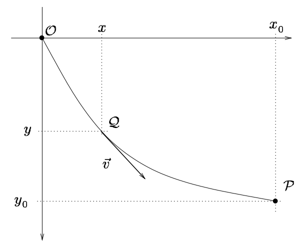
Mécanique Analytique

Série 5, corrigé 24/25 novembre 2004

Exercice 1



On cherche la courbe $(x(y), y)$ que doit suivre un point matériel tombant à partir du repos en chute libre depuis $\mathcal{O}$ pour atteindre $\mathcal{P}(x_0, y_0)$ dans un temps minimal.

Si $v(y)$ désigne la vitesse le long de la courbe, le temps nécessaire pour parcourir une longueur $\mathrm{d}s = [1 + x'(y)^2]^{1/2}\mathrm{d}y$ est égal à $\mathrm{d}t = \mathrm{d}s/v(y)$ et le problème revient à minimaliser l'intégrale

$$\tau = \int_0^{y_0} \frac{[1 + x'^2]^{1/2}}{v(y)}\mathrm{d}y.$$

Soit $\mathcal{Q} = (x, y)$ la position du point matériel. En prenant comme niveau de référence du potentiel gravitationnel l'horizontale passant par $\mathcal{O}$, on a d'après la conservation de l'énergie :

$$\frac{m}{2}v(y)^2 - mgy = 0 \;\Rightarrow\; v(y) = \sqrt{2gy}$$

et donc

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{y_0} \sqrt{\frac{1 + x'^2}{y}}\,\mathrm{d}y.$$

Il faut résoudre l'équation d'Euler

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\partial g}{\partial x'}\right) - \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

pour la fonction $g(x', y) \equiv \sqrt{\frac{1+x'^2}{y}}$.

Comme

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial x'} = \frac{x'}{\sqrt{(1 + x'^2)y}},$$

on peut écrire

$$\frac{x'(y)}{\sqrt{(1 + x'(y)^2)y}} = a \quad \text{ou } a \text{ est une constante donnée.}$$

En isolant $x'(y)$ et en posant $b = 1/a^2$ on obtient :

$$x'(y) = \sqrt{\frac{y}{b - y}}.$$

En séparant les variables et en intégrant il vient :

$$x(y) = \int \sqrt{\frac{y}{b - y}}\,\mathrm{d}y + C.$$

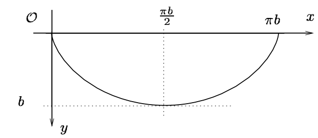
Avec le changement de variable $y = b\sin^2\theta$ on obtient

$$\begin{aligned} x(\theta) &= 2b\int \sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta + C \;=\; b\int(1 - \cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta + C \\ &= \frac{b}{2}(2\theta - \sin 2\theta) + C. \end{aligned}$$

La constante $C = 0$ car la courbe doit passer par $(x = 0, y = 0)$. En posant $\varphi = 2\theta$, la courbe cherchée s'écrit sous forme paramétrique :

$$\begin{cases} x(\varphi) = \frac{b}{2}(\varphi - \sin\varphi) \\ y(\varphi) = \frac{b}{2}(1 - \cos\varphi). \end{cases}$$

On reconnait les équations paramétriques d'une cycloïde. La constante b est déterminée de façon à ce que la courbe passe par le point $\mathcal{P}$.



Exercice 2

L'aire d'une bande de la surface vaut $2\pi x\mathrm{d}s = 2\pi x\sqrt{1 + y'(x)^2}\,\mathrm{d}x$ donc la surface totale mesure

$$\mathcal{A} = 2\pi\int_{x_1}^{x_2} x\sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x.$$

Pour que celle-ci soit extrémale, il faut établir et résoudre l'équation d'Euler

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

pour $f(x, y') = x\sqrt{1 + y'^2}$.

Or $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, donc $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0$, soit

$$xy'(x) = a\sqrt{1 + y'(x)^2}.$$

Pour résoudre cette équation, on l'élève au carré et on isole $y'(x)$:

$$y'(x) = \pm\frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \qquad \text{avec } a > 0.$$

Pour assurer que y soit réel, on choisit $a < x$ et en intégrant par rapport à x on trouve

$$y(x) = \pm a\,\mathrm{Arg\,ch}\left(\frac{x}{a}\right) + b\ ,$$

soit

$$x(y) = a\ \cosh\left(\frac{y - b}{a}\right)$$

On détermine a et b à partir des conditions $x(0) = 1$ et $x(2) = \cosh(2)$, ce qui donne $b = 0$ et $a = 1$, *i.e.*

$$x(y) = \cosh(y)\ .$$

Exercice 3

cf les notes du cours.