Mécanique Analytique

Série 4, corrigé 17/18 novembre 2004

Exercice 1

(i)

$$L = \frac{m\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m\dot{x}_2^2}{2} - \frac{k{x_1}^2}{2} - \frac{k{x_2}^2}{2} - \frac{k(x_1 - x_2)^2}{2}$$

(ii)

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -kx_1 - k(x_1 - x_2) \\ m\ddot{x}_2 &= -kx_2 - k(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

Avec la forme de solution donnée on arrive au système:

$$\begin{aligned} m\omega^2 A_1 - kA_1 - k(A_1 - A_2) &= 0 \\ m\omega^2 A_2 - kA_2 - k(A_2 - A_1) &= 0 \end{aligned}$$

Pour que ce système ait des solutions non nulles il faut que le déterminant soit nul, soit:

$$(m\omega^2 - 2k)^2 - k^2 = 0$$

(iii) Solutions évidentes: $\omega_- = \sqrt{3k/m}$, $\omega_+ = \sqrt{k/m}$

$$A_+ = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad A_- = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(iv) Les coordonnées normales sont données par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_+ \\ Q_- \end{pmatrix}.$$

Exprimant le lagrangien dans les nouvelles coordonnées:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{Q}_+^2 + \dot{Q}_-^2 - \omega_+^2 Q_+^2 - \omega_-^2 Q_-^2)$$

Les termes en Q_-Q_+ ont disparu!

(v) On a

$$\begin{aligned} Q_+(0) &= (x_1(0) + x_2(0))\sqrt{m/2} = a\sqrt{m/2}, \\ Q_-(0) &= a\sqrt{m/2} \quad \text{et} \\ \dot{Q}_+(0) &= \dot{Q}_-(0) = 0. \end{aligned}$$

La trajectoire pour les variables Q est donc:

$$\begin{aligned} Q_+(t) &= a\sqrt{m/2}\cos(\omega_+ t) \\ Q_-(t) &= a\sqrt{m/2}\cos(\omega_- t) \end{aligned}$$

Soit pour les variables x:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a/2(\cos(\omega_+ t) + \cos(\omega_- t)) \\ x_2(t) &= a/2(\cos(\omega_+ t) - \cos(\omega_- t)) \end{aligned}$$

Exercice 2

(i) Le Lagrangien en coordonnées cartésienne est donné par:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2).$$

On introduit les coordonnées polaires:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

C'est-à-dire pour les vitesses:

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, \quad y = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi.$$

En substituant ces relations dans le Lagrangien en coordonnées cartesiennes, on obtient:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \dot{\varphi}^2 r^2).$$

(ii) Comme le Lagrangien ne dépend pas de φ, la quantité suivante est conservée:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}.$$

C'est le moment cinétique selon l'axe z ; en effet :

$$L_z = m(\vec{r} \wedge \vec{v})_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = mr^2\dot{\varphi}.$$

D'autre part le lagrangien ne depend pas explicitement du temps et donc la quantité suivante est conservée:

$$h(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \dot{r}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} + \dot{\varphi}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \dot{\varphi}^2 r^2)$$

Il s'agit de l'énergie du système.

(iii) Le Lagrangien est:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(r),$$

et les mêmes quantités sont conservées:

- Le moment cinétique selon l'axe z:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}.$$

- L'énergie du système:

$$h(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \dot{r}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} + \dot{\varphi}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \dot{\varphi}^2 r^2) + V(r).$$

Exercice 3

(i)

$$L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - mgr\cos\theta$$

La contrainte est $r = a$, donc on obtient une fonction de Lagrange avec le seul degré de liberté θ.

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{m}{2}a^2\dot{\theta}^2 - mga\cos\theta$$

(ii) La fonction de Lagrange ne dépend pas explicitement de t, donc la fonction hamiltonienne est conservée

$$h(\theta, \dot{\theta}) = \dot{\theta}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - L(\theta, \dot{\theta}) = mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{m}{2}a^2\dot{\theta}^2 + mga\cos\theta = \frac{m}{2}a^2\dot{\theta}^2 + mga\cos\theta$$

Ici la fonction hamiltonienne correspond à l'énergie $h = T + V$.