

Mécanique Analytique

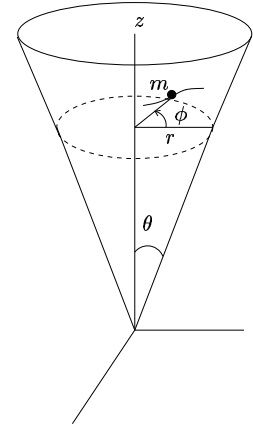
Série 6

24/25 novembre 2004

Exercice 1 : Forces de contraintes

Dans le cas d'un point matériel se déplaçant dans un cône d'ouverture 2θ , on se propose d'étudier en détail les forces et les contraintes à l'aide des équations de Lagrange de 1^{ère} espèce.

- (i) Ecrire le Lagrangien \mathcal{L}_0 de ce système en coordonnées cylindriques (sans tenir compte de la contrainte).
- (ii) Ecrire la contrainte sous la forme : $f(r, \phi, z) = 0$
- (iii) Considérer $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \lambda f(r, \phi, z)$ comme nouveau Lagrangien avec comme coordonnées (r, ϕ, z, λ) et établir les quatre équations du mouvement.
- (iv) Trouver les constantes du mouvement.
- (v) A l'aide des équations du mouvement, trouver λ en fonctions des coordonnées.
- (vi) Trouver la force de réaction du cône donnée par $\vec{R} = \lambda \vec{\nabla} f$.



Exercice 2 : Forces de contraintes

Un point matériel de masse m glisse sans frottement le long d'un rail en forme d'hélice dont les équations en coordonnées cylindriques sont:

$$\begin{aligned} r &= a, \\ z &= b \theta. \end{aligned} \quad (1)$$

À $t=0$, la bille est à l'arrêt en $r = a$, $\theta = 0$, $z = 0$. On suppose que z est orienté vers le bas. La bille est soumise à l'accélération de la pesanteur g .

- (i) En utilisant les contraintes (1), écrire le Lagrangien en fonction de la seule coordonnée z .
- (ii) En déduire $z(t)$.

On souhaite maintenant déterminer les forces de contrainte dues à la contrainte $z = b \theta$. Dans ce but, on réécrit la contrainte $f(z, \theta) = 0$ avec $f(z, \theta) = z - b \theta$, et on se propose de traiter cette contrainte à l'aide d'un paramètre de Lagrange.

- (iii) Déterminer le Lagrangien du système en fonction des variables θ et z .
- (iv) Ecrire les équations de Lagrange du système à l'aide d'un paramètre de Lagrange λ pour décrire la contrainte $f(z, \theta)$.
- (v) Déterminer λ .
- (vi) En déduire les composantes R_z et R_θ de la force de contrainte généralisée.
- (vii) En utilisant la même méthode, déterminer la force de contrainte généralisée R_r due à la contrainte $r = a$.