Mécanique Analytique

Série 9, corrigé   12/13 janvier 2005

Exercice 1

1. La matrice Jacobienne de la transformation est

$$(M\phi^t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2tpe^{p^2} \\ \alpha t^2 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$(M\phi^t)^T J(M\phi^t) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha t^2 \\ 2tpe^{p^2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2tpe^{p^2} \\ \alpha t^2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha t^2 \\ 2tpe^{p^2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha t^2 & 1 \\ -1 & -2tpe^{p^2} \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 - 2\alpha t^3 pe^{p^2} \\ -1 + 2\alpha t^3 pe^{p^2} & 0 \end{pmatrix} \neq J \text{ car } \alpha \neq 0. \tag{3}$$

$\Rightarrow$ ϕ^t n'est pas une transformation canonique.

2. La matrice Jacobienne de la transformation est

$$(M\phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p}{p^2+q^2} & -\frac{q}{p^2+q^2} \\ q & p \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$(M\phi)^T J(M\phi) = \begin{pmatrix} \frac{p}{p^2+q^2} & q \\ -\frac{q}{p^2+q^2} & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{p}{p^2+q^2} & -\frac{q}{p^2+q^2} \\ q & p \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{p}{p^2+q^2} & q \\ -\frac{q}{p^2+q^2} & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & p \\ -\frac{p}{p^2+q^2} & \frac{q}{p^2+q^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = J \tag{6}$$

$\Rightarrow$ ϕ est une transformation canonique.

Exercice 2

(i) Le Hamiltonien est donné par

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\theta^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}p_\varphi^2\right) + V(r,\theta,\varphi) \ , \tag{7}$$

où les moments conjugués sont

$$\begin{cases} p_r = m\dot{r} \ , \\ p_\theta = mr^2\dot{\theta} \ , \\ p_\varphi = mr^2\sin^2\theta\ \dot{\varphi} \ . \end{cases} \tag{8}$$

(ii) L'équation de Hamilton-Jacobi s'écrit donc

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)^2\right) + V(r,\theta,\varphi) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \ . \tag{9}$$

Appliquons alors l'ansatz suivant pour la solution générale de cette équation:

$$f(r,\theta,\varphi,t) = f_1(r) + f_2(\theta) + f_3(\varphi) + f_4(t) \ .$$

L'équation (9) devient alors

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{df_1(r)}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{df_2(\theta)}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{df_3(\varphi)}{d\varphi}\right)^2\right) + V(r,\theta,\varphi) + \frac{df_4(t)}{dt} = 0 \ . \tag{10}$$

Le seul terme qui dépende de t est le dernier; il doit donc être constant. Notons α_1 cette constante, que nous identifierons ensuite avec l'énergie E du système. On écrit donc

$$\begin{cases} \frac{1}{2m}\left(\left(\frac{df_1(r)}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{df_2(\theta)}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{df_3(\varphi)}{d\varphi}\right)^2\right) + V(r,\theta,\varphi) - \alpha_1 = 0 \ , \\ \frac{df_4(t)}{dt} + \alpha_1 = 0 \ . \end{cases} \tag{11}$$

Ceci fournit alors tout de suite $f_4(t) = -\alpha_1\ t$ (à une constante près que nous omettons puisque seules les dérivées de f nous importent pour la suite). Utilisons alors la forme particulière du potentiel étudié dans cet exercice pour réécrire l'équation restante (la première de (11)) sous la forme

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{df_1(r)}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{df_2(\theta)}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{df_3(\varphi)}{d\varphi}\right)^2\right) + A(r) + \frac{B(\theta)}{r^2} - \alpha_1 = 0 \ . \tag{12}$$

On constate alors que seul le troisième terme dépend de φ, ce qui signifie que $\frac{df_3(\varphi)}{d\varphi}$ doit être une constante, que nous noterons α_2. Ainsi $f_3(\varphi) = \alpha_2\ \varphi$. On récrit alors (12)

$$\frac{1}{2m}\left(r^2\left(\frac{df_1(r)}{dr}\right)^2 + \left(\frac{df_2(\theta)}{d\theta}\right)^2 + \frac{\alpha_2^2}{\sin^2\theta}\right) + r^2\ A(r) + B(\theta) - r^2\ \alpha_1 = 0 \ . \tag{13}$$

En séparant alors les termes dépendant de θ de ceux qui n'en dépendent pas et en introduisant une nouvelle constante α_3, on écrit

$$\begin{cases} r^2\left(\frac{1}{2m}\left(\frac{df_1(r)}{dr}\right)^2 + A(r) - \alpha_1\right) + \alpha_3 = 0 \ , \\ \frac{1}{2m}\left(\frac{df_2(\theta)}{d\theta}\right)^2 + \frac{\alpha_2^2}{2m\sin^2\theta} + B(\theta) - \alpha_3 = 0 \ , \end{cases} \tag{14}$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned} f_1(r) &= \int dr\ \sqrt{2m\left(\alpha_1 - A(r) - \frac{\alpha_3}{r^2}\right)} \ , \\ f_2(\theta) &= \int d\theta\ \sqrt{2m\left(\alpha_3 - B(\theta)\right) - \frac{\alpha_2^2}{\sin^2\theta}} \ . \end{aligned} \tag{15}$$

Ainsi, S est finalement donné par

$$S(r,\theta,\varphi,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,t) = -\alpha_1\ t + \alpha_2\ \varphi + \int dr\ \sqrt{2m\left(\alpha_1 - A(r) - \frac{\alpha_3}{r^2}\right)} + \int d\theta\ \sqrt{2m\left(\alpha_3 - B(\theta)\right) - \frac{\alpha_2^2}{\sin^2\theta}} \ . \tag{16}$$