Mécanique Analytique

Série 10

12/13 janvier 2005

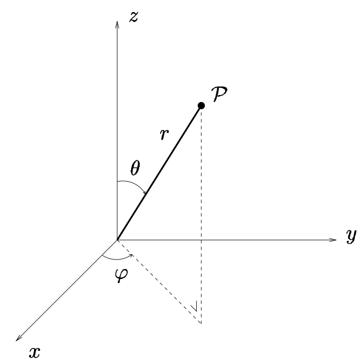
Exercice 1 : Théorie de Hamilton–Jacobi

Soit un point matériel de masse m se déplaçant dans $\mathbb{R}^3$ et soumis à un potentiel de la forme (on utilise les coordonnées sphériques dans cet exercice)

$$V(r,\theta,\varphi) = A(r) + \frac{B(\theta)}{r^2} ,$$

où nous garderons les fonctions $A(r)$ et $B(\theta)$ arbitraires pour le moment.

Le but de cet exercice est d'appliquer la méthode de Hamilton-Jacobi à ce problème afin de trouver la solution générale du mouvement de la masse m.



(i) Ecrire le Hamiltonien H du système en coordonnées sphériques.

(ii) Ecrire l'équation de Hamilton-Jacobi pour ce problème, *i.e.*

$$H\left(q_i, \frac{\partial f}{\partial q_i}, t\right) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 , \quad \text{avec} \quad f = f(q_i, t)$$

et trouver la solution générale de cette équation en appliquant la méthode de séparation des variables. Nous noterons $S(r,\theta,\varphi,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,t)$ la solution générale ainsi trouvée (en omettant la constante additive que l'on peut toujours ajouter).

(iii) Ecrire les solutions générales des équations du mouvement en utilisant la fonction génératrice $F_2(q_i, P_i, t) \equiv S(q_i, \alpha_i = P_i, t)$, *i.e.*

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} , \qquad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} .$$

<u>Application :</u>

(iv) Intéressons-nous maintenant au potentiel particulier $V(r,\theta,\varphi) = \dfrac{K}{r^2}$, où K est une constante et considérons les conditions initiales à $t = 0$:

$$\begin{cases} r(0) = r_0 , & \theta(0) = \frac{\pi}{2} , & \varphi(0) = 0 , \\ \dot r(0) = 0 , & \dot\theta(0) = \omega , & \dot\varphi(0) = 0 . \end{cases}$$

Exprimer tout d'abord les constantes P_i grâce aux relations $p_i = \dfrac{\partial F_2}{\partial q_i}$. Trouver ensuite la trajectoire et l'équation horaire grâce aux relations $Q_i = \dfrac{\partial F_2}{\partial P_i}$.

<u>Remarques:</u>

- Le problème de Kepler, avec $V(r,\theta,\varphi) = -\dfrac{GMm}{r}$, est inclus dans la classe des potentiels traités dans ce problème.
- Bien qu'on ait *formellement* obtenu la solution générale des équations du mouvement (au point **(iii)**), il n'est pas toujours possible d'effectuer analytiquement les intégrales et/ou d'inverser ensuite les relations obtenues. C'est le cas par exemple du potentiel $V(r,\theta,\varphi) = \dfrac{K\cos\theta}{r^2}$ qui est un potentiel plus physique que celui étudié au point **(iv)** (c'est le potentiel créé par un dipôle électrique loin de celui-ci).

Exercice 2 : Billard plan rectangulaire

On se propose de déterminer les trajectoires périodiques d'un billard plan rectangulaire par la méthode des variables action-angle. On considère donc un billard plan délimité par $0 \le x \le a$ et $0 \le y \le b$, et on étudie le mouvement d'un point matériel de masse m qui se déplace sans frottement à l'intérieur du billard, et qui subit une réflexion élastique lorsqu'il rencontre une paroi. On admettra que ces réflexions sont décrites par:

$$\begin{aligned}(p_x, p_y) &\to (-p_x, p_y) \text{ sur les parois } x = 0 \text{ et } x = a \\ (p_x, p_y) &\to (p_x, -p_y) \text{ sur les parois } y = 0 \text{ et } y = b\end{aligned}$$

(i) Tracer les portraits de phase dans les plans (x, p_x) et (y, p_y).

(ii) Résoudre l'équation caractéristique de Hamilton-Jacobi

$$H\left(x, y; \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \alpha_1$$

pour le mouvement de la particule entre deux collisions sur les parois par la méthode de séparation des variables. Démontrer qu'il existe quatre solutions $f_{++}(x, y; \alpha_1, \alpha_2)$, $f_{+-}(x, y; \alpha_1, \alpha_2)$, $f_{-+}(x, y; \alpha_1, \alpha_2)$ et $f_{--}(x, y; \alpha_1, \alpha_2)$ correspondant respectivement à $(p_x > 0, p_y > 0)$, $(p_x > 0, p_y < 0)$, $(p_x < 0, p_y > 0)$ et $(p_x < 0, p_y < 0)$.