Examen SCGC

Commande de procédés **Juin 2016**

NOM, PRENOM: ......ab......

SIGNATURE: ....

Aucune feuille annexe SVP

Nul besoin de recopier des éléments du polycopié ; si nécessaire, indiquer la page ou l'équation concernée.

	1
1	1
2	1
3	1+
4	1+
5	1

6++

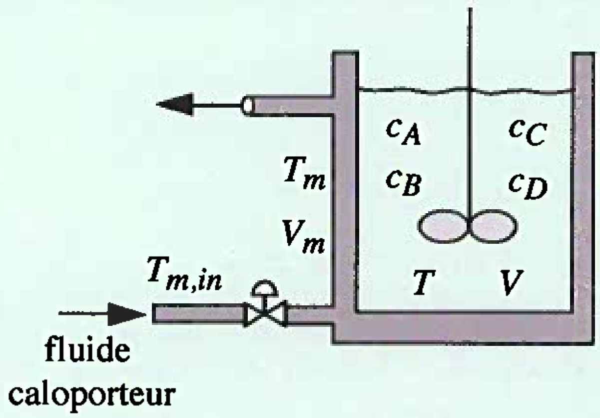
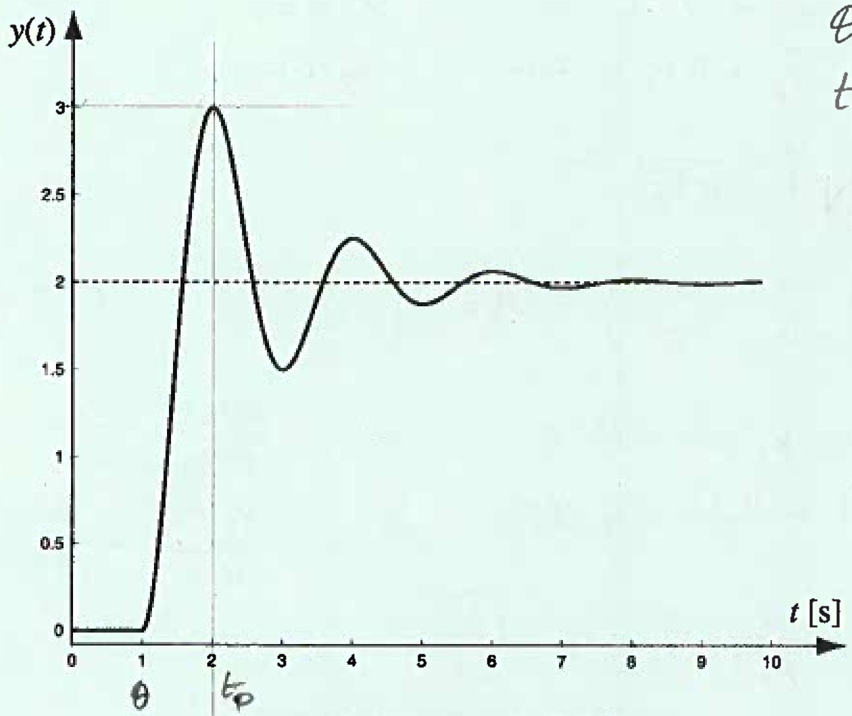


Figure 1. Réacteur batch avec manteau de refroidissement.



$\theta = 1$

$t_p = 1$

$K e^{-\frac{\xi \pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 1$

$K = 2$

Figure 2. Réponse indicielle.

Problème 1 (Système dynamique 1 point)

Considérons le système dynamique

$$\dot{x}_1(t)+x_1(t)=u(t) \qquad x_1(0)=0$$
$$\dot{x}_2(t)+2x_1(t)x_2(t)=4u(t) \qquad x_2(0)=2$$
$$y(t)=\sqrt{x_2(t)}$$

avec l'entrée u(t) et la sortie y(t).

a) Ce système est-il linéaire, stationnaire, causal et initialement au repos pour $\bar{u}=0$?

b) Linéariser le modèle pour le point d'équilibre ($\bar{u}=0, \bar{x}_1=0, \bar{x}_2=2$) et calculer les matrices *A*, *B* et *C*.

c) Calculer la fonction de transfert $Y(s)/U(s)$.

Réponses :

a) NL, S, C, R

0.25

@ SS pour $\bar{u}=0$ $\quad \bar{x}_1=\bar{u}=0 \quad\quad \bar{x}_1=0$

$2\bar{x}_1\bar{x}_2=4\bar{u}=0 \quad\quad \bar{x}_2$ quelconque

b) Termes NL : $2x_1x_2 \cong \cancel{2\bar{x}_1\bar{x}_2}^{\,0}+2\bar{x}_2\delta x_1+\cancel{2\bar{x}_1\delta x_2}^{\,0}=2\bar{x}_2\delta x_1$

$$\sqrt{x_2}\simeq\sqrt{\bar{x}_2}+\frac{1}{2\sqrt{\bar{x}_2}}\delta x_2$$

Système linéarisé en variables écart pour $\bar{u}=0, \bar{x}_1=0, \bar{x}_2=2$

0.5

$$\dot{x}_1+x_1=u \qquad x_1(0)=0$$
$$\dot{x}_2+4x_1=4u \qquad x_2(0)=0$$
$$y=\frac{1}{2\sqrt{2}}x_2$$

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -4 & 0\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

c) $sX_1(s)+X_1(s)=U(s) \longrightarrow \dfrac{X_1(s)}{U(s)}=\dfrac{1}{s+1}$

$sX_2(s)+4\dfrac{U(s)}{s+1}=4U(s) \longrightarrow \dfrac{X_2(s)}{U(s)}=\dfrac{4}{s+1}$

0.25

$$\Rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{4}{2\sqrt{2}}\,\frac{1}{s+1}=\frac{\sqrt{2}}{s+1}$$

(Si nécessaire, continuez au verso)

Problème 2 (Système linéaire 1 point)

Un système dynamique est donné par sa réponse indicielle

$$y(t) = 2\varepsilon(t)\left[1 - e^{-t} - te^{-t}\right]$$

a) Calculer sa fonction de transfert.

b) Evaluer l'ordre, le gain statique et les constantes de temps de ce système.

c) Calculer la réponse impulsionnelle du système.

d) Calculer la réponse libre aux conditions initiales $y(0) = 1$ $\dot{y}(0) = -1$.

Réponses :

a) $$Y(s) = 2\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}\right] = \frac{2\left[(s+1)^2 - s(s+1) - s\right]}{s(s+1)^2} = \frac{2}{s(s+1)^2}$$

$$U(s) = \frac{1}{s}$$

0,25

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{(s+1)^2}$$

0,25 b) Ordre 2, gain statique 2, $\tau_1 = \tau_2 = 1$

c) $U(s) = 1 \rightarrow Y(s) = \frac{2}{(s+1)^2}$

0,25

$$\rightarrow y(t) = 2te^{-t}\varepsilon(t)$$

d) $$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{s^2+2s+1} \longrightarrow \ddot{y} + 2\dot{y} + y = 2u \quad \begin{cases} y(0) = 1 \\ \dot{y}(0) = -1 \end{cases}$$

Réponse libre, $u(t) = 0$: $\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 0 \quad \begin{cases} y(0) = 1 \\ \dot{y}(0) = -1 \end{cases}$

$\mathcal{L} \downarrow$

$$s^2 Y(s) - s\,y(0) - \dot{y}(0) + 2\left[sY(s) - y(0)\right] + Y(s) = 0$$

0,25

$$Y(s)\left[s^2 + 2s + 1\right] = s\,y(0) + \left[\dot{y}(0) + 2y(0)\right]$$

$$Y(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+1} = \frac{1}{s+1}$$

$\mathcal{L}^{-1} \downarrow$

$$y(t) = e^{-t}\varepsilon(t)$$

(Si nécessaire, continuez au verso)

Problème 3 (Modélisation 1 point)

Soit le réacteur batch isotherme donné à la figure 1, dans lequel ont lieu les deux réactions exothermiques $2A \rightarrow B+C$ et $A+C \rightarrow D$ avec les vitesses de réaction $r_1=k_1c_A^2$ et $r_2=k_2c_Ac_C$. Les conditions initiales sont c_{A0} et $c_{B0}=c_{C0}=c_{D0}=0$.

a) Ecrire les bilans de matière en termes de concentrations pour A, B, C et D.

b) Les bilans de matière sont–ils linéairement indépendants ? Discuter ce point et indiquer le nombre de bilans linéairement indépendants.

c) Ecrire les bilans thermiques pour le réacteur et le manteau.

d) **Question bonus (0.25 point)**: Ecrire les 4 bilans de matière sous forme minimale.

Réponses :

a) 0.25

$$\dot{c}_A = -2k_1c_A^2 - k_2c_Ac_C \qquad c_A(0) = c_{A0}$$
$$\dot{c}_B = k_1c_A^2 \qquad c_B(0) = 0$$
$$\dot{c}_C = k_1c_A^2 - k_2c_Ac_C \qquad c_C(0) = 0$$
$$\dot{c}_D = k_2c_Ac_C \qquad c_D(0) = 0$$

b) 0.25

$S=4 \qquad R=2$ réacteur batch

$S-R=2$ bilans linéairement indépendants

c) 0.5

$$\rho V c_p \dot{T} = V\left[(-\Delta H_1)k_1c_A^2 + (-\Delta H_2)k_2c_Ac_C\right] - UA(T-T_m)$$

$$\rho_m V_m c_{pm} \dot{T}_m = \rho_m c_{pm} q_{m,in}(T_{m,in}-T_m) + UA(T-T_m)$$

d) 0.25

$$\dot{c}_A = -2\dot{c}_B - \dot{c}_D \longrightarrow c_A - c_{A0} = -2c_B - c_D$$
$$\dot{c}_C = \dot{c}_B - \dot{c}_D \longrightarrow c_C = c_B - c_D$$

Sytème sous forme minimale:

$$\begin{cases} \dot{c}_B = k_1c_A^2 & c_B(0)=0 \\ \dot{c}_D = k_2c_Ac_C & c_D(0)=0 \\ c_A = c_{A0} - 2c_B - c_D & \\ c_C = c_B - c_D & \end{cases}$$

(Si nécessaire, continuez au verso)

Problème 4 (Commande 1 point)

On considère le réacteur batch de la figure 1. On souhaite garder la température du réacteur T constante à l'aide d'une commande en cascade qui manipule la température à l'entrée du manteau $T_{m,in}$.

a) Dessiner le schéma fonctionnel d'une telle commande en cascade en identifiant toutes les variables du schéma.

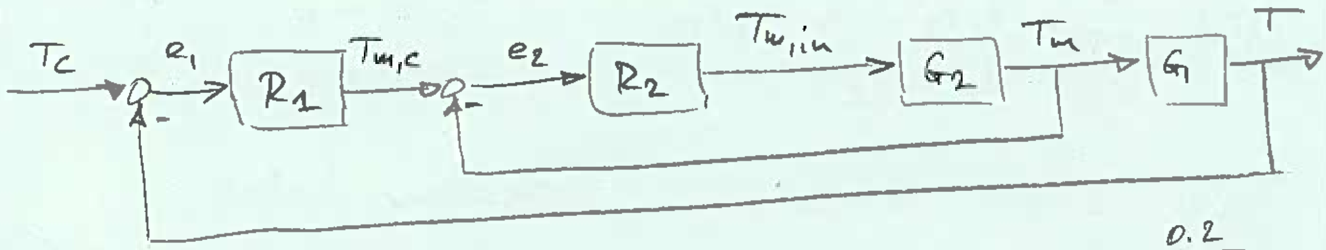
b) On a estimé les fonctions de transfert $\frac{T_m(s)}{T_{m,in}(s)} = \frac{0,2}{5s+1}$ et $\frac{T(s)}{T_m(s)} = \frac{0,5\,e^{-s}}{10s+1}$. Calculer les régulateurs d'une commande PI-P avec les propriétés suivantes : (i) la boucle secondaire a une constante de temps de 1, et (ii) le régulateur primaire est calculé selon les règles de Ziegler-Nichols.

c) **Question bonus (0.25 point):** Est-il possible de déstabiliser le système commandé en augmentant le gain du régulateur P (justification qualitative suffit) ?

Réponses :

a)

0,25



b) Boucle secondaire

$$\frac{T_m(s)}{T_{m,c}(s)} = \frac{R_2(s)\,G_2(s)}{1+R_2(s)\,G_2(s)} = \frac{K_{R,2}\,\frac{0.2}{5s+1}}{1+K_{R,2}\,\frac{0.2}{5s+1}}$$

0,25

$$= \frac{0.2\,K_{R,2}}{5s+1+0.2\,K_{R,2}} = \frac{\frac{0.2\,K_{R,2}}{1+0.2\,K_{R,2}}}{\frac{5}{1+0.2\,K_{R,2}}\,s+1} = \frac{K_2}{\tau_{BF,2}\,s+1}$$

$$\tau_{BF,2} = \frac{5}{1+0.2\,K_{R,2}} \overset{!}{=} 1 \longrightarrow \underline{K_{R,2} = 20}$$

0,25

$$K_2 = \frac{0.2*20}{1+0.2*20} = \frac{4}{5} = 0.8$$

Boucle primaire

$$\frac{T(s)}{T_{m,c}(s)} = \frac{T(s)}{T_m(s)}\,\frac{T_m(s)}{T_{m,c}(s)} = \frac{0.5\,e^{-s}}{10s+1}\cdot\frac{0.8}{s+1}$$

0,25

$$\approx \frac{0.4}{10s+1}\,e^{-2s}$$

Régulateur PI selon ZN :

$$K_{R,1} = 0.9\,\frac{\tau}{\theta K} = 0.9\,\frac{10}{2*0.4} = \underline{11,25}$$

(Si nécessaire, continuez au verso)

$$\tau_{I,1} = 3.33\,\theta = \underline{6.66}$$

c) Oui. Si $K_{R,2} \nearrow$, alors $K_2 \nearrow$ et $K \nearrow$

0,25

Pour $K_{R,1}$ donné, un grand K déstabilisera le système commandé.

Problème 5 (Réponse temporelle 1 point)

La réponse indicielle d'un système dynamique inconnu est donnée à la figure 2.

a) Déterminer le retard pur et le gain statique de ce système.

b) Sachant que le système ne possède pas de zéro, déterminer ses pôles.

c) Déterminer sa fonction de transfert. Ce système dynamique est-il stable ?

Réponses :

0.25 a) $\theta = 1\,s$ $\quad K = 2$

b) Polycopié p149 cas sous-amorti.

$$t_p = \frac{\pi \tau}{\sqrt{1-\xi^2}} = 1$$

$$2\, e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 1 \quad \longrightarrow \quad \xi = 0.215$$

0.5

$$\tau = \frac{2\sqrt{1-\xi^2}}{\pi} = 0.31$$

$$p_{1,2} = -\frac{1}{\tau}\left(\xi \pm \sqrt{\xi^2-1}\right) = -0.69 \pm \pi j$$

c) $$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K\, e^{-\theta s}}{\tau^2 s^2 + 2\tau\xi s + 1} = \frac{2\, e^{-s}}{0.096\, s^2 + 0.134 s + 1}$$

0.25

Système stable car les 2 pôles ont une partie réelle négative

(Si nécessaire, continuez au verso)