Mécanique Analytique

Série 7

$1^{\text{er}}/2^{\text{e}}$ décembre 2004

Exercice 1 : Crochets de Poisson; Constantes du mouvement

Rappel: Soit $f(\{q_i\}, \{p_i\}, t)$ une fonction des coordonnées et des impulsions généralisées et du temps t, on a

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}, \tag{1}$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{2}$$

Les crochets de Poisson de deux fonctions $A(\{q_i\}, \{p_i\}, t)$ et $B(\{q_i\}, \{p_i\}, t)$ sont definis par

$$\{A, B\} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right). \tag{3}$$

(i) Montrer que :

$$\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} L_k, \tag{4}$$

où L_i est la i-ème composante du moment cinétique $\vec{L}$ d'une particule de masse m située à $\vec{r}$ et de l'impulsion $\vec{p}$:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}. \tag{5}$$

(ii) *Problème de Kepler*: Une masse m se déplace dans le champ gravitationnel créé par une masse immobile M. Alors son énergie potentielle est

$$V(r) = -\frac{GMm}{r} \tag{6}$$

où $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3 kg^{-1} s^{-2}}$ est la constante de gravitation. En partant de l'équation (1) montrer que le moment cinétique $\vec{L}$ et l'énergie mécanique sont des constantes du mouvement. ($\vec{L}$ est toujours conservé dans le cas d'un potentiel avec une symétrie sphérique.)

De nouveau en appliquant l'équation (1), montrer que le vecteur de Laplace-Lenz

$$\vec{K} = \dot{\vec{r}} \times \vec{L} - GMm\frac{\vec{r}}{r} \tag{7}$$

est une constante du mouvement pour le problème de Kepler.
$\vec{L}$, respectivement $\vec{K}$, pointe dans quelles directions ?