Mécanique Analytique

Série 8, corrigé   22/23 dcembre 2004

Exercice 1

Pour obtenir le Hamiltonien on calcule premièrement les moments conjugués. Si $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\})$, les moments sont $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$. Les relations obtenues doivent être inversées pour obtenir $\dot{q}_j = \dot{q}_j(\{p_i\}, \{q_i\})$ et le Hamiltonien est donné par:

$$H(\{q_i\}, \{p_i\}) = \sum_i p_i \dot{q}_i(\{p_i\}, \{q_i\}) - \mathcal{L}(\{q_i\}, \{\dot{q}_i(\{p_i\}, \{q_i\})\})$$

1) Le moment conjugué a θ est $p_\theta = mR^2\dot{\theta}$, d'où $\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2}$ et donc:

$$H(\theta, p_\theta) = \frac{1}{2}\frac{p_\theta^2}{mR^2} - \frac{m}{2}R^2\omega^2 \sin^2\theta - mgR\cos\theta$$

2) Les moments conjugués sont $p_\theta = mR^2\dot{\theta}$ et $p_\phi = mR^2 \sin^2\theta\dot{\phi}$, d'où $\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2}$ et $\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mR^2\sin^2\theta}$. Le Hamiltonien est donc:

$$H(\theta, \phi, p_\theta, p_\phi) = \frac{1}{2}\frac{p_\theta^2}{mR^2} + \frac{1}{2}\frac{p_\phi^2}{mR^2\sin^2\theta} + mgR\cos\theta$$

3) Les moments conjugués sont $p_1 = m\dot{x}_1$ et $p_2 = m\dot{x}_2$. Le Hamiltonien est:

$$H(x_1, x_2, p_1, p_2) = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2$$

4) Les moments conjugués sont $p_u = (m_1+m_2)\dot{u}+m_2l\dot{\phi}\cos\phi$ et $p_\phi = m_2l^2\dot{\phi}+m_2l\dot{u}\cos\phi$, d'où $\dot{u} = \frac{lp_u - p_\phi\cos\phi}{l(m_1+m_2-m_2\cos^2\phi)}$ et $\dot{\phi} = \frac{p_\phi(m_1+m_2)-\cos\phi l m_2 p_u}{(m_2^2+m_1m_2-m_2^2\cos^2\phi)l^2}$. Le Hamiltonien est:

$$H(u, \phi, p_u, p_\phi) = \frac{(m_1+m_2)p_\phi^2}{2m_2l^2(m_1+m_2\sin^2\phi)} - \frac{p_u p_\phi \cos\phi}{l(m_1+m_2\sin^2\phi)} + \frac{p_u^2}{2(m_1+m_2\sin^2\phi)} - m_2gl\cos\phi$$

Exercice 2

(i) $F_1(q_j, Q_j) = \sum_{k=1}^{l} q_k Q_k$ est une fonction génératrice du type 1 car

$$\frac{\partial^2 F_1(q_j, Q_j)}{\partial q_j \partial Q_i} = \frac{\partial}{\partial q_j}\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial Q_k}{\partial Q_i}q_k = \frac{\partial}{\partial q_j}\sum_{k=1}^{l}\delta_{ki}q_k = \frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \delta_{ij} \tag{1}$$

et $\det\left\{\frac{\partial^2 F_1(q_j,Q_j)}{\partial q_j \partial Q_i}\right\}_{i,j=1}^{l} \neq 0$.

Le calcul de

$$p_i = \frac{\partial F_1(q_j, Q_j)}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{l}\frac{\partial q_k}{\partial q_i}Q_k = \sum_{k=1}^{l}\delta_{ki}Q_k = Q_i \tag{2}$$

et de

$$P_i = -\frac{\partial F_1(q_j, Q_j)}{\partial Q_i} = -\sum_{k=1}^{l} q_k \frac{\partial Q_k}{\partial Q_i} = -\sum_{k=1}^{l} q_k \delta_{ki} = -q_i \tag{3}$$

donne la transformation canonique engendrée par $F_1(q_j, Q_j)$:

$$\phi \; : \; \begin{array}{ccc} q & \mapsto & Q(p) = p \\ p & \mapsto & P(q) = -q. \end{array} \tag{4}$$

ϕ est la transformation qui échange les rôles de q et p.

(ii) Pour trouver une fonction génératrice du type $F_4(p_j, P_j)$ qui engendre cette transformation on écrit les relations

$$q_i = -\frac{\partial F_4(p_j, P_j)}{\partial p_i} \quad \text{et} \quad Q_i = \frac{\partial F_4(p_j, P_j)}{\partial P_i}.$$

D'après la définition (4) de ϕ on trouve :

$$P_i = \frac{\partial F_4(p_j, P_j)}{\partial p_i} \quad \text{et} \quad p_i = \frac{\partial F_4(p_j, P_j)}{\partial P_i}.$$

Par intégration on obtient $F_4(p_j, P_j) = \sum_{k=1}^{l} p_k P_k + C$ où C est une constante quelconque.

Exercice 3

(i) Le seul crochet de Poisson non-trivial est le suivant:

$$[Q, P] = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1. \tag{5}$$

La transformation est donc canonique.

(ii) Pour trouver une fonction génératrice du type $F_2(q, P, t)$ qui génère cette transformation, il faut resoudre le système d'équations différentielles suivant:

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q}, \qquad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}. \tag{6}$$

La deuxième relation donne immédiatement $F_2 = P \cdot (q + t) + f(q, t)$, avec une fonction arbitraire $f(q, t)$. La première donne maitenant $F_2 = P \cdot (q + t) + h(t)$. On va poser $h(t) = 0$ dans la suite.

(iii) Le nouvel Hamiltonien est donné par $K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = \omega^2 PQ^2 + P$.

(iv) Les équations de Hamilton dans ces coordonnés sont données par

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} \quad \Rightarrow \quad \dot{Q} = \omega^2 Q^2 + 1, \tag{7}$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} \quad \Rightarrow \quad \dot{P} = -2\omega^2 PQ. \tag{8}$$

L'équation (7) s'intègre en séparant les variables:

$$\frac{dQ}{\omega^2 Q^2 + 1} = dt \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{2\omega}\arctan\frac{2\omega^2 Q}{2\omega} = t + t_0 \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{1}{\omega}\tan\omega(t + t_0). \tag{9}$$

En utilisant ce resultat dans (8) on obtient également une équation séparable:

$$\frac{\dot{P}}{P} = -2\omega\tan\omega(t + t_0) \quad \Rightarrow \quad \ln P(t) - \ln c = 2\ln\cos\omega(t + t_0) \quad \Rightarrow \quad P(t) = c\cos^2\omega(t + t_0). \tag{10}$$

(v) Finalement on trouve pour $q(t)$ et $p(t)$:

$$q(t) = \frac{1}{\omega}\tan\omega(t + t_0) - t,$$

$$p(t) = P(t) = c\cos^2\omega(t + t_0). \tag{11}$$