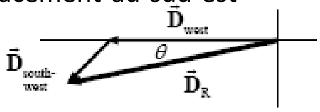
Vecteurs

Solutions des exercices

1. Composantes

1.1) Le vecteur déplacement résultant est donné par **D** = $\mathbf{D}_{ouest}$ + $\mathbf{D}_{sud\text{-}ouest}$.
Le déplacement à l'ouest est 225km + 78cos45° km = 280.2km et le déplacement au sud est 78sin45° km = 55.2km.
Le déplacement est la norme de la résultante = $\sqrt{280.2^2 + 55.2^2}$ = 286km.



La direction est θ = $\tan^{-1}$(55.2/280.2) = 11° au sud de l'ouest

1.2) Le camion se déplace de 28 + (-26) = 2 immeubles vers le nord et 16 immeubles vers l'est. La résultante a une magnitude de $\sqrt{2^2 + 16^2}$ = 16.1 immeubles et une direction de $\tan^{-1}$(2/16) = 7° au nord de l'est.

1.3) Étant donné $\mathbf{v}_x$ et $\mathbf{v}_y$, la magnitude est donnée par $\sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$ = $\sqrt{7.80^2 + (-6.40)^2}$ = 10.1 unités. La direction est donnée par θ = $\tan^{-1}$(-6.40/7.80) = -39.4°.

1.4) Pour un vecteur **v**, utiliser les relations $\mathbf{v}_x$ = ‖**v**‖cos(θ) et $\mathbf{v}_y$ = ‖**v**‖sin(θ)

1. $(9\frac{\sqrt{3}}{2}, 9/2)$
2. $(\frac{11}{2}, -11\frac{\sqrt{3}}{2})$
3. V = $(\frac{60}{\sqrt{2}}, \frac{60}{\sqrt{2}})$m/s
4. F = (-7.18, 15.4)N

1.5) ‖**a**‖ = 3 ; ‖**b**‖ = √3 ; ‖**c**‖ = 3√2 ; ‖**d**‖ = 13

1.6) ni l'un ni l'autre ne changent la direction du vecteur, par contre, la multiplication par un nombre négatif change le sens du vecteur.

1.7) $\hat{\mathbf{i}}_r$ = (cosθ, sinθ) et $\hat{\mathbf{i}}_t$ = (-sinθ, cosθ)

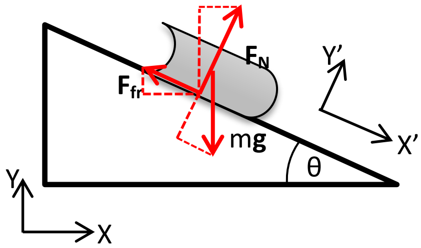
1.8) a, e, f, g, i et j sont des vecteurs ; b, c, d et h sont des scalaires.

1.9) Une représentation graphique permet de voir que, puisque la composante en x est négative, le vecteur se trouve dans le 2^e cadrant, donc l'angle est entre 90° et 180°.
On trouve celui-ci par la relation de la tangente : θ = $\tan^{-1}(F_y/F_x)$ = $\tan^{-1}$(6.0N/-4.0N) = -56.3° (en utilisant une calculatrice). La calculatrice a donné le plus petit angle, qui est dans le 4^e cadrant ; comme notre vecteur est dans le deuxième cadrant, l'angle correct est : 180° + (-56.3°) = 123.7°.

Utilisez ensuite la relation de Pythagore pour trouver l'ampleur : F = $\sqrt{{F_x}^2 + {F_y}^2}$ = $\sqrt{(-4.0N)^2 + (6.0N)^2}$ = 7.2N

1.10) La composante en x = 50.9m/s, la composante en y = 31.8m/s

1.11) Le schéma permet de se représenter la décomposition des trois forces dans les 2 référentiels.



En xy : **mg** = (0, -(‖**mg**‖) = (0, -30)N ;
F$_N$ = (‖**F**$_N$‖sinθ, ‖**F**$_N$‖cosθ) = (15√3sinθ, 15√3cosθ)N ;
F$_{fr}$ = (-‖**F**$_{fr}$‖cosθ, ‖**F**$_{fr}$‖sinθ) = (-15cosθ, 15sinθ)N.

En x'y' : **mg** = (‖**mg**‖sinθ, ‖**mg**‖cosθ) = (30sinθ, 30cosθ)N ;
F$_N$ = (0, ‖**F**$_N$‖) = (0, 15√3)N ;
F$_{fr}$ = (-‖**F**$_{fr}$‖, 0) = (-15, 0)N.

2. Addition et soustraction

2.1) On considère le premier déplacement comme le vecteur **A** et le second comme le vecteur **B**. Les coordonnées de **A** sont : A_x = 0m et A_y = 200m. Les coordonnées de B sont : B_x = 400m·cos(30°) = 346m et B_y = 400m·sin30° = 200m.
On additionne ensuite les vecteurs pour trouver la résultante : **R** = (0m + 346m)**i** + (200m + 200m)**j** = 346m**i** + 400m**j**.
La norme de **R** = $\sqrt{{R_x}^2 + {R_y}^2}$ = $\sqrt{(346m)^2 + (400m)^2}$ = 529m et l'angle = $\tan^{-1}(\frac{400}{346})$ = 49°

2.2) **A** + **B** = (3, – 5) et **A** – **B** = (-1, 1)

2.3) Magnitude 20.9km, direction 21,4° au sud de l'est (angle de – 21,4°)

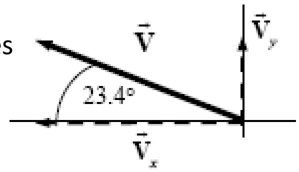
2.4) 5**A** – 3**B** + **C**

2.5) La résultante est **F**$_R$ = (-2, 2, 2) ; la magnitude de cette résultante est 2√3N

2.6) a)Linéairement dépendant ; b)Linéairement indépendant

2.7) **A** est orthogonal à **B**

2.8) b)V_x = -24.8cos(23.4°) = -22.8 unités, et V_y = 24.8sin(23.4°) = 9.85 unités
c) ‖**V**‖ = $\sqrt{(-22.8)^2 + (9.85)^2}$ = 24.8 unités, θ = $\tan^{-1}\frac{9.85}{22.8}$ = 23.4°



2.9) **A** = (44cos(28°) = 38.85, 44sin(28°) = 20.66), **B** = (-26.5cos(56°) = -14.82, 26.5sin(56°) = 21.97), **C** = (31cos(270°) = 0.0, 31sin(270°) = -31.0)
1.a) (**A** + **B** + **C**) = (A_x + B_x + C_x, A_y + B_y + C_y) = (24.0, 11.6)
1.b) ‖**A** + **B** + **C**‖ = $\sqrt{(24.03)^2 + (11.63)^2}$ = 26.7, θ = $\tan^{-1}\frac{11.63}{24.03}$ = 25.8°
2. **A** – **B** = (53.7, – 1.31) et **B** – **A** = (- 53.7, 1.31) on remarque que les résultats sont opposés : les vecteurs sont respectivement dans le 4^e et dans le 2^e cadrant.
3. **A** – **C** = (38.8, 51.7), ‖**A** -**C**‖ = 64.6, θ = 5.1°

2.10) La composante en x est négative et la composante en y est positive puisque le sommet est au nord-ouest du camp de base. L'angle mesuré depuis l'axe des x positifs est 32.4° + 90° = 122.4°. Les composantes sont : x = 4580cos(122.4°) = -2454m ; y = 4580sin(122.4°) = 3867m ; z = 2450m. Le déplacement est donc : **r** = (-2450m, 3870m, 2450m)

||**r**|| = $\sqrt{(-2454m)^2 + (4580m)^2 + \ (2450m)^2} = 5190m$

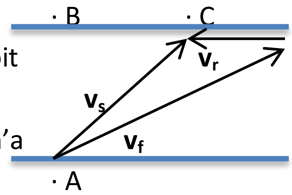
2.11) a) On utilise le théorème de Pythagore pour trouver les composantes en x possibles : $90.0^2 = x^2 + (-55.0)^2$ → $x^2 = 5075$ → x = ±71.2 unités

b) On exprime chaque vecteurs en composantes pour résoudre l'équation en **V** :

(71.2**,** – 55.0) + (V_x, V_y) = (- 80.0, 0.0)

→ V_x = (-80.0 – 71.2) = -151.2 et V_y = 55.0 → **V** = (-151.2, 55.0)

2.12) Pour rejoindre C depuis A, le plus simple serait d'avoir une vitesse $\mathbf{V_S}$.



Or, le bateau est soumis à la vitesse de la rivière $\mathbf{V_r}$. Son vecteur vitesse $\mathbf{V_f}$ doit donc prendre en compte $\mathbf{V_r}$ afin de trouver la vitesse et l'angle à prendre.

Faisant la traversée en une heure et les vitesses étant données en km/h, $\mathbf{V_r}$ n'a besoin d'être soustrait qu'une seule fois.

$\mathbf{V_f} = \mathbf{V_S} - \mathbf{V_r}$

Trouver $\mathbf{V_S}$ et $\mathbf{V_r}$: $\mathbf{V_r}$ = -4km/h **i** ; ||$\mathbf{V_S}$|| = $\sqrt{(8km/h)^2 + (6km/h)^2}$ = 10km/h, θ = $\tan^{-1}(\frac{8}{6})$ = 53.1°

$\mathbf{V_f}$ = 10cos(53.1°)km/h **i** + 10sin(53.1°)km/h **j** - (-4km/h)**i** = (10, 8)km/h

La norme permet de trouver la vitesse demandée : ||$\mathbf{V_f}$|| = $\sqrt{(10km/h)^2 + (8km/h)^2}$ = 12.8km/h La direction est donnée par l'angle avec l'axe des x : θ = $\tan^{-1}(\frac{8}{10})$ = 38.7°

2.13) ∑**F** = 0 → $\sum F_x = 0$ et $\sum F_y = 0$ → en x : 150N + 200N·cosθ + F_x=0 ; en y : 200N·sinθ – 100N + F_y=0

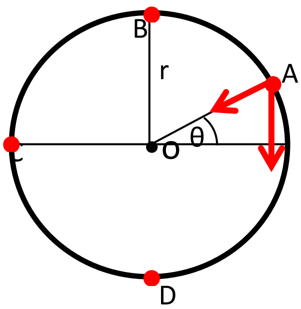
→ **F** = (-323, 0)N

2.14) 100kg

2.15) On sait que $\mathbf{p_{12}} = \mathbf{p_0} + \mathbf{v_{12}}$. Pour trouver $\mathbf{v_{12}}$ (**v** au temps t = 12s), on remplace t dans les expressions vectorielles : $\mathbf{v_{12}}$ = 12**i** – 6**j**. → $\mathbf{p_{12}}$ = (2, 3) + (12, – 6) = (14, – 3).

Le vecteur déplacement se calcule comme **d** = Δ**p** = $\mathbf{p_{12}} - \mathbf{p_0}$ = (14, -3) –(2, 3) = (12, – 6) = $\mathbf{v_{12}}$

2.16) Point A : En coordonnées cartésiennes (x, y), on a toujours m**g** = (0, -mg)



Et F_{Nx} = -||$\mathbf{F_N}$||cosθ, F_{Ny} = -||$\mathbf{F_N}$||sinθ → $\mathbf{F_N}$ = (-mrωcosθ, -mrωsinθ)

$\mathbf{F_{net}}$ = ∑**F** = $\mathbf{F_N}$ + m**g** = (-mrωcosθ, mg - mrωsinθ)

En coordonnées polaires (R, ϕ), on a toujours m**g** = (mg, -π/2)

Pour F_N, l'angle = π + θ et R = mrω → F_N = (mrω, π + θ)

On peut s'aider des généralités ci-dessus pour les points suivants :

Point B : Cartésiennes : m**g** = (0, -mg), $\mathbf{F_N}$ = (0, -mrω), $\mathbf{F_{net}}$ = (0, -m(g+rω))

Polaires : m**g** = (mg, -π/2) et $\mathbf{F_N}$ = (mrω, -π/2)

Point C : Cartésiennes : m**g** = (0, -mg), $\mathbf{F_N}$ = (mrω, 0), $\mathbf{F_{net}}$ = (mrω, -mg)

Polaires : m**g** = (mg, -π/2) et $\mathbf{F_N}$ = (mrω, 0)

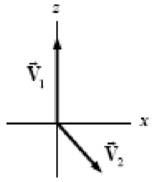
Point D : Cartésiennes : m**g** = (0, -mg), $\mathbf{F_N}$ = (0, mrω), $\mathbf{F_{net}}$ = (0, m(rω-g))
Polaires : m**g** = (mg, -π/2) et $\mathbf{F_N}$ = (mrω, π/2)

3. Produit scalaire

3.1) Pour calculer le produit scalaire, on utilise $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = 2.0x^2 11.0 + (-4.0)2.5x + 5.0\cdot 0 = 12x^2$

3.2) On utilise le théorème du cosinus : $\cos\theta = \frac{\boldsymbol{A\cdot B}}{\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{B}\|}$ → ‖**A**‖ = 9.81, ‖**B**‖ = 11.0, **A·B** = 91.34, $\theta = \cos^{-1}\frac{91.34}{9.81\cdot 11.0} = 32°$

3.3) $\mathbf{V_1} \cdot \mathbf{V_2} = \|\mathbf{V_1}\|\|\mathbf{V_2}\|\cos\theta = 75\ 58\cos 138° = -3200$. Pour l'angle, voir le schéma:



3.4) Si **A** est perpendiculaire à **B**, alors **A·B** = 0 → **A·B** = $A_xB_x + A_yB_y = 3.0B_x + 1.5B_y = 0$ → $B_y = -2.0B_x$; tout vecteur le satisfaisant est perpendiculaire à **A**, par exemple **B** = (1.5, – 3.0)

3.5) Si **C** est perpendiculaire à **B**, alors **C·B** = 0, on sait aussi que **C** n'a pas de composante en z et que **C·A** = 20. Nous avons donc deux équations : $C_xB_x + C_yB_y = 9.6C_x + 6.7C_y = 0$ et $-4.8C_x + 6.8C_y = 20.0$ → **C** = (-1.4, 2.0)

3.6) On utilise le théorème du cosinus dont on peut déduire que **V·i** = $\|\mathbf{V}\|\cos\theta_x = V_x$ → $\theta_x = \cos^{-1}\frac{V_x}{\|\boldsymbol{V}\|} = 52.5°$; $\theta_y = \cos^{-1}\frac{V_y}{\|\boldsymbol{V}\|} = 48.0°$; $\theta_z = \cos^{-1}\frac{V_z}{\|\boldsymbol{V}\|} = 115°$

3.7) **x** = (4, 7, 7) et ‖**x**‖ = √114 ; **y** = (-5, 0, 12) et ‖**y**‖ = 13

3.8) 1. 9/5 ; 2. -3√2/2

3.9) M' = (7, -15) ; N = (-5, -20)

3.10) On choisit le vecteur **OB** comme directeur de la droite. Pour trouver la projection de A sur **OB**, on peut calculer la longueur : $\|\mathbf{OA_p}\| = \|\mathbf{OA}\|\cos(\theta)$, θ étant l'angle entre **OA** et **OB** que l'on peut trouver grâce au produit scalaire ; et on connait la direction de $\mathbf{OA_p}$ qui est sur la droite OB.
→ $\mathbf{OA_p} = \frac{\boldsymbol{OA\cdot OB}}{\|\boldsymbol{OB}\|^2}\boldsymbol{OB}$ = (-3/2, 9/10, 6/5)

3.11) La projection sur l'axe des x est : ‖**p**‖ = ‖**v**‖cos(θ) 1. ‖**p**‖ = 3, 61 ; 2. ‖**p**‖ = 4,98 ; 3. ‖**p**‖ = 4.

3.12) La projection p est le produit scalaire de **A** par le vecteur unitaire de **B**. ‖**p**‖ = 3.71. (2^e^ méthode : utiliser le théorème du cosinus, la projection est ‖**A**‖cos(θ))

3.13) Les deux vecteur sont dans le premier cadran donc on peut trouver l'angle entre eux en calculant la différence entre leurs angles :
$\|\mathbf{F}\| = \sqrt{(2.0N)^2 + (4.0N)^2} = \sqrt{20}N$; $\phi_F = \tan^{-1}(\frac{4}{2})$

‖**d**‖ = $\sqrt{(1.0m)^2 + (5.0N)^2}$ = $\sqrt{26}m$; ϕ_d = $\tan^{-1}(\frac{5}{1})$

a) W = ‖F‖ ‖d‖ cosθ = $\sqrt{20}N \cdot \sqrt{26}m$ ·cos($\tan^{-1}(\frac{5}{1}) - \tan^{-1}(\frac{4}{2})$) = 22Nm = 22J

b) W = $F_x d_x + F_y d_y$ = (2.0N)(1.0m) + (4.0N)(5.0m) = 22Nm = 22J

3.14) On cherche le vecteur déplacement : **d** = (2, -1, 4) – (3, 2, -1)= (-1, -3, 5). Le travail est : W=**F·d** → W = $F_x d_x + F_y d_y + F_z d_z$ = (-1)(4) + (-3)(-3) + (5)(2) = 15

3.15) W = ‖F‖ ‖d‖ cosθ = 20.0N·2.0m·cos(30°) = 34.6Nm = 34.6J

3.16) W=$\mathbf{F_{net}}$·**d** = ($\mathbf{F_1}$ + $\mathbf{F_2}$) ·**d** = (2.1, – 1.7, 0.5)N ·(4.0, 2.0, 2.0)m = 6Nm = 6J

4. Produit vectoriel

4.1) **A** × **B** = (7, – 7, – 7) ; **B** × **A** = (-7, 7, 7) ; sachant que ‖**A** × **B**‖ = ‖**A**‖ ‖**B**‖ |sin(θ)| , $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{\|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\|}{\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{B}\|}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{147}}{\sqrt{14}\sqrt{14}}\right) = \sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = 60°$

4.2) **i** × **j**= -**k**, **i** × **k**=**j**, **j** × **i**=**k**, **j** × **k**= -**i**, **k** × **i**= -**j**, **k** × **j** =**i**

4.3) 1. (-19, -7, 1) ; 2. (3a - 5/2, -1/2 - 7a, 38)

4.4) 1. Correct, scalaire (car le résultat final est celui du produit scalaire) ; 2. Incorrect, (b · c) est un scalaire, le produit vectoriel est impossible, celui-ci ne peut avoir lieu qu'entre deux vecteurs ; 3. Incorrect, même raison que 2. ; 4. Incorrect, le produit vectoriel ne se fait pas avec deux scalaires or les deux parenthèses aboutissent à un scalaire ; 5. Correct, scalaire ; 6. Correct, vecteur (car il ne s'agit ici que de produits vectoriels).

4.5) 1. (2, -1, 3) ; 2. 2**i** + 13**j** -8**k**; 3. (t^4, -2t^3, t^2)

4.6) 1. (28, -21, 14) car (7**x**) × **y** = 7(**x** × **y**) 2. (1, -2.5, 6) car **y** × (**u** + **v**) = (**y** × **u**) + (**y** × **v**) = -(**u** × **y**) - (**v** × **y**) 3. (-12, 9, -6) car **x** × (-3**y**) = -3(**x** × **y**) 4. Non car (**x** + **v**) × **y** = (**x** × **y**) + (**v** × **y**) /= 0 5. Oui car (**x** × **y**) + 2(**v** × **y**) = 0

4.7) **C** = (-2b -1, b, -2b -3), il y en a donc une infinité.

4.8) 48 unités car ‖**A** × **B**‖ = ‖**A**‖ ‖**B**‖ |sin(angle)| ; ‖**A** × **B**‖ sera maximale lorsque sin(angle) est maximal, donc sin(angle) = 1, donc angle = 90° ou 270°

4.9) On suppose que l'angle entre **A** et **B** est de -135° donc ‖**A** × **B**‖ = 99/√2 et **A** × **B** pointe vers le bas car sin(-135) < 0. Si ‖**A**‖ est inconnue, ‖**A** × **B**‖ = ‖**A**‖ ‖**B**‖ |sin(angle)| = 11‖**A**‖/√2

4.10) a) dans la direction des y positifs. Pour le trouver, on peut utiliser la règle de la main droite ou celle du déterminant : **A** × **B** = $\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix}$ = **i**(0·B – 0·0) + **j**(0·0 – (-A)·B) + **k**(-A·0 - 0·0) = AB**j**.

b) **B** × **A** pointe dans la direction opposée à **A** × **B** : dans la direction des y négatifs.

c) ‖**A** × **B**‖ = ‖**B** × **A**‖ = ‖**A**‖ ‖**B**‖sin(90°) = ‖**A**‖ ‖**B**‖

4.11) En utilisant les définitions des produits scalaire et vectoriel, on a : ‖**A** × **B**‖ = **A** · **B** → ‖**A**‖‖**B**‖|sin(θ)| = ‖**A**‖‖**B**‖cos(θ) → |sinθ| = cosθ → θ = ±45°

4.12) **τ** = **r** × **F** = (2.0, 1.0, 3.0)m × (0.0, 2.0, – 1.0)N = (-7.0, 2.0, 4.0)N·m

4.13) **L** = **r** × **p** = (0, 2, 5)m × (4, 6, 0)kg·m/s = (-30, 20, – 8)kg·m^2/s

4.14) **τ** = **r** × **F** → a) **τ** = (2, -1, 3) × (3, 2, -4) = (2, -7, -2) ; b) **τ** = (4, -6, 3) × (3, 2, -4) = -3(6, 5, 7)

4.15) **ω** = **r** × **v** et **ω**, **r**, **v** sont tous perpendiculaire entre eux → **v** = **ω** × **r** = (4, 1, – 2) × (2, – 3, 1) = (– 5, – 8, – 14)

4.16) En utilisant le système d'axe donné, on trouve **r** = (8.0, 6.0), puis on connait **τ** = **r** × **F** = (0.0, 8.0, 6.0)m × (±2.4, -4.1, 0.0)kN = (24.6, ±14.4, ∓19.2)m·kN. On peut trouver la magnitude de ce moment de force maximal : ‖**τ**‖ = $\sqrt{24.6^2 + 14.4^2 + 19.2^2}m \cdot kN = 3.4 \cdot 10^4 m \cdot N$

5. Différentiation de vecteurs

5.1) On a le vecteur **R** dont on connait les coordonnées. Pour trouver d**R**/dt et d^2**R**/dt^2, on dérive séparément chacune des coordonnées. Ainsi :

R = (e^{-t}, ln(t^2 + 1), – tan(t)).

$\frac{d\boldsymbol{R}}{dt}$ = (-e^{-t}, $\frac{2t}{t^2+1}$, $-\frac{2}{\cos(2t)+1}$)

$\frac{d^2\boldsymbol{R}}{dt^2}$ = (e^{-t}, $\frac{2(1-t^2)}{(t^2+1)^2}$, $-\frac{4\sin 2t}{(\cos(2t)+1)^2}$)

En remplaçant t dans les expressions ci-dessus, on trouve : a) $\frac{d\boldsymbol{R}}{dt}$(0) =(–1, 0, – 1) ; b) $\frac{d^2\boldsymbol{R}}{dt^2}$(0) = (1, 2, 0)

On utilise ces vecteurs pour répondre à c) $\| \frac{d\boldsymbol{R}}{dt}(0) \| = \sqrt{2}$; d) $\| \frac{d^2\boldsymbol{R}}{dt^2}(0) \| = \sqrt{5}$.

5.2) On dérive chaque coordonnée et on trouve : $\mathbf{v_t}$ = λ(-aωsin(ωt), aωcos(ωt), b)

5.3) a) **A**·**B** = $2t^3 - 5t^2 - 2t$ → $\frac{d(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})}{dt}$ = $6t^2 - 10t - 2$, $\frac{d(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})}{dt}(1)$ = – 6

b) **A** × **B** = ((t^2–2t–1), (t^3+4t^2–4t–3), 3(t^2–t)) → $\frac{d(\mathbf{A}\times\mathbf{B})}{dt}$ = ((2t–2), (3t^2+8t–4), 3(2t–1)) → $\frac{d(\mathbf{A}\times\mathbf{B})}{dt}(1)$ =(0, 7, 3)

c) **A** + **B** = ((t^2 + 2t – 3), (-t + 1), (t + 1)), ‖**A** + **B**‖ = $\sqrt{(t^2+2t-3)^2 + (-t+1)^2 + (t+1)^2}$ = $\sqrt{t^4 + 4t^3 - 12t + 11}$, → $\frac{d\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\|}{dt}$ = $\frac{2(t^3+3t^2-3)}{\sqrt{t^4+4t^3-12t+11}}$ → $\frac{d\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\|}{dt}(1)$ = 1

5.4) **A** × (**B** × **C**) = ((cos(u)(15u+8)-u(2+5u)), (u-sin(u)(15u+8)), (sin(u)(2+5u)-cos(u))) → $\frac{d(\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}))}{du}$ = ([-sin(u)(15u+8)+15cos(u)-(2+10u)], [1-(cos(u)(15u+8)+15sin(u))], [cos(u)(2+5u) +5sin(u)+sin(u)]) → $\frac{d(\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}))}{du}(0)$ = (13, – 7, 2)

5.5) La position de la particule est exprimée par le vecteur **r**(t) = (2sin(3t), 2cos(3t), 8t)

La vitesse de la particule au temps t se calcule avec : **v** = $\frac{dr}{dt}$ = (6cos(3t), – 6sin(3t), 8)

L'accélération au temps t est : **a** = $\frac{dv}{dt}$ = (-18sin(3t), -18cos(3t), 0)

La magnitude de la vitesse en tout t est : $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(6\cos(3t))^2 + (-6\sin(3t))^2 + 8^2} = 18$

La magnitude de l'accélération en tout t est : $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(-18\cos(3t))^2 + (-18\sin(3t))^2} = 18$

5.6) On sait que **F** = m**a** = m($\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$).

La position de l'objet est donnée par **r** = (sin(t– $\frac{\pi}{4}$), 2cos(3t), – 2t^2)m → **v** = (cos(t – $\frac{\pi}{4}$), – 6sin(3t), – 4t)$\frac{m}{s}$ et **a** =(–sin(t – $\frac{\pi}{4}$), – 18cos(3t), – 4)$\frac{m}{s^2}$

F = m($\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$) = m(–sin(t – $\frac{\pi}{4}$), – 18cos(3t), – 4)N

À t = $\frac{\pi}{2}$ s, **F** = 5·10^{-3}(–sin($\frac{\pi}{4}$), – 18cos($\frac{3\pi}{2}$), – 4)N = 5·10^{-3}(–$\frac{1}{\sqrt{2}}$, 0, – 4)N

La magnitude de **F** est: 5·10^{-3}$\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 4^2}$ N =5·10^{-3}$\sqrt{\frac{33}{2}}$ N ≅ 2·10^{-2}N

6. Intégration de vecteurs

6.1) On a le vecteur **R** dont on connait les coordonnées. Pour trouver $\int \boldsymbol{R}(t)dt$, on intègre séparément chacune des coordonnées. Ainsi :

R(t) = ((3t^2 – t), (2 – 6t), – 4t)

$\int \boldsymbol{R}(t)dt$ = ($\int(3t^2 - t)dt$), ($\int(2-6t)dt$), – ($\int 4dt$)) = ((t^3 – $\frac{1}{2}$t), (2t – 3t^2), – (2t^2)) + **c**^{ste}

b) $\int_2^4 \boldsymbol{R}(t)dt$ = [(t^3 – $\frac{1}{2}$t), (2t – 3t^2), – (2t^2)] $|_2^4$ = (50, – 32, – 24)

6.2) On intègre les coordonnées en **i** et en **j** séparément :

$$\int_0^{\pi/2}(3\sin(u), 2\cos(u))du = \left(\left(\int_0^{\pi/2} 3\sin u\,du\right), \left(\int_0^{\pi/2} 2\cos u\,du\right)\right) =$$

$$\left((-3\cos u)\big|_0^{\frac{\pi}{2}}, (2\sin u)\big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = (3, 2)$$

6.3) a)$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ = 2t^3 + 6t^2 – 6t → $\int_0^2(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})dt = \int_0^2(2t^3+6t^2-6t)dt = \left(\frac{1}{2}t^4+2t^3-3t^2\right)\big|_0^2 = 12$

b) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ = (– 6t^3, (2t^3 – 8t^2), 2t^4) → $\int_0^2(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})dt = \int_0^2(-6t^3, (2t^3-8t^2), 2t^4)dt = \left(-\frac{3}{2}t^4, \left(\frac{1}{2}t^4-\frac{8}{3}t^3\right), \frac{2}{5}t^5\right)\big|_0^2 = \left(-24, -\frac{40}{3}, \frac{64}{5}\right)$

6.4) On commence par chercher **v**. Sachant que $\mathbf{v} = \int \mathbf{a}dt$ et que **a** = (0, -g, 0), on a :

$\mathbf{v} = -\int(0, g, 0)dt = (0, -gt, 0) + \boldsymbol{c}$, **c** étant la constante d'intégration. On nous donne **v**(t=0) = ($v_0\cos\theta_0$, $v_0\sin\theta_0$) qui nous donne la constante.

→ **v** = ($v_0\cos\theta_0$, ($v_0\sin\theta_0$ – gt))

Pour trouver **r**, on intègre encore une fois car $\mathbf{r} = \int \mathbf{v}dt$ → $\mathbf{r} = \int\left(v_0\cos\theta_0, (v_0\sin\theta_0 - gt)\right)dt = \left((v_0\cos\theta_0 t), \left(v_0\sin\theta_0\, t - \frac{1}{2}gt^2\right)\right) + \boldsymbol{c}$; ici, puisque **r**(t = 0) = 0, c = 0

→ **r**= ($v_0$cos(θ_0)t, ($v_0$sin(θ_0)t – gt^2/2))

6.5) Sachant que $\mathbf{v} = \int \mathbf{a}dt$ et que **a** = (e^{-t}, – 6(t + 1), 3sin(t)), on a :

$\mathbf{v} = -\int \left(e^{-t}, -6(t+1), 3\sin(t)\right)dt = (-e^{-t}, -(3t^2+6t), -3\cos t) + \boldsymbol{c}$, c étant la constante d'intégration. On nous donne **v**(t = 0) = 0, en remplaçant t par 0 dans l'équation précédente, on trouve : c = (1, 0, – 3)

→ $\mathbf{v} = \left((1-e^{-t}), -(3t^2+6t), (3-3\cos t)\right)$

Pour trouver **r**, on intègre encore une fois car $\mathbf{r} = \int \mathbf{v}dt$ → $\mathbf{r} = \int\left((1-e^{-t}), -(3t^2+6t), -(3-3\cos t)\right)dt = \left((t+e^{-t}), -(t^3+3t^2), (3t-3\sin t)\right) + \boldsymbol{c}$; on nous donne **r**(t=0) = 0, donc c = (–1, 0, 0)

→ $\mathbf{r} = \left((t-1+e^{-t}), -(t^3+3t^2), (3t-3\sin t)\right)$

6.6) Sachant que $W_{a\to b} = \int_a^b \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, on a $W_{(0,0,0)\to(1,1,1)} = \int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} [(3x^2+6y), -14yz, 20xz^2]\cdot(dx, dy, dz) = \int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} [(3x^2+6y)dx - 14yzdy + 20xz^2dz]$

a) Si x = t, y = t^2 et z = t^3, les points (0, 0, 0) et (1, 1, 1) correspondent respectivement t = 0 et t = 1, donc :

$\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (3t^2+6t^2)dt - 14(t^2)(t^3)d(t^2) + 20t(t^3)^2d(t^3) = \int_0^1 9t^2dt - 28t^6dt + 60t^9dt = [3t^3 - 4t^7 + 6t^{10}]_0^1 = 5$

b) Le long de la ligne droite de (0, 0, 0) à (1, 0, 0), y = 0, z = 0, dy = 0, dz = 0 tandis que x varie de 0 à 1. En reprenant l'intégrale $\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ on obtient :

$\int_{(0,0,0)}^{(1,0,0)} \left[\left(3x^2+6(0)\right)dx - 14(0)(0)(0) + 20x(0)^2(0)\right] = \int_{x=0}^{1} 3x^2dx = x^3|_0^1 = 1$

Puis, de (1, 1, 0) à (1, 1, 1), x = 1, y = 1, dx = 0, dy = 0 tandis que z varies de 0 à 1. En reprenant l'intégrale $\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ on obtient :

$\int_{(1,1,0)}^{(1,1,1)} \left[\left(3(1)^2+6(1)\right)0 - 14(1)z(0) + 20(1)z^2dz\right] = \int_0^1 20z^2dz = \frac{20z^3}{3}|_0^1 = \frac{20}{3}$