Mécanique Analytique

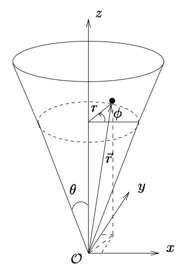
Série 6, corrigé $\quad$ 1er/2e décembre 2004

Exercice 1

(i) Le Lagrangien en coordonnées cartésiennes d'un point matériel se déplaçant dans $\mathbb{R}^3$ en présence du champ de la pesanteur est $\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) - mgz$. Pour obtenir ce même Lagrangien en coordonnées cylindriques, on part de

$$x = r\cos\phi\ , \qquad y = r\sin\phi\ , \qquad z = z\ ,$$

pour obtenir $\dot{x} = \dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\ \sin\phi$ et $\dot{y} = \dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\ \cos\phi$, ce qui mène alors à $\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + dz^2) - mg\ z$.



(ii) La contrainte s'écrit $z = r\ \cot\theta$. Nous choisissons donc $f(r,\phi,z) = z - r\cot\theta$ (mais d'autres choix sont possibles).

(iii) Les équations du mouvement découlant du Lagrangien $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \lambda f(r,\phi,z)$ sont:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r} &= m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 + \lambda\cot\theta &= 0\ ,\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \phi} &= \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) &= 0\ ,\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{z}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z} &= m\ddot{z} + mg - \lambda &= 0\ ,\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\lambda}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \lambda} &= -z + r\cot\theta &= 0\ .
\end{aligned} \tag{1}$$

Remarquez qu'on n'a pas explicitement calculé l'équation du mouvement pour ϕ puisque le fait que $\mathcal{L}$ soit indépendant de $\dot{\phi}$ nous donne tout de suite la grandeur conservée $mr^2\dot{\phi}$ qui n'est rien d'autre que la composante L_z du moment cinétique. De même, remarquez que λ est traitée comme une variable dynamique comme les autres.

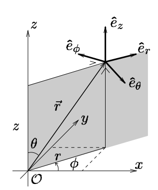
(iv) On a déjà parlé ci-dessus de L_z. L'autre grandeur conservée est l'énergie mécanique $E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + dz^2) + mg\ z$ puisque le Lagrangien est indépendant du temps.

(v) En différenciant deux fois par rapport au temps l'équation du mouvement de λ, on trouve $-\ddot{z} + \ddot{r}\cot\theta = 0$ et en éliminant $\ddot{z}$ et $\ddot{r}$ grâce aux équations du mouvement (1) de z et r respectivement, on obtient finalement

$$\lambda = \sin\theta\left(mg\sin\theta + \frac{L_z^2\cos\theta}{mr^3}\right)\ .$$

> Remarque:
>
> Bien sûr, $\lambda = \lambda(t)$ puisque $r = r(t)$ pour une solution des équations du mouvement, mais on a obtenu une expression pour λ qui dépend seulement des grandeurs conservées (en fait de L_z seulement) et de la position (en fait de r seulement), ce qui signifie encore qu'on peut calculer λ en un point quelconque du cylindre sans connaître les solutions des équations du mouvement.

(vi) Pour calculer $\vec{R}$, il nous reste à évaluer $\vec{\nabla}f$. En calculant en coordonnées cylindrique, on obtient $\vec{\nabla}f = \partial_r f\ \hat{e}_r + \frac{1}{r}\partial_\phi f\ \hat{e}_\phi + \partial_z f\ \hat{e}_z = -\cot\theta\ \hat{e}_r + \hat{e}_z$, où $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\phi$ et $\hat{e}_z$ sont les vecteurs unitaires associés aux coordonnées cylindriques au point $\mathcal{P}(r,\phi,z)$. On peut encore écrire (un peu de trigonométrie est nécessaire) $\vec{\nabla}f = -\frac{1}{\sin\theta}\ \hat{e}_\theta$, ce qui montre que $\vec{\nabla}f$ est orthogonal au cylindre.



Ainsi, on a finalement $\vec{R} = -\left(mg\sin\theta + \frac{L_z^2\cos\theta}{mr^3}\right)\ \hat{e}_\theta$, c'est-à-dire que $\vec{R}$ est orthogonal au cylindre et dirigé vers l'intérieur de celui-ci, comme il se doit. On retrouve bien l'expression de la contrainte qu'on aurait obtenu par une approche Newtonienne.

Exercice 2

(i) Le Lagrangien pour la particule dans le champ gravifique est donné en coordonnées cylindriques par

$$L_{r\theta z} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + mgz. \tag{2}$$

En introduisant les deux contraintes $r = a$ et $z = b\theta$ on trouve

$$L_z = \frac{1}{2}m(\alpha\dot{z}^2) + mgz \qquad \text{avec} \qquad \alpha = \frac{a^2}{b^2} + 1. \tag{3}$$

(ii) L'équation d'Euler-Lagrange de deuxième espèce est

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_z}{\partial\dot{z}}\right) = \frac{\partial L_z}{\partial z}. \tag{4}$$

et donne l'équation de mouvement $\ddot{z} = \frac{g}{\alpha}$ qui s'intègre facilement avec les conditions initiales $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 0$:

$$z(t) = \frac{g}{2\alpha}t^2. \tag{5}$$

(iii) $L_{\theta z} = \frac{1}{2}m(a^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + mgz + \lambda_1(z - b\theta)$.

(iv) Les équations d'Euler-Lagrange du premier espèce sont données par

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_{\theta z}}{\partial\dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L_{\theta z}}{\partial\theta} \quad\Rightarrow\quad ma^2\ddot{\theta} + \lambda_1 b = 0, \tag{6}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_{\theta z}}{\partial\dot{z}}\right) = \frac{\partial L_{\theta z}}{\partial z} \quad\Rightarrow\quad m\ddot{z} - mg - \lambda_1 = 0, \tag{7}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_{\theta z}}{\partial\dot{\lambda}_1}\right) = \frac{\partial L_{\theta z}}{\partial\lambda_1} \quad\Rightarrow\quad z - b\theta = 0. \tag{8}$$

(v) Pour déterminer λ_1 on dérive deux fois l'équation (8) par rapport à t. Cette équation nous permet d'éliminer $\ddot{z}$ et $\ddot{\theta}$:

$$\lambda_1 = -\frac{mg}{1 + \frac{b^2}{a^2}}. \tag{9}$$

(vi) Les composantes de la force de contrainte généralisée sont identifiées à l'aide de la formule

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = R_i, \tag{10}$$

où L est le Langrangien $L_{\theta z}$ sans le terme contenant λ_1. En comparant (6) et (7) avec l'équation précédente on voit que $R_{1,\theta} = -b\lambda_1$ et $R_{1,z} = \lambda_1$.

(vii) Pour déterminer la force de contrainte généralisée due à la contrainte $r = a$, on suit exactement les mêmes étapes:

$$L_{r\theta} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + b^2\dot{\theta}^2) + mgb\theta + \lambda_2(r - a), \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
r:&\quad m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - \lambda_2 = 0,\\
\theta:&\quad \frac{d}{dt}(m(r^2 + b^2)\dot{\theta}) - mgb = 0,\\
\lambda_2:&\quad r = a
\end{aligned} \tag{12}$$

La troisième équation donne $\ddot{r} = 0$, la deuxième équation peut être intégrée, ce qui donne $\dot{\theta} = \frac{gb}{a^2+b^2}t$, et on trouve: $\lambda_2 = -ma(\frac{gb}{a^2+b^2})^2t^2$ et $R_{2,r} = \lambda_2$.