

Mécanique Analytique

Série 5

17/18 novembre 2004

Exercice 1 : Problème de la brachistochrone

Sous l'action de la pesanteur un point matériel glisse sans frottement sur un rail de masse négligeable situé dans le plan vertical (\mathcal{O}, x, y) . Si le point matériel est initialement immobile à l'origine \mathcal{O} , trouver la courbe donnant la forme du rail pour que le point matériel se déplace de l'origine au point $\mathcal{P}(x_0, y_0)$ en un temps minimal.

Indications:

- Paramétrer la courbe cherchée en fonction de y : la courbe est ainsi décrite par $(x(y), y)$.
- Utiliser la conservation de l'énergie pour obtenir la vitesse v de la masse en un point quelconque de la trajectoire en fonction de y .
- Appliquer l'équation d'Euler à l'expression du temps de parcours τ , exprimé en termes de la trajectoire $x(y)$, de la dérivée de cette expression $x'(y) = \frac{dx}{dy}$ et de y .

Exercice 2 : Problème de la surface minimale de révolution

Considérer la surface de révolution obtenue en prenant une courbe dans un plan (x, y) passant par deux points extrêmes donnés, $\mathcal{P}(1, 0)$ et $\mathcal{Q}(\cosh(2), 2)$, et en la faisant tourner autour de l'axe y . Trouver la courbe pour laquelle l'aire de la surface est minimale.

Indications:

- Paramétrer la courbe cherchée en fonction de x : la courbe est ainsi décrite par $(x, y(x))$.
- Appliquer l'équation d'Euler à l'expression de l'aire de la surface de révolution \mathcal{A} , exprimée en termes de la courbe $y(x)$, de la dérivée de cette expression $y'(x) = \frac{dy}{dx}$ et de x .

Exercice 3 : Problème de la chaînette

Trouver la configuration d'un fil de masse linéique ρ et de longueur l fixé entre deux points de même hauteur.