Mécanique Analytique

Série 7, corrigé   8/9 décembre 2004

Exercice 1

(i) En utilisant le tenseur ε_{ijk}, on écrit, pour la $i^{\text{ème}}$ composante L_i de $\vec{L}$, $L_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} r_j p_k$.

Calculons tout d'abord le crochet de Poisson de r_i et de p_i avec L_j:

$$\{r_i, L_j\} = \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial r_i}{\partial r_k} \frac{\partial L_j}{\partial p_k} - \frac{\partial r_i}{\partial p_k} \frac{\partial L_j}{\partial r_k} \right) = \frac{\partial L_j}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\sum_{m,n=1}^{3} \varepsilon_{jmn} r_m p_n \right) = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} r_k \ ,$$

$$\{p_i, L_j\} = \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial p_i}{\partial r_k} \frac{\partial L_j}{\partial p_k} - \frac{\partial p_i}{\partial p_k} \frac{\partial L_j}{\partial r_k} \right) = -\frac{\partial L_j}{\partial r_i} = -\frac{\partial}{\partial r_i} \left(\sum_{m,n=1}^{3} \varepsilon_{jmn} r_m p_n \right) = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} p_k \ ,$$

A l'aide de ces résultats, on peut calculer le crochet de Poisson de deux composantes de $\vec{L}$:

$$\begin{aligned}
\{L_i, L_j\} &= \sum_{m,n=1}^{3} \varepsilon_{imn} \{r_m p_n, L_j\} \overset{(1)}{=} \sum_{m,n=1}^{3} \varepsilon_{imn} \left(r_m \{p_n, L_j\} + p_n \{r_m, L_j\} \right) \\
&= \sum_{m,n=1}^{3} \varepsilon_{imn} \left(r_m \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{njk} p_k + p_n \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{mjk} r_k \right) \\
&\overset{(2)}{=} \sum_{m,k=1}^{3} r_m p_k \left(\delta_{ij}\delta_{mk} - \delta_{ik}\delta_{mj} \right) + \sum_{n,k=1}^{3} p_n r_k \left(-\delta_{ij}\delta_{nk} + \delta_{ik}\delta_{nj} \right) \\
&= -r_j p_i + r_i p_j \overset{(3)}{=} \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} L_k
\end{aligned}$$

Pour le passage (1), on utilise le résultat général $\{ab, c\} = a\{b, c\} + b\{a, c\}$ qui se prouve facilement en appliquant la définition du crochet de Poisson. Le passage (2) s'obtient grâce à $\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$, où δ_{ij} est le symbole de Kronecker, qui vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon. Cette relation se prouve par inspection des différentes possibilités pour i, j, m et n. Finalement, pour (3), on a en effet $\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} L_k = \sum_{k,m,n=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn} r_m p_n$ $= \sum_{m,n=1}^{3} r_m p_n \left(\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm} \right) = r_i p_j - r_j p_i$.

(ii) Le Lagrangien du problème de Kepler étant $L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + \frac{GMm}{r}$, le moment conjugué de $\vec{r}$ est donc $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$ et le Hamiltonien est donné par $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{GMm}{r}$. Exprimons alors le vecteur de Laplace-Lenz en termes de $\vec{r}$ et $\vec{p}$:

$$\vec{K} = \frac{1}{m} \vec{p} \times (\vec{r} \times \vec{p}) - GMm \frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{m} \left((\vec{p} \cdot \vec{p})\vec{r} - (\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{p} \right) - GMm \frac{\vec{r}}{r} \ .$$

La $i^{\text{ème}}$ composante de $\vec{K}$ est alors donnée par

$$K_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{3} \left(p_j^2 \ r_i - p_j r_j p_i \right) - GMm \frac{r_i}{r} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{3} \left(p_j^2 \ r_i - p_j r_j p_i \right) - GMm \frac{r_i}{r} \ ,$$

Ceci nous permet de calculer le crochet de Poisson de K_i avec H:

$$\begin{aligned}
\{K_i, H\} &= \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial K_i}{\partial r_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial K_i}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial r_k} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{3} \Bigg\{ \left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{3} \left(p_j^2 \ \delta_{ki} - p_j \delta_{kj} p_i \right) - GMm \frac{\delta_{ki}}{r} + GMm \frac{r_i r_k}{r^3} \right) \left(\frac{p_k}{m} \right) \\
&\qquad - \left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{3} \left(2 p_j \delta_{kj} \ r_i - \delta_{kj} r_j p_i - p_j r_j \delta_{ki} \right) \right) \left(GMm \frac{r_k}{r^3} \right) \Bigg\} \\
&= \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{m} p_j^2 \ \frac{p_i}{m} - \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{m} p_k \frac{p_k}{m} p_i - GMm \frac{p_i}{mr} + \sum_{k=1}^{3} GMm \frac{r_i r_k}{r^3} \frac{p_k}{m} \\
&\quad - \left(\sum_{j=1}^{3} \frac{1}{m} \ 2 p_j GMm \frac{r_j}{r^3} \ r_i - \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{m} \ GMm \frac{r_j}{r^3} r_j p_i - \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{m} \ p_j r_j GMm \frac{r_i}{r^3} \right) = 0 \ .
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après le résultat du point **(i)**, on a $\frac{dK_i}{dt} = \{K_i, H\} + \frac{\partial K_i}{\partial t} = 0$, c'est-à-dire que le vecteur de Laplace-Lenz est une constante du mouvement.