Vecteurs

Exercices

Voici quelques exercices pour apprendre à manier les vecteurs. Ils sont triés par thème et partagés en deux sous-catégories : ceux qui ne demandent qu'une connaissance des vecteurs et ceux qui utilisent des concepts et des lois de la physique (brièvement présentés). Ces concepts sont censés être connus depuis le gymnase mais seront revus en cours. Si vous n'arrivez pas à faire tous ces exercices maintenant, reprenez-les juste avant les cours correspondants.

Quelques exercices sont tirés des livres suivants : Giancoli, *Physics for scientists and engineers, with modern Physics* ; Schaum's outline : *Vector Analysis* ; Das, *Mathematics for Physics*.

1. Composantes

1.1) Une voiture roule 225km vers l'ouest puis 78km vers le sud-est (45°). Quel est le déplacement de la voiture depuis son point de départ (magnitude et direction) ? Dessiner un diagramme.

1.2) Un camion de livraison se déplace de 28 immeubles vers le nord, 16 vers l'est et 26 vers le sud. Quel est son déplacement final depuis l'origine ? (Considérer que les immeubles sont de longueur et de largeur égale.)

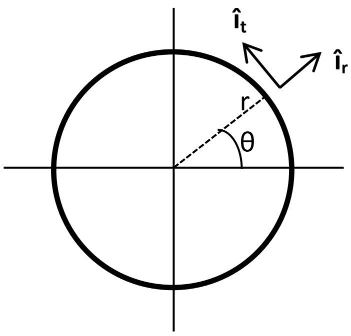
1.3) Si $\mathbf{v}_x$ = 7.8 unités et $\mathbf{v}_y$ = -6.4 unités, déterminer la magnitude et la direction de $\mathbf{v}$.

1.4) Déterminer les composantes x et y de ces vecteurs : 1. Norme 9, angle 30° avec l'axe x positif ; 2. Norme 11, angle -60° avec l'axe x positif ; 3. Magnitude 60 m/s, angle 45° au-dessus de l'axe des x ; 4.Magnitude 17N, angle de 115° avec l'axe x positif.

1.5) Calculer la norme de ces vecteurs : **a** = (1, 2, -2) ; **b** = (1, 1, 1) ; **c** = (3, 0, -3) ; **d** = (-5, 12, 0)

1.6) Est-ce que la multiplication d'un vecteur par un nombre positif change sa direction ? Et par un nombre négatif ?

1.7) Soient $\hat{\mathbf{i}}_r$ et $\hat{\mathbf{i}}_t$ 2 vecteurs unitaires**.** Explicitez leurs composantes dans le système d'axe (x, y).



Avec des concepts de la physique :

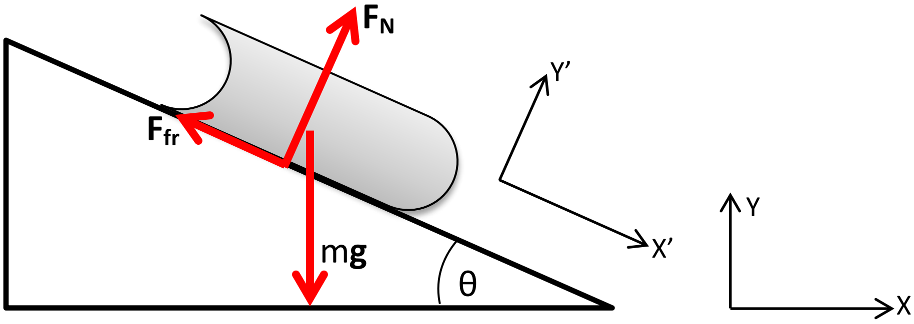
En physique, plusieurs entités sont représentées par des vecteurs, l'exercice 1.8 permet d'en découvrir quelques-uns, parmi des termes que vous utiliserez ce semestre.

1.8) Déterminer lesquels des termes suivants sont des scalaires et lesquels sont des vecteurs : a)vitesse, b)énergie potentielle, c)travail, d)fréquence, e)force, f)moment cinétique, g)accélération, h)moment d'inertie, i)quantité de mouvement, j)moment de force.

1.9) Une force **F** est représentée par un vecteur et est mesurée en Newton (N). Les composantes x et y de cette force sont $\mathbf{F_x}$ = -4.0N et $\mathbf{F_y}$ = 6.0N. Trouvez l'ampleur (magnitude) et la direction de cette force.

1.10) Un projectile est lancé du sommet d'une tour avec une vitesse de 60m/s et un angle de 32° au-dessus de la direction horizontale. Déterminer les composantes verticale et horizontale du vecteur vitesse de ce projectile.

1.11) Un gros livre est posé (à l'arrêt) sur une pile d'affaires dangereusement en pente. Exprimer les forces qui agissent dessus dans les deux référentiels donnés (voir schéma). Indications : $\|\mathbf{mg}\|$ = 30N, $\|\mathbf{F_N}\|$ = 15√3N, $\|F_{fr}\|$ = 15N. (« Bonus » : exprimer les vecteurs en fonction de mg, μ et θ seulement.)



2. Addition et soustraction

2.1) Un facteur quitte l'office de poste et se déplace de 200m vers le nord puis bifurque pour 400m à 30° au nord de l'est. Déterminer le déplacement du facteur.

2.2) Supposons **A** = (1, -2) et **B** = (2, -3). Exprimer **A**+**B** et **A**-**B** en même type de notation. Déterminer la norme et la direction de **A**+**B** et **A**-**B**

2.3) Trouver la résultante des déplacements suivants : **A** : 20km 30° au sud de l'est ; **B** : 50km à l'ouest ; **C** : 40km 30° nord-est ; **D** : 30km 60° au sud de l'est.

2.4) Simplifier : 2**A** + **B** + 3**C** – (**A** – 2**B** – 2(2**A** – 3**B** – **C**))

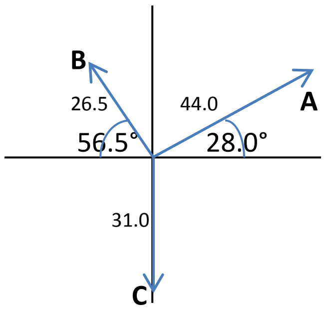
2.5) Les forces suivantes agissent sur une particule : $\mathbf{F_1}$ = (2, 3, -5), $\mathbf{F_2}$ = (-5, 1, 3), $\mathbf{F_3}$ = (1, -2, 4), mesurées en Newton. Trouver a) la résultante des forces, b) la magnitude de cette résultante.

2.6) Dans chaque cas, déterminer si les vecteurs sont linéairement dépendants ou indépendants : a) **A** = (2, 1, -3), **B** = (1, 0, -4), **C** = (4, 3, -1) ; b) **A** = (1, -3, 2), **B** = (2, -4, -1), **C** = (3, 2, -1).

2.7) Quelle condition doivent vérifier deux vecteurs **A** et **B** pour que $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| = \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|$?

2.8) **V** est un vecteur de 24.8 unités qui est dirigé par un angle de 23.4° au-dessus de l'axe des x négatifs : a) dessiner ce vecteur ; b) calculer les composantes $\mathbf{v}_x$ et $\mathbf{v}_y$; c)utiliser $\mathbf{v}_x$ et $\mathbf{v}_y$ pour obtenir à nouveau sa norme et sa direction (note : la partie c est un bon moyen de se rendre compte si le vecteur a été résolu correctement)

2.9) Trois vecteurs sont montrés dans la figure ci-dessous. Leurs normes sont données en unités arbitraires. 1. Déterminer la somme des trois vecteurs en termes de a) composantes, b) norme et angle avec l'axe des x. 2. Déterminer **A** – **B** et **B** - **A**, comparer les résultats et constater qu'ils sont opposés. 3. Déterminer graphiquement **A** – **C**, comparer avec des résultats algébriques.



2.10) Le sommet d'une montagne, 2450m au-dessus du camp de base, est mesuré sur une carte comme étant à 4580m du camp, horizontalement, dans une direction de 32.4° à l'ouest de « l'axe nord ». Quelles sont les composantes du vecteur de déplacement depuis le camp jusqu'au sommet ? Quelle est sa longueur ? Choisissez l'axe x vers l'est, l'axe y vers le nord et l'axe z vers le haut.

2.11) On donne un vecteur dans le plan xy qui a une norme de 90.0 unités et une composantes y de -55 unités. a) Quelles sont les deux possibilités pour sa composante en x ? b) On suppose que la composante en x est positive : spécifier le vecteur qui, si on lui ajoute le vecteur original, donnera un vecteur résultant qui soit long de 80 unités et pointe dans la direction -x.

Avec des concepts de la physique :

Quelques lois physiques connues utilisées ici :

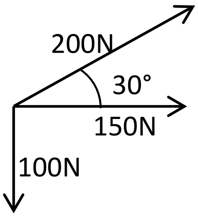
$\mathbf{v} = \Delta x/\Delta t$ (la vitesse moyenne résulte du déplacement divisé par le temps)

Pour un objet immobile ou circulant à vitesse constante $\sum \mathbf{F} = 0$ (la somme des forces (vecteurs) qui agissent sur cet objet est nulle)

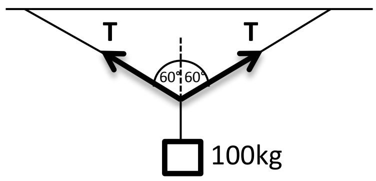
2.12) Deux villes, A et B, sont situées directement à l'opposé l'une de l'autre sur les rives d'un fleuve dont la largeur est de 8km et dont le débit coule à 4km/h. Un habitant de A veut rejoindre C qui est 6km en amont de A et sur la même rive que B. S'il veut rejoindre C en 1h, quelle vitesse doit-il avoir et quel trajet doit-il suivre ?

2.13) Un objet P subit trois forces coplanaires (voir schéma ci-dessous). Trouver la force qui l'empêchera de bouger.

2.13 :



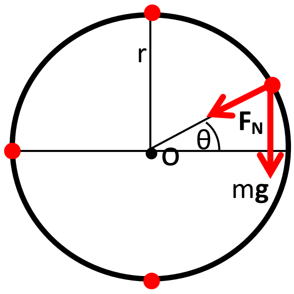
2.14 :



2.14) Un poids de 100kg est suspendu au centre d'une corde (voir schéma ci-dessus). Déterminer la tension **T** dans la corde.

2.15) On mesure, en un temps t = 0s, le vecteur position d'une bille : **p** = (2, 3). L'objet a un vecteur vitesse : **v** = $(t, -\frac{t}{2})$. À quelle position se trouve la bille au temps t = 12s ? Quel est le vecteur déplacement qu'elle a subi depuis t = 0 ?

2.16) Exprimer F_N , mg et F_{net} (=∑F) en coordonnées cartésiennes (x, y) et F_N et mg en coordonnées polaires (r, θ) aux 4 points suivants : (indications : $F_N = mv^2/r = mr\omega$ et est perpendiculaire au cercle en tout point, mg pointe toujours vers le bas, on néglige le frottement.)



3. Produit scalaire

3.1) Quel est le produit scalaire de **A** = $(2.0x^2, -4.0x, 5.0)$ et **B** = $(11.0, 2.5x)$?

3.2) Calculer l'angle entre les vecteurs **A** = (6.8, – 3.4, – 6.2) et **B** = (8.2, 2.3, – 7.0).

3.3) Le vecteur $\mathbf{V_1}$ pointe le long de l'axe des z et a une norme de 75 unités. Le vecteur $\mathbf{V_2}$ est dans le plan xy, a une norme de 58 unités et fait un angle de 48° avec l'axe des x (il pointe en-dessous de l'axe des x). Quel est le produit scalaire $\mathbf{V_1} \cdot \mathbf{V_2}$?

3.4) Donner un vecteur perpendiculaire à **v** = (3.0, 1.5)

3.5) Soient les vecteurs **A** = (-4.8, 6.8) et **B** = (9.6, 6.7), déterminer le vecteur C qui est dans le plan xy, perpendiculaire à **B** et dont le produit scalaire avec **C** est 20.0

3.6) Soit le vecteur **V** = (20, 22, -14) : Quels angles ce vecteur fait-il avec les axes x, y et z ?

3.7) Dans le repère (0, **i**, **j**, **k**), calculer les composantes et la norme des vecteurs **x** et **y** sachant que : $\mathbf{x} \cdot \mathbf{i} = 4$, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{j} = 7$ et $\mathbf{x} \cdot \mathbf{k} = 7$; $\mathbf{y} \cdot \mathbf{i} = -5$, $\mathbf{y} \cdot \mathbf{j} = 0$ et $\mathbf{y} \cdot \mathbf{k} = 12$

3.8) Calculer la norme de la projection orthogonale d'un vecteur **v** sur le vecteur **a.** 1. **a** = (-3, 4), **v** = (-7, -3) 2. **a** = (-1, 1), **v** = (5, 2)

3.9) On donne trois points : C = (-3, 9), D = (2, -3), M = (19, 10). Calculer les coordonnées de la projection orthogonale M' de M sur la droite CD, ainsi que celle du symétrique N de M par rapport à CD.

3.10) On donne les deux points A(-2, -1, 2) et B(-5, 3, 4) : calculer les coordonnées de la projection orthogonale de A sur la droite OB.

3.11) Trouver la norme de la projection des vecteurs suivants sur l'axe des abscisses : 1. Norme 6, orientation 53° ; 2. Norme 12, orientation 294,53° ; 3. (-4, 6).

3.12) On donne les vecteurs **A** = (2, 0, 6) et **B** = (3, -2, 4), trouver la longueur de la projection de **A** sur **B**.

Avec des concepts de la physique :

Le travail (W) d'une force (F) sur une distance (d) se calcule avec le produit scalaire : W = **F · d**

3.13) Une force constante, **F** = (2.0, 4.0)N agit sur un objet qui bouge le long d'une ligne droite. Si le déplacement de l'objet est **d** = (1.0, 5.0)m, calculer le travail fait par F en utilisant les deux manières de calculer le produit vectoriel : a) $W = \|F\|\ \|d\| \cos\theta$ et b) $W = F_x d_x + F_y d_y$.

3.14) Trouver le travail fait en bougeant un objet le long d'une droite de (3, 2, -1) à (2, -1, 4) avec une force **F** = (4, – 3, 2).

3.15) Trouver le travail fait en poussant un chariot à commissions avec une force de 20N à un angle de 30° sur une distance de 2m.

3.16) Deux forces $\mathbf{F_1}$ = (1.2, -0.5, 0.5)N et $\mathbf{F_2}$ = (0.9, – 1.2)N sont appliquées à un objet d'une masse de 0.1kg. Le déplacement produit par les deux forces est **r** = (4.0, 2.0, 2.0)m. Déterminer le travail fait par ces deux forces.

4. Produit vectoriel

4.1) Soient **A** = (2, 3, – 1) et **B** = (1, – 2, 3), déterminer **A** × **B** et **B** × **A**. Trouver l'angle entre **A** et **B**.

4.2) Règle de la main droite: Dans un repère orthonormé indirect (0, **i, j, k**) calculer **i** × **j**, **i** × **k**, **j** × **i**, **j** × **k**, **k** × **i**, **k** × **j**

4.3) Calculer les produits vectoriels suivants : 1. (1, -2, 5) x (-1, 3, 2) ; 2. (7, 3, ½) x (-1, 5, a)

4.4) Produit mixte : Soient les vecteurs a, b et c, expliquer si les propositions suivantes sont correctes. Si non, expliquer ; si oui, est-ce un scalaire ou un vecteur ? 1. a·(b × c) ; 2. a × (b ·c) ; 3. (a·b) × c ; 4.(a·b) × (c ·d) ; 5. (a × b) ·(c × d) ; 6. (a × b) × (c × d)

4.5) Calculer **A** × **B** si 1. **A** = (1, 2, 0) et **B** = (0, 3, 1) ; 2. **A** = 3**i** + 2**j** + 4**k** et **B** = **i** – 2**j** - 3**k**;3. **A** = (t, t^2, t^3) et **B** = $(1, 2t, 3t^2)$.

4.6) Supposez que pour les vecteurs **x**, **y**, **u** et **v**, les propositions suivantes sont justes : $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = (4, -3, 2)$, $\mathbf{u} \times \mathbf{y} = (1, 1, -5)$ et $\mathbf{v} \times \mathbf{y} = (-2, 1.5, -1)$. Trouver : 1. $(7\mathbf{x}) \times \mathbf{y}$; 2. $\mathbf{y} \times (\mathbf{u} + \mathbf{v})$; 3. $\mathbf{x} \times (-3\mathbf{y})$; 4. Est-ce que $(\mathbf{x} + \mathbf{v})$ et **y** sont parallèles ? 5. Et $(\mathbf{x} + 2\mathbf{v})$ et **y** ?

4.7) Soient $\mathbf{A} = (2, -1, 2)$ et $\mathbf{B} = (3, 4, -1)$, trouver **C** tel que $\mathbf{A} \times \mathbf{C} = \mathbf{B}$. N'y a-t-il qu'un seul vecteur **C** ?

4.8) Soient **A** et **B** deux vecteurs respectivement de norme 12 et 8 unités et formant un angle de 30°, quelle est la norme de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$? Quel angle entre **A** et **B** permet à celle-ci d'être maximale ?

4.9) Soient **A** un vecteur pointant vers l'est de norme = 9 unités et **B** un vecteur pointant vers le sud-ouest de norme = 11 unités, quelle est la norme de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ et dans quelle direction pointe-t-il ? Supposons la norme de **A** inconnue, exprimer la norme de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ en fonction de **A**.

4.10) Si un vecteur **A** pointe le long de l'axe des x négatifs et le vecteur **B** pointe le long de l'axe des z positifs, quelle est la direction de a) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$; b) $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$; c) quelle est la magnitude de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ et $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$?

4.11) Quel est l'angle entre les vecteurs **A** et **B** si $\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\| = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$?

Avec des concepts de la physique :

Plusieurs concepts, en physique, sont calculés à l'aide du produit vectoriel, vous aurez donc besoin, tout au long du semestre, de l'utiliser. Voici quelques lois que vous devez savoir utiliser :

Le moment de force (torque, $\boldsymbol{\tau}$) est trouvé à l'aide de la force (**F**) et du bras de levier (**r**) : $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

La vitesse angulaire à l'instant t d'un objet en rotation ($\boldsymbol{\omega}$) se calcule avec la position (**r**) et la vitesse tangentielle (**v**) de l'objet à ce temps t : $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$

Le moment cinétique **L** d'un objet en rotation se calcule à l'aide du vecteur position (**r**) et de la quantité de mouvement ($\mathbf{p} = m\mathbf{v}$) : $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$

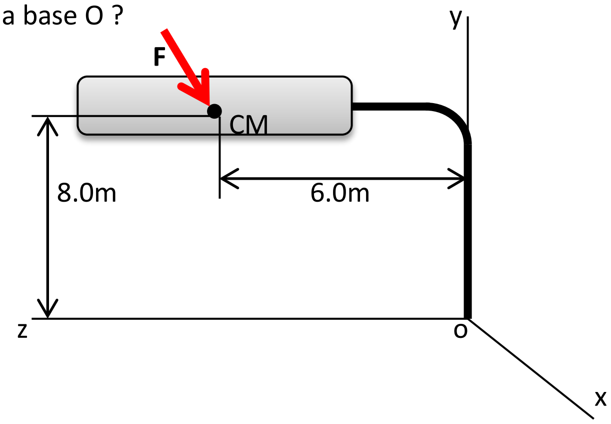
4.12) Une particule au point $\mathbf{r} = (2.0, 1.0, 3.0)$m est soumise à une force $\mathbf{F} = (0, 2.0, -1.0)$N. Déterminer le moment de force par rapport à l'origine.

4.13) Une particule a une quantité de mouvement $\mathbf{p} = (4, 6, 0)$kg·m/s. Trouver son moment cinétique alors qu'elle tourne autour de l'origine et qu'elle est à la position $\mathbf{r} = (0, 2, 5)$m.

4.14) Supposons qu'une force $\mathbf{F} = (3, 2, -4)$N est appliquée au point (1, -1, 2). Trouver le moment de force par rapport au point : a)(2, -1, 3), b)(4, -6, 3).

4.15) La vitesse angulaire d'un objet tournant autour d'un axe de rotation est donnée par $\boldsymbol{\omega} = (4, 1, -2)$. Trouver la vitesse tangentielle lorsque l'objet se trouve à un point P dont la position relative à un point de l'axe de rotation est (2, –3, 1).

4.16) Un ingénieur estime que sous les pires conditions météo, la force totale sur un panneau signalétique d'autoroute est **F** = (±2.4, **–** 4.1)kN, agissant sur le CM. Quel moment de force cette force exerce-t-elle sur la base O ?



5. Différentiation de vecteurs

5.1) Supposons que le vecteur **R** = (e^{-t}, ln(t^2 + 1), –tan(t)). Trouver au temps t = 0 : a)d**R**/dt, b)d^2**R**/dt^2, c) ‖d**R**/dt‖, d) ‖d^2**R**/dt^2‖.

5.2) Trouver un vecteur tangent à tout point de la courbe x = a cos(ωt), y = a sin(ωt), z = bt où a, b, et ω sont des constantes.

5.3) Supposons que **A** = (t^2, –t, (2t 1 1)) et **B** = ((2t - 3), 1, –t). Trouver au temps t = 1 :
a) d(**A** · **B**)/dt ; b) d(**A** × **B**)/dt ; c) d‖**A** + **B**‖/dt.

5.4) Soient les vecteurs **A** = (sin(u), cos(u), u), **B** = (5u, – 4, 1) et **C** = (2, 3, - 1).
Trouver à u = 0 d(**A** × (**B** x **C**))/du.

Avec des concepts de la physique :

Beaucoup de termes en physique s'expriment grâce à des dérivées ou des intégrales.

On retiendra notamment pour ces exercices que la vitesse est la dérivée de la position par rapport au temps et l'accélération est la dérivée de la vitesse par rapport au temps : **v** = d**r**/dt, **a** = d**v**/dt = d^2**r**/dt^2.

La force s'exprime aussi à l'aide d'une dérivée : **F** = d**p**/dt où **p** = m**v** car **F** = m**a** = m(d**v**/dt) = (dm**v**/dt)

5.5) Supposons qu'une particule bouge le long d'une courbe x = 2sin(3t), y = 2cos(3t), z = 8t à tout temps t > 0. Trouver : a) la vitesse et l'accélération de la particule, b)la magnitude (norme) de la vitesse et de l'accélération.

5.6) Un objet tombe en suivant une trajectoire régulière. Sa position est donnée par **r** = ((sin(t–$\frac{\pi}{4}$), 2cos(3t), –2t^2)m. Trouver la force nette qui agit sur cet objet de 5g et sa magnitude à t= $\frac{\pi}{2}$s.

6. Intégration de vecteurs

6.1) Soit $\mathbf{R}(t) = ((3t^2 - t), (2 - 6t), -4t)$. Trouver : a) $\int \boldsymbol{R}(t)dt$; b) $\int_2^4 \boldsymbol{R}(t)dt$

6.2) Calculer $\int_0^{\pi/2}(3\sin(u),\ 2\cos(u))du$

6.3) Soient $\mathbf{A}(t) = (t, -t^2, (t - 1))$ et $\mathbf{B}(t) = (2t^2, 0, 6t)$. Calculer a) $\int_0^2(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})dt$; b)) $\int_0^2(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})dt$

Avec des concepts de la physique :

On peut déduire des indications données dans la section précédente que $\mathbf{v} = \int \mathbf{a}dt$ et $\mathbf{r} = \int \mathbf{v}dt$

Le travail d'une force peut aussi être exprimé à l'aide d'une intégrale : $W_{a\to b} = \int_a^b dW = \int_a^b \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$

6.4) L'accélération **a** d'un objet en tout temps t est donnée par $\mathbf{a} = (0, -g)$, où g est une constante. À $t = 0$, la vitesse est donnée par $\mathbf{v} = (v_0\cos\theta_0, v_0\sin\theta_0)$ et le déplacement par $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Trouver **v** et **r** à tout temps $t > 0$. (Ceci décrit le mouvement d'un projectile lancé d'un canon avec un angle θ_0 par rapport à l'axe des x positifs et avec une vitesse initiale de v_0.)

6.5) L'accélération **a** d'une particule en tout temps $t \geq 0$ est donnée par $\mathbf{a} = (e^{-t}, -6(t + 1), 3\sin(t))$. Si la vitesse **v** et le déplacement **r** sont de **0** à $t = 0$, trouver **v** et **r** pour tout t.

6.6) Trouver le travail fait en bougeant une particule avec la force $\mathbf{F} = ((3x^2 + 6y), -14yz, 20xz^2)$ le long de : a)une courbe décrite par $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, de (0, 0, 0) à (1, 1, 1); b) deux lignes droites de (0, 0, 0) à (1, 0, 0) puis de (1, 1, 0) à (1, 1, 1).