Mécanique Analytique

Série 8

15/16 décembre 2004

Exercice 1 : Calculs d'Hamiltoniens

Trouver les Hamiltoniens correspondant aux Lagrangiens suivants:

1) pendule en rotation

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = \frac{mR^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2\theta\right) + mgR\cos\theta$$

2) pendule sphérique

$$\mathcal{L}(\theta, \phi, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = \frac{mR^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta\right) - mgR\cos\theta$$

3) système de ressorts

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) - \frac{k}{2}x_1^2 - \frac{k}{2}x_2^2 - \frac{k}{2}(x_1 - x_2)^2$$

4) pendule en déplacement

$$\mathcal{L}(u, \dot{u}, \phi, \dot{\phi}) = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{u}^2 + \frac{m_2}{2}l^2\dot{\phi}^2 + m_2 l\dot{u}\dot{\phi}\cos\phi + m_2 gl\cos\phi$$

Exercice 2 : Transformation canonique

(i) Déterminer la transformation canonique engendrée par la fonction génératrice

$$F_1(q_j, Q_j) = \sum_{k=1}^{l} q_k Q_k.$$

(ii) Trouver une fonction génératrice du type $F_4(p_j, P_j)$ qui engendre la même transformation.

Exercice 3 : Transformation canonique

Considérer un système décrit par le Hamiltonien

$$H(q, p, t) = \omega^2 p(q + t)^2$$

où ω est un paramètre. Pour déterminer le mouvement, on introduit la transfomation suivante:

$$\begin{aligned} Q &= q + t, \\ P &= p. \end{aligned}$$

(i) En utilisant les crochets de Poisson démontrer que cette transformation est canonique.

(ii) Déterminer une fonction génératrice $F_2(q, P, t)$ qui conduit à cette transformation.

(iii) Ecrire le nouvel Hamiltonien $K(Q, P, t)$.

(iv) Résoudre les équations du mouvement pour Q et P.

(v) En déduire la solution pour $q(t)$ et $p(t)$.

Indication: La fonction génératrice F_1 associée à une transformation canonique est une fonction des anciennes coordonnées q_i, des nouvelles coordonnées Q_i et du temps. Elle relie les anciennes et les nouvelles coordonées par les relations:

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}, \quad K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}.$$

La fonction génératrice F_2 associée à une transformation canonique est une fonction des anciennes coordonnées q_i, des nouvelles impulsions P_i et du temps. Elle relie les anciennes et les nouvelles coordonées par les relations:

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}, \quad K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}.$$