Mécanique Analytique

Série 11

19/20 janvier 2005

Exercice 1 : Billard plan rectangulaire

On se propose de déterminer les trajectoires périodiques d'un billard plan rectangulaire par la méthode des variables action-angle. On considère donc un billard plan délimité par $0 \leq x \leq a$ et $0 \leq y \leq b$, et on étudie le mouvement d'un point matériel de masse m qui se déplace sans frottement à l'intérieur du billard, et qui subit une réflexion élastique lorsqu'il rencontre une paroi. On admettra que ces réflexions sont décrites par:

$$\begin{aligned} (p_x, p_y) &\to (-p_x, p_y) \text{ sur les parois } x = 0 \text{ et } x = a \\ (p_x, p_y) &\to (p_x, -p_y) \text{ sur les parois } y = 0 \text{ et } y = b \end{aligned}$$

(i) Tracer les portraits de phase dans les plans (x, p_x) et (y, p_y).

(ii) Résoudre l'équation caractéristique de Hamilton-Jacobi

$$H\left(x, y; \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \alpha_1$$

pour le mouvement de la particule entre deux collisions sur les parois par la méthode de séparation des variables. Démontrer qu'il existe quatre solutions $f_{++}(x, y; \alpha_1, \alpha_2)$, $f_{+-}(x, y; \alpha_1, \alpha_2)$, $f_{-+}(x, y; \alpha_1, \alpha_2)$ et $f_{--}(x, y; \alpha_1, \alpha_2)$ correspondant respectivement à $(p_x > 0, p_y > 0)$, $(p_x > 0, p_y < 0)$, $(p_x < 0, p_y > 0)$ et $(p_x < 0, p_y < 0)$.

(iii) Déterminer les variables actions I_x et I_y associées aux mouvements suivant x et y.

(iv) Etablir l'expression de α_1 en fonction de I_x et I_y.

(v) En déduire les fréquences du mouvement suivant x et suivant y. A quelle condition le mouvement est-il globalement périodique? Donner deux exemples de trajectoires périodiques pour un billard carré.

Exercice 2 : particule oscillante

Une particule de masse m se déplace dans un potentiel unidimensionnel donné par

$$V(x) = V_0 \ \mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi x}{2a}\right)$$

où V_0 et a sont des constantes.

(i) Déterminer la fréquence des petites oscillations.

(ii) Déterminer la forme de la solution générale $W(x; \alpha)$ de l'équation caractéristique de Hamilton-Jacobi. On laissera le résultat sous la forme d'une intégrale.

(iii) Calculer la variable action I en fonction de α.

Indication: Faire le changement de variable $\mathrm{tg}\ \left(\frac{\pi x}{2a}\right) = \sqrt{\frac{\alpha}{V_0}} z$ et utiliser $\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-z^2}}{1+\alpha z^2}\, \mathrm{d}z = \frac{\pi}{\alpha}(\sqrt{\alpha+1} - 1) \quad (\alpha \geq -1)$.

(iv) En déduire α en fonction de I, puis la fréquence des oscillations. Exprimer le résultat à l'aide de l'énergie E de la particule.

(v) Démontrer que le résultat est compatible avec celui de la question 1) dans une certaine limite que l'on précisera.

(vi) Déterminer la fréquence en fonction de E quand $E \gg V_0$. Interpréter le résultat.