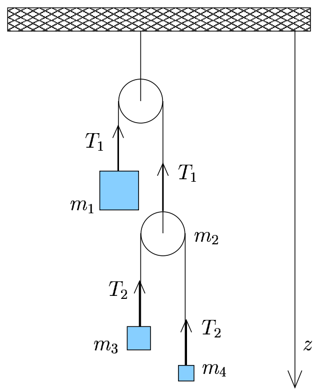
Mécanique Analytique

Série 2, corrigé   28 octobre 2004

Exercice 1 Machine d'Atwood



En choisissant un axe vertical z dirigé vers le bas, les équations de Newton prennent la forme suivante :

$$\begin{cases} m_1\ddot{z}_1 = m_1 g - T_1 \\ m_2\ddot{z}_2 = m_2 g + 2T_2 - T_1 \\ m_3\ddot{z}_3 = m_3 g - T_2 \\ m_4\ddot{z}_4 = m_4 g - T_2 \end{cases} \tag{1}$$

Les conditions d'inextensibilité des deux cordes se traduisent en deux conditions sur les accélérations

$$\begin{aligned} \ddot{z}_2 &= -\ddot{z}_1 \overset{\text{déf}}{=} a_1 \\ \ddot{z}_3 &\overset{\text{déf}}{=} a_2 \\ \ddot{z}_4 &= 2a_1 - a_2 \end{aligned} \tag{2}$$

donnent le systeme suivant de quatre équations en les quatre inconnues a_1, a_2, T_1 et T_2 :

$$\begin{cases} m_1 a_1 = -m_1 g + T_1 \\ m_2 a_1 = m_2 g + 2T_2 - T_1 \\ m_3 a_2 = m_3 g - T_2 \\ m_4(2a_1 - a_2) = m_4 g - T_2 \end{cases} \tag{3}$$

Les solutions se trouvent après quelque calcul:

$$\begin{aligned} a_1 &= \left[\frac{(m_3+m_4)(m_2-m_1)+4m_3m_4}{(m_1+m_2)m_3+(m_1+m_2+4m_3)m_4}\right] g \\ a_2 &= \left[\frac{(m_1+m_2)m_3+(m_2-3m_1+4m_3)m_4}{(m_1+m_2)m_3+(m_1+m_2+4m_3)m_4}\right] g \\ T_1 &= \frac{2m_1 g[4m_3m_4+m_2(m_3+m_4)]}{(m_1+m_2)m_3+(m_1+m_2+4m_3)m_4} \\ T_2 &= \frac{4m_1m_3m_4 g}{(m_1+m_2)m_3+(m_1+m_2+4m_3)m_4} \quad . \end{aligned} \tag{4}$$

Quelques vérifications sur les solutions. Observez que:

1. Si $m_2 = m_1$ on a $a_1 > 0$. En d'autres mots, la masse 1 ne peux que monter, exactement ce qu'on attend. Si, en plus, $m_4 > m_3$ on a $a_2 > 0$, c'est a dire la masse 4 descend, comme on peut s'attendre.
2. Si $m_3 = m_4 = m$, on retrouve la condition $a_1 = a_2 = a$. En particulier, $a < 0$ (la masse 1 descende) $\iff m_1 > m_2 + 2m$.

Exercice 2

Une particule soumise à la pesanteur se déplace dans une cavité. On veut qu'elle ait un mouvement harmonique de fréquence $\omega^2 = g$. Donc

$$\ddot{x} = -xg$$

L'équation de Newton sur l'axe x est:

$$m\ddot{x} = F_x$$

Il nous faut projeter les forces sur cet axe. Notons que la particule est contrainte de suivre la courbe $f(x)$ donc seule la composante tangentielle de la force de pesanteur reste après déduction des forces de soutien. Le vecteur tangent à la courbe est:

$$\hat{\iota} = \frac{1}{\sqrt{1+f'(x)^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix}$$

Le vecteur représentant la projection de la force de pesanteur sur le vecteur tangent est :

$$(\hat{\iota}\cdot\vec{F_p})\hat{\iota} = -mg\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}\hat{\iota} = -mg\frac{f'(x)}{1+f'(x)^2}\begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix}$$

La composante x obtenue est insérée dans l'équation de Newton:

$$m\ddot{x} = -mg\frac{f'(x)}{1+f'(x)^2}$$

En insérant, dans l'équation précédente, la condition de mouvement harmonique $\ddot{x} = -xg$, nous obtenons une équation différentielle pour la fonction $f(x)$:

$$-mgx = -mg\frac{f'(x)}{1+f'(x)^2}$$

C'est-à-dire:

$$xf'(x)^2 - f'(x) + x = 0$$

d'où

$$f'(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x^2}}{2x}$$

et

$$f(x) = \int f'(x)dx = \frac{1}{2}\ln(|x|) \pm \frac{1}{2}\left(\ln(|x|) + \sqrt{1-4x^2} - \ln\left(1+\sqrt{1-4x^2}\right)\right) + const$$

La constante représente la hauteur de la courbe en $x = \pm\frac{1}{2}$ et peut être fixée arbitrairement à zéro. Seule la solution avec le signe $-$ a un sens (la solution avec $+$ diverge en 0), on obtient:

$$f(x) = -\frac{1}{2}\left(+\sqrt{1-4x^2} - \ln\left(1+\sqrt{1-4x^2}\right)\right)$$

Fonction qui est bien definie dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Le premier terme représente l'équation d'un cercle, pour lequel on sait que le mouvement est harmonique pour les petits angles et le second corrige la "non-harmonicité" pour les angles plus grands.