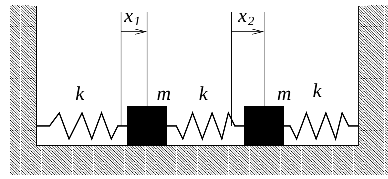
Mécanique Analytique

Série 4

10/11 novembre 2004

Exercice 1 : système de ressorts

On considère deux masses m reliées entre elles par un ressort de raideur k, qui glissent sans frottement sur un plan horizontal. Chaque masse est de plus reliée par un ressort de raideur k à un mur. L'allongement des trois ressorts est nul quand $x_1 = x_2 = 0$ (voir figure).



(i) Ecrire le Lagrangien du système.
(ii) Ecrire les équations d'Euler–Lagrange du système. On cherche des solutions à ce système de la forme:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

A quelle équation doit obéir ω pour que la forme ci dessus puisse être solution des équations d'Euler–Lagrange avec $A_1 \neq 0$ ou $A_2 \neq 0$?

(iii) Calculer ω_+ et ω_- qui satisfont cette équation. Trouver les vecteurs réels normés $\boldsymbol{A}_+$ et $\boldsymbol{A}_-$ tels que $\boldsymbol{A}_+ e^{i\omega_+ t}$ et $\boldsymbol{A}_- e^{i\omega_- t}$ soient solutions des équations du mouvement.

(iv) Les coordonnées normales sont données par la transformation $\boldsymbol{x} = \Delta \boldsymbol{Q}$, où les colonnes de la matrice Δ sont les vecteurs $\frac{1}{\sqrt{m}}\boldsymbol{A}_+$ et $\frac{1}{\sqrt{m}}\boldsymbol{A}_-$.

En exprimant le Lagrangien en fonction des coordonnées Q_+ et Q_- montrer qu'on a bien trouvé les coordonnées normales.

(v) On déplace la masse 1 de sorte que $x_1(t=0) = a$, $x_2(t=0) = 0$, puis on lache les masses sans vitesses initiales. Déterminer la trajectoire des deux masses.

Exercice 2 : Particule libre à deux dimensions

Une particule de masse m se déplace librement dans le plan (x, y).
(i) Ecrire la fonction de Lagrange de la particule en utilisant les cordonnées polaires (r, φ).
(ii) Quelles sont les quantités conservées et leurs interprétations physiques?
(iii) Considérer le même problème avec un potentiel central $V = V(r)$.

Exercice 3 : Particule sur un rail circulaire

Un point matériel de masse m soumis uniquement à la pesanteur glisse sans frottement sur un rail circulaire de rayon a dans le plan verticale (x, z).
(i) Ecrire la fonction de Lagrange.
(ii) Déterminer les quantités conservées.