Examen SCGC

Commande de procédés **Juillet 2017**

NOM, PRENOM : ....

SIGNATURE : ....

Aucune feuille annexe SVP

Nul besoin de recopier des éléments du polycopié ;
Si nécessaire, indiquer la page ou l'équation concernée.

	1
1	1
2	1
3	1+
4	1
5	1+
	6++

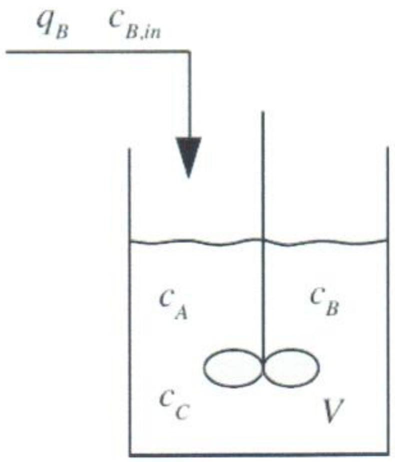


Figure 1. Réacteur semi-batch isotherme.

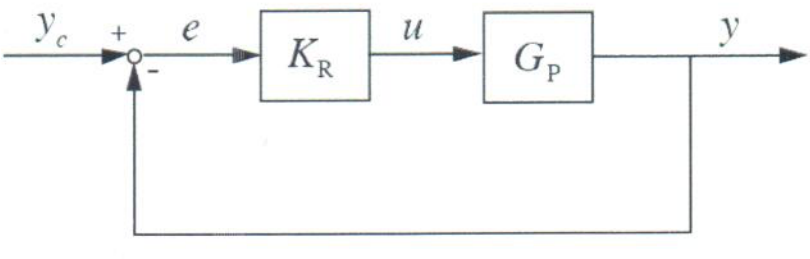
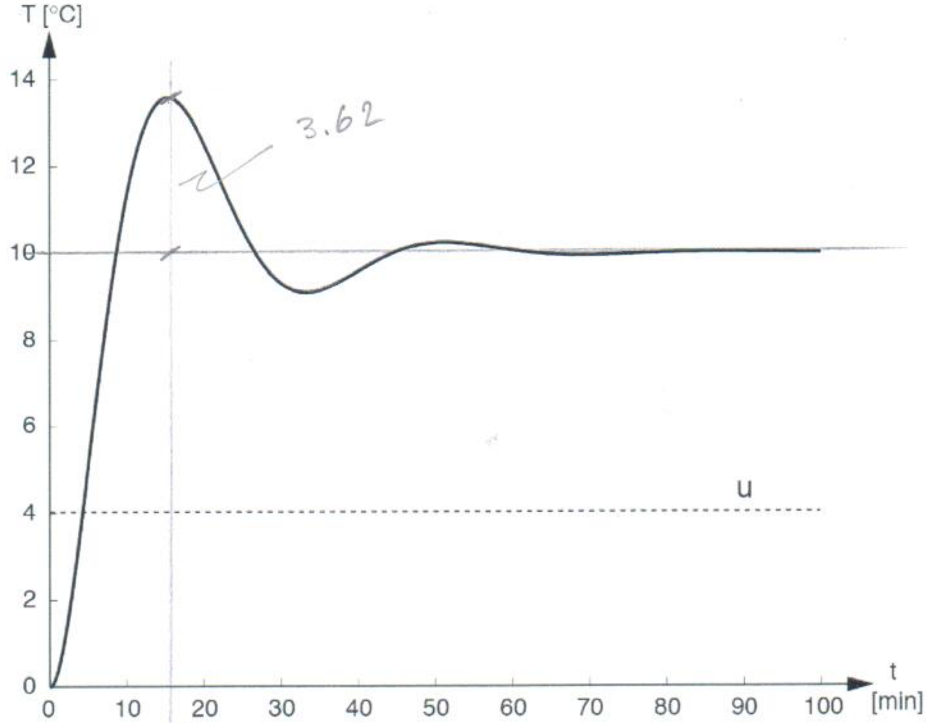


Figure 2. Système commandé en rétroaction.

KA = 10°C



$t_p = 15$ min

Figure 3. Réponse du système thermique à $u(t) = 4\varepsilon(t)$.

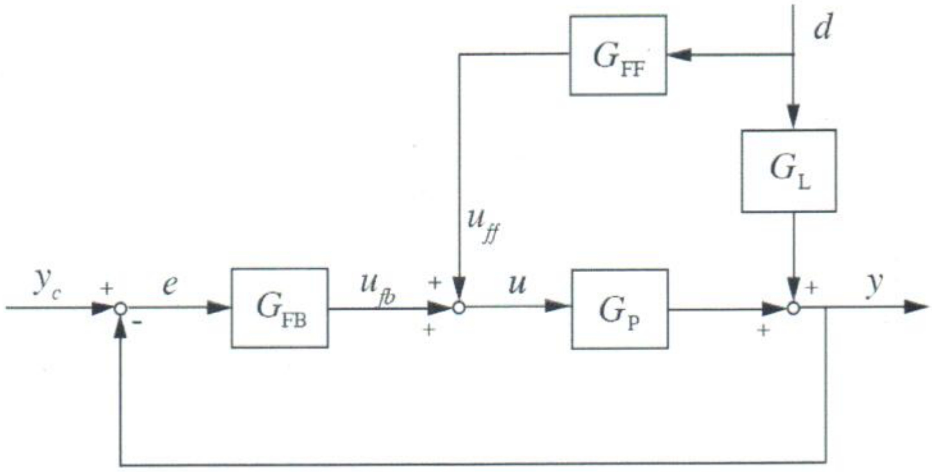


Figure 4. Système commandé en rétroaction et par compensation de perturbation.

Problème 1 (Modélisation 1 point)

Soit le réacteur semi-batch isotherme de la figure 1, dans lequel a lieu la réaction $A + B \rightarrow C$ avec la vitesse de réaction $r(t) = kc_A(t)c_B(t)$. L'alimentation est caractérisée par le débit volumique $q_B(t)$ et la concentration constante $c_{B,in}$. Les conditions initiales sont V_0, c_{A0} et $c_{B0} = c_{C0} = 0$.

a) Ecrire les bilans de matière pour ce réacteur.

b) Quel est le nombre *minimal* de variables d'état (expliquer) ?

c) Dessiner *qualitativement* le comportement temporel des variables d'état $V(t)$ et $c_A(t)$. Existe-t-il un état stationaire ? Si oui, calculer le.

d) Exprimer la concentration $c_C(t)$ à partir des variables d'état $V(t)$ et $c_A(t)$.

Réponses :

a)

0.25

$$\dot{V} = q_B \qquad V(0) = V_0$$
$$\dot{c}_A = -\frac{q_B}{V} c_A - k c_A c_B \qquad c_A(0) = c_{A0}$$
$$\dot{c}_B = \frac{q_B}{V}\left[c_{B,in} - c_B\right] - k c_A c_B \qquad c_B(0) = 0$$
$$\dot{c}_C = -\frac{q_B}{V} c_C + k c_A c_B \qquad c_C(0) = 0$$

b) Nombre minimal de variables d'état $= R + p = 2$

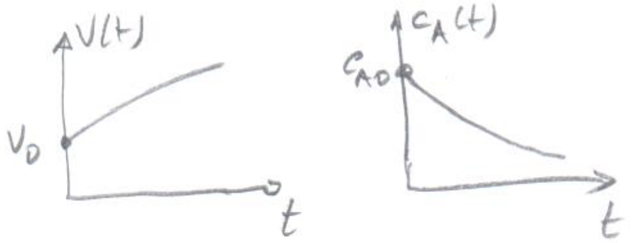
0.25

$R = 1$: nombre de réactions

$p = 1$: — de débits indépendants

c)

0.25



Pas d'état stationnaire

d)

0.25

$$\frac{d}{dt}(V c_C) = -\frac{d}{dt}(V c_A)$$

$$V(t)c_C(t) - \cancel{V_0 c_C(0)}^{\,0} = -\left[V(t)c_A(t) - V_0 c_{A0}\right]$$

$$c_C(t) = \frac{V_0 c_{A0}}{V(t)} - c_A(t)$$

(Si nécessaire, continuez au verso)

Problème 2 (Système commandé 1 point)

Soit le système commandé de la figure 2 avec le procédé donné par

$$\dot{x}(t) = -4x(t) + [2x(t) + 1]u(t) \qquad x(0) = 0.5$$
$$y(t) = 2x(t-1) + u(t-1)$$

a) Linéariser ce système pour le point de fonctionnement correspondant à $\bar{u} = 1$.

b) Calculer la fonction de transfert correspondante $G_P(s)$.

c) Exprimer $G_P(s)$ sous la forme d'une fraction rationnelle en utilisant une approximation de Padé de premier ordre pour le retard pur.

d) Ce procédé est commandé par un régulateur proportionnel. Pour quel domaine du gain K_R ce système commandé sera-t-il stable ?

Réponses :

0.25

a) @ SS $\quad 0 = -4\bar{x} + [2\bar{x}+1]\bar{u} \qquad \bar{u} = 1 \rightarrow \bar{x} = 0.5$

$\bar{y} = 2\bar{x} + \bar{u} \qquad \bar{y} = 2$

Linéariser: $\quad A = -4 + 2u \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} = -2 \qquad B = 2x + 1 \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} = 2$

$\rightarrow \quad \dot{x} = -2x + 2u \qquad x(0) = 0.5 - 0.5 = 0$

$y(t) = 2x(t-1) + u(t-1)$

0.25

b) $\mathcal{L} \rightarrow \quad X(s)\,[s+2] = 2\,U(s) \qquad \dfrac{X(s)}{U(s)} = \dfrac{2}{s+2}$

$Y(s) = [2X(s) + U(s)]\,e^{-s} = \dfrac{(s+6)}{(s+2)}\,e^{-s}\,U(s)$

$G_P(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{s+6}{s+2}\,e^{-s}$

c) Padé: $\quad e^{-s} = \dfrac{e^{-s/2}}{e^{s/2}} \simeq \dfrac{1-\frac{s}{2}}{1+\frac{s}{2}} = \dfrac{2-s}{2+s}$

0.25

$G_P(s) \simeq \dfrac{(s+6)(2-s)}{(s+2)(2+s)} = \dfrac{-(s+6)(s-2)}{(s+2)^2}$

d) Eq. caractéristique: $\quad 1 + G_R G_P = 0 = 1 - K_R \dfrac{(s+6)(s-2)}{(s+2)^2}$

$0 = (s^2 + 4s + 4) - K_R(s^2 + 4s - 12)$

(Si nécessaire, continuez au verso)

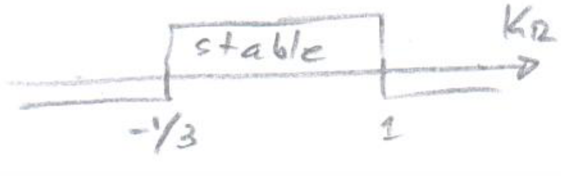
0.25

$0 = (1-K_R)s^2 + 4(1-K_R)s + 4(1+3K_R)$

Cond. N&S:

$1 - K_R > 0 \qquad K_R < 1$

$1 + 3K_R > 0 \qquad K_R > -1/3$



Problème 3 (Systèmes linéaires 1 point)

a) Calculer la transformée de Laplace du signal

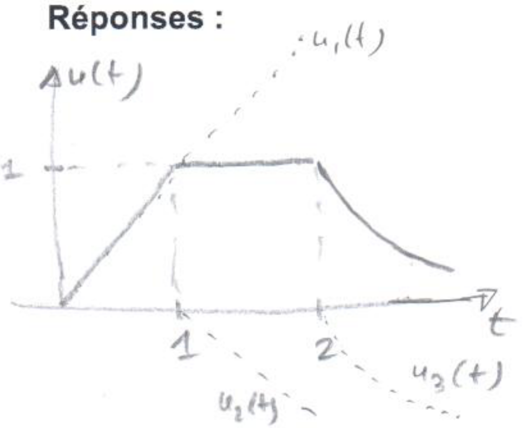
$$u(t) = \begin{cases} t & pour \quad 0 \le t < 1 \\ 1 & pour \quad 1 \le t < 2 \\ e^{-2(t-2)} & pour \quad t \ge 2 \end{cases}$$

b) Calculer le signal temporel dont la transformée de Laplace est $Y(s) = \frac{5(s+1)(s+3)}{(s+2)^2}$

c) **Question bonus (0.25 point)** : Pour $G(s) = \frac{A}{s-p}$, quelle condition faut-il avoir sur le pôle p pour que la réponse indicielle soit bornée ?

Réponses :

a)



0.5

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)$$

$$u_1(t) = t\,\varepsilon(t)$$

$$u_2(t) = -(t-1)\,\varepsilon(t-1)$$

$$u_3(t) = \left[e^{-2(t-2)} - 1\right]\varepsilon(t-2)$$

$$U(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}e^{-s} + \left[\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s}\right]e^{-2s} = \frac{1}{s^2}\left[1 - e^{-s}\right] - \frac{2e^{-2s}}{s(s+2)}$$

0.5

b) $Y(s) = 5 - \frac{5}{(s+2)^2} \longrightarrow y(t) = 5\delta(t) - 5te^{-2t}\varepsilon(t)$

c) $G(s) = \frac{A}{s-p}$ $\quad U(s) = \frac{1}{s}$

0.25

$$Y(s) = G(s)\,U(s) = \frac{A}{s(s-p)} \overset{si\ p \neq 0}{=} \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s-p} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \left(\alpha t + \beta e^{pt}\right)\varepsilon(t)$$

$$\overset{si\ p = 0}{=} \frac{A}{s^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = At\,\varepsilon(t)$$

Pour que la réponse reste bornée $\boxed{p < 0}$

(Si nécessaire, continuez au verso)

Problème 4 (Régulateur PID 1 point)

La réponse d'un système thermique à l'excitation $u(t) = 4\varepsilon(t)$ est donnée à la figure 3.

a) Sachant que le système ne possède pas de zéro, déterminer sa fonction de transfert.

b) Mettre au point un régulateur PID de telle façon que la fonction de transfert du système bouclé soit $G_{BF}(s) = \frac{1}{4s+1}$.

Réponses :

a) $t_p = 15$ min

$KA = 10 \qquad A = 4$

$$\left.\begin{aligned} KA \exp\left\{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right\} &= 3.62 \\ \tau &= \frac{t_p\sqrt{1-\xi^2}}{\pi} \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} K &= 2.5 \\ \xi &= 0.308 \\ \tau &= 4.54 \text{ min} \end{aligned}$$

0.5

$$G(s) = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\tau\xi s + 1} = \frac{2.5}{20.6\, s^2 + 2.8\, s + 1}$$

b) $$G_R = \frac{G_{BF}}{G\left[1 - G_{BF}\right]} = \frac{1}{G\,\tau_{BF}\, s} = \frac{20.6\, s^2 + 2.8 s + 1}{2.5 * 4\, s}$$

$$\text{PID :} \quad K_R\left[\frac{\tau_I \tau_D s^2 + \tau_I s + 1}{\tau_I s}\right] = \frac{\tau_I \tau_D s^2 + \tau_I s + 1}{\frac{\tau_I}{K_R}\, s}$$

0.5

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{\tau_I}{K_R} &= 10 \\ \tau_I \tau_D &= 20.6 \\ \tau_I &= 2.8 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} \tau_I &= 2.8 \text{ min} \\ \tau_D &= 7.36 \text{ min} \\ K_R &= 0.28 \end{aligned}$$

(Si nécessaire, continuez au verso)

Problème 5 (Commande feedforward 1 point)

Soit le système commandé de la figure 4 avec les fonctions de transfert

$$G_P(s) = \frac{5e^{-2s}}{(10s+1)(s+1)} \quad \text{et} \quad G_L(s) = \frac{-2e^{-2s}}{5s+1}$$

a) Calculer la fonction de transfert $G_{FF}(s)$ du régulateur feedforward.

b) Ce régulateur est-il physiquement réalisable (causal) ? Justifier. Sinon, proposer une approximation qui soit causale.

c) Proposer une relation dynamique temporelle entre la mesures $d(t)$ et la composante de l'entrée $u_{ff}(t)$.

d) Ecrire cette loi de commande sous forme numérique pour T=0,1.

e) **Question bonus (0.25 point) :** Le choix de ce régulateur feedforward influence-t-il la stabilité du système commandé (justifier) ?

Réponses :

(0.25) a) $G_{FF}(s) = -\frac{G_L(s)}{G_P(s)} = \frac{0.4\,(10s+1)(s+1)}{5s+1}$

(0.25) b) $G_{FF}(s)$ est non causal $\quad n = 1, \quad m = 2$

Approximation causale en négligeant le zéro à -1

$G_{FF}(s) \simeq \frac{0.4\,(10s+1)}{5s+1}$

(0.25) c) $\frac{U_{ff}(s)}{D(s)} = \frac{4s+0.4}{5s+1} \rightarrow 5\,\dot{u}_{ff}(t) + u_{ff}(t) = 4\,\dot{d}(t) + 0{,}4\,d(t)$

(0.25) d) $\dot{u}_{ff}(t=kT) \simeq \frac{u_{ff}(k+1) - u_{ff}(k)}{T} \qquad \dot{d}(t=kT) \simeq \frac{d(k+1) - d(k)}{T}$

$\rightarrow 5\,\frac{u_{ff}(k+1) - u_{ff}(k)}{T} + u_{ff}(k) = 4\,\frac{d(k+1) - d(k)}{T} + 0.4\,d(k)$

$u_{ff}(k+1) = \left(1 - \frac{T}{5}\right) u_{ff}(k) + 0.8\,d(k+1) - 0.8\left[1 - \frac{T}{10}\right] d(k)$

Pour T=0.1 : $\quad u_{ff}(k+1) = 0.98\,u_{ff}(k) + 0.8\,d(k+1) - 0.792\,d(k)$

(0.25) e) $G_{FF}(s)$ n'influence pas l'équation caractéristique

$\rightarrow$ pas d'influence sur la stabilité

(Si nécessaire, continuez au verso)