à leurs "frontières")



Effet séisme sur un barrage poids



Tous les éléments sont indépendants avec joints cinématiques entre eux.

KEM = Kinematic Element Method

= **Méthode des Eléments cinématiques**

(Méthode des éléments finis avec éléments indépendants et joints cinématiques)

Méthode dénommée aussi:
DEM = Discret Element Method