Mécanique Analytique

Série 9

21/22 décembre 2004

Exercice 1 : Transformation canonique

Pour un système ayant un espace de phase de dimension 2, on considère les transformations suivantes:

1. $\begin{cases} Q(q,p) = q + te^{p^2} \\ P(q,p) = p + \alpha q t^2 \end{cases}$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$;

2. $\begin{cases} Q(q,p) = \mathrm{arctg}(q/p) \\ P(q,p) = \frac{1}{2}(p^2+q^2) \end{cases}$ pour $(p,q) \neq (0,0)$.

Lesquelles de ces transformations sont canoniques ? Justifier les réponses.

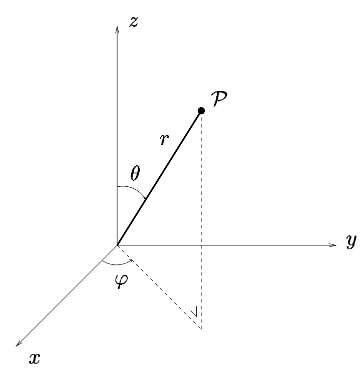
Exercice 2 : Théorie de Hamilton–Jacobi

Soit un point matériel de masse m se déplaçant dans $\mathbb{R}^3$ et soumis à un potentiel de la forme (on utilise les coordonnées sphériques dans cet exercice)

$$V(r,\theta,\varphi) = A(r) + \frac{B(\theta)}{r^2} \ ,$$

où nous garderons les fonctions $A(r)$ et $B(\theta)$ arbitraires pour le moment.

Le but de cet exercice est d'appliquer la méthode de Hamilton-Jacobi à ce problème afin de trouver la solution générale du mouvement de la masse m.



(i) Ecrire le Hamiltonien H du système en coordonnées sphériques.

(ii) Ecrire l'équation de Hamilton-Jacobi pour ce problème, *i.e.*

$$H\left(q_i, \frac{\partial f}{\partial q_i}, t\right) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \ , \quad \text{avec} \quad f = f(q_i, t)$$

et trouver la solution générale de cette équation en appliquant la méthode de séparation des variables. Nous noterons $S(r,\theta,\varphi,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,t)$ la solution générale ainsi trouvée (en omettant la constante additive que l'on peut toujours ajouter).