Mécanique Analytique

Série 3, corrigé 9/10 novembre 2004

Exercice 1

(i) Les fils ayant une longueur fixée, il y a deux contraintes holonômes :

$$x_1 + x_2 = a_1 = \text{ constante}, \qquad x_3 + x_4 - 2x_2 = a_2 = \text{ constante}.$$

(ii) Le système a deux degrés de liberté : on choisit x_1 et x_3 comme coordonnées.

Le Lagrangien en absence de liaisons est alors :

$$L = \sum_{i=1}^{4} \frac{m_i}{2} \dot{x}_i^2 + \sum_{i=1}^{4} m_i g x_i$$

Les contraintes impliquent $\dot{x}_2 = -\dot{x}_1$ et $\dot{x}_4 = -\dot{x}_3 + 2\dot{x}_2 = -\dot{x}_3 - 2\dot{x}_1$ et le Lagrangien qui tient compte des liaisons s'écrit :

$$\begin{aligned} L(x_1, \dot{x}_1, x_3, \dot{x}_3) = {} & \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_3}{2} \dot{x}_3^2 + \frac{m_4}{2} \left(\dot{x}_3 + 2\dot{x}_1\right)^2 + m_1 g x_1 \\ & + m_2 g (a_1 - x_1) + m_3 g x_3 + m_4 g \left(a_2 + 2a_1 - x_3 - 2x_1\right). \end{aligned}$$

(iii) Equation d'Euler-Lagrange :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = \frac{\partial L}{\partial x_1} \quad & \Rightarrow \quad (m_1 + m_2 + 4m_4)\ddot{x}_1 + 2m_4 \ddot{x}_3 \\ & \qquad = (m_1 - m_2 - 2m_4) g, && (1) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3}\right) = \frac{\partial L}{\partial x_3} \quad & \Rightarrow \quad (m_3 + m_4)\ddot{x}_3 + 2m_4 \ddot{x}_1 = (m_3 - m_4) g. && (2) \end{aligned}$$

De l'équation (2) on obtient :

$$\ddot{x}_3 = \frac{(m_3 - m_4) g - 2m_4 \ddot{x}_1}{m_3 + m_4} \tag{3}$$

et en insérant dans (1) on trouve

$$\ddot{x}_1 = \frac{(m_1 - m_2)(m_3 + m_4) - 4m_3 m_4}{(m_1 + m_2)(m_3 + m_4) + 4m_3 m_4} g,$$

qui est l'expression de l'accélération de la masse m_1. En l'insérant dans (3) on obtient l'expression de l'accélération de la masse m_3 :

$$\ddot{x}_3 = \frac{(m_1 + m_2)(m_3 - m_4) - 2m_4(m_1 - m_2 - 2m_3)}{(m_1 + m_2)(m_3 + m_4) + 4m_3 m_4} g.$$

Exercice 2

(i) Coordonnées:

$$\begin{array}{lll} \text{masse } m_1 : & x_1 = u, \quad \dot{x}_1 = \dot{u} & \\ & y_1 = 0, \quad \dot{y}_1 = 0. & \\ \text{masse } m_2 : & x_2 = u + l \sin\phi, & \rightarrow \dot{x}_2 = \dot{u} + l\dot{\phi}\cos\phi \\ & y_2 = l\cos\phi, & \rightarrow \dot{y}_2 = -l\dot{\phi}\sin\phi. \end{array}$$

Energie cinétique :

$$T = \frac{m_1}{2}\dot{u}^2 + \frac{m_2}{2}\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{u}^2 + \frac{m_2}{2} l^2 \dot{\phi}^2 + m_2 l \dot{u}\dot{\phi}\cos\phi.$$

Potentiel :

$$V = -m_2 g y_2 = -m_2 g l \cos\phi.$$

Lagrangien :

$$L(\phi, \dot{u}, \dot{\phi}) = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{u}^2 + \frac{m_2}{2}l^2\dot{\phi}^2 + m_2 l\dot{u}\dot{\phi}\cos\phi + m_2 gl\cos\phi.$$

(ii) Equations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}}\right) = \frac{\partial L}{\partial u} \quad \Rightarrow \quad (m_1 + m_2)\ddot{u} + m_2 l\ddot{\phi}\cos\phi - m_2 l\dot{\phi}^2\sin\phi = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \phi} \quad \Rightarrow \quad l\ddot{\phi} + \ddot{u}\cos\phi + g\sin\phi = 0. \tag{5}$$

Constantes de mouvement :

L indépendant de t	$\Rightarrow$	$H(\phi, p_u, p_\phi)$ est une constante de mouvement.
L indépendant de u	$\Rightarrow$	$p_u \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = (m_1+m_2)\dot{u} + m_2 l\dot{\phi}\cos\phi$. La composante horizontale de la quantité de mouvement totale est une constante de mouvement.

(iii) • Expression de $u(t)$ en fonction de $\phi(t)$:

L'intégration de $(m_1 + m_2)\dot{u} + m_2 l\dot{\phi}\cos\phi = C$ donne

$$u(t) = \frac{C}{m_1 + m_2}t - \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}\sin\phi(t) + D$$

où les constantes $C = (m_1 + m_2)v_0$ et $D = \frac{m_2 l}{m_1+m_2}\sin\alpha$ sont déterminées par les conditions initiales. On trouve donc :

$$u(t) = v_0 t - \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}\left[\sin\phi(t) - \sin\alpha\right] \tag{6}$$

• Equation différentielle du 2e ordre pour ϕ :

Exprimant $\ddot{u}$ à partir de (6) et insérant dans (5) on trouve :

$$\left(l - \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}\cos^2\phi\right)\ddot{\phi} + \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}\dot{\phi}^2\sin\phi\cos\phi + g\sin\phi = 0.$$

Avec l'approximation des faibles amplitudes ($\cos\phi \simeq 1$, $\sin\phi \simeq \phi$) et en négligeant le terme $\dot{\phi}^2\phi$ (oscillations lentes), on obtient l'équation

$$\ddot{\phi} + \frac{g(m_1 + m_2)}{m_1 l}\phi = 0$$

qui (tenant compte des conditions initiales) a pour solution

$$\phi(t) = \alpha\cos\sqrt{\frac{g(m_1 + m_2)}{m_1 l}}\,t.$$

Exercice 3

(i)

$$L = \frac{m\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m\dot{x}_2^2}{2} - \frac{k{x_1}^2}{2} - \frac{k{x_2}^2}{2} - \frac{k(x_1 - x_2)^2}{2}$$

(ii)

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -kx_1 - k(x_1 - x_2) \\ m\ddot{x}_2 &= -kx_2 - k(x_2 - x_1) \end{aligned}$$