Mécanique Analytique

Série 11, corrigé 2/3 février 2005

Exercice 1

i) Entre deux collisions sur les parois les impulsions p_x et p_y sont conservées.
ii) entre deux collisions, nous sommes en présence de particules libres, nous avons donc :

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2)$$

L'équation de Hamilton-Jacobi est donc donnée par :

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] = \alpha_1$$

Nous utilisons la séparation des variables, nous cherchons $f(x,y)$ sous la forme $f(x,y) = f_1(x) + f_2(y)$. Ceci implique :

$$\left(\frac{df_1}{dx}\right)^2 = 2m\alpha_2 \;\Rightarrow\; f_1(x) = \pm\sqrt{2m\alpha_2}x$$

$$\left(\frac{df_2}{dy}\right)^2 = 2m(\alpha_1 - \alpha_2) \;\Rightarrow\; f_2(y) = \pm\sqrt{2m(\alpha_1-\alpha_2)}y$$

Ce qui donne 4 solutions :

$$f_{\pm\pm}(x,y) = \pm\sqrt{2m\alpha_2}x \pm \sqrt{2m(\alpha_1-\alpha_2)}y$$

iii) Nous déterminons les variables actions I_x et I_y associées aux mouvements suivant x et y. Nous avons :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \pm\sqrt{2m\alpha_2}$$

donc

$$I_x = \frac{1}{2\pi}\int_0^a \sqrt{2m\alpha_2}\, dx \;+ \frac{1}{2\pi}\int_a^0 (-\sqrt{2m\alpha_2})\, dx \;= \frac{\sqrt{2m\alpha_2}a}{\pi}$$

Nous effectuons le même type de calcul pour I_y :

$$I_y = \frac{1}{2\pi}\int_0^b \sqrt{2m(\alpha_1-\alpha_2)}\, dy + \frac{1}{2\pi}\int_b^0 (-\sqrt{2m(\alpha_1-\alpha_2)})\, dy \;= \frac{\sqrt{2m(\alpha_1-\alpha_2)}b}{\pi}$$

iv) Nous cherchons α_1 :

$$\left(\frac{\pi I_x}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi I_y}{b}\right)^2 = 2m\alpha_2 + 2m(\alpha_1 - \alpha_2)$$

$$\Rightarrow\; \alpha_1 = \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\pi I_x}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi I_y}{b}\right)^2\right]$$

v) Nous cherchons les fréquences du mouvement :
nous avons obtenu une expression de la forme $\alpha_1 = \beta_1(I_x, I_y)$. Les fréquences sont données par :

$$\begin{cases} \omega_x = \frac{\partial\beta_1}{\partial I_x} = \frac{I_x\pi^2}{ma^2} \\ \omega_y = \frac{\partial\beta_1}{\partial I_y} = \frac{I_y\pi^2}{mb^2} \end{cases}$$

Nous avons un mouvement globalement périodique si le rapport $\frac{\omega_y}{\omega_x}$ est un rationnel, donc si le rapport : $\frac{I_y}{I_x}\frac{a^2}{b^2}$ est un rationnel.
Si le billard est carré, nous avons $a = b$, le rapport $\frac{I_y}{I_x}$ doit être rationnel.

Exercice 2

Nous avons le Hamiltonien suivant :

$$H = \frac{p^2}{2m} + V_o\; tg^2\left(\frac{\pi x}{2a}\right)$$

i) Pour trouver la fréquence des petites oscillations, nous développons V autour de sa position d'équilibre $x = 0$ ($V'(0) = 0$):

$$V(x) \approx V_o\frac{\pi^2x^2}{4a^2}$$

En utilisant le fait que $\dot{x} = \frac{p}{m} \;\Rightarrow\; \dot{p} = m\ddot{x}$ et $\dot{p} = -\frac{V_o\pi^2}{2a^2}x$, nous avons l'équation :

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{V_o\pi^2}{2ma^2}}_{\omega^2}x = 0$$

ii) Nous cherchons W solution de l'équation de Hamilton-Jacobi :

$$H\left(x, \frac{\partial W}{\partial x}\right) = E \;\Rightarrow \frac{1}{2m}\left(\frac{dW}{dx}\right)^2 + V_o\; tg^2\left(\frac{\pi x}{2a}\right) = E$$

donc

$$W(x, \alpha = E) = \pm\int_0^x dx'\,\sqrt{2mE - 2mV_o\; tg^2\left(\frac{\pi x'}{2a}\right)}$$

or

$$H(x, p = 0) = V_o\; tg^2\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \;\Rightarrow\; x_M = \frac{2a}{\pi}Arctg\sqrt{\frac{E}{V_o}}$$

et donc $-x_M \le x \le x_M$
iii) Nous en déduisons l'action :

$$I = \frac{1}{2\pi}\left[\underbrace{\int_{-x_M}^{x_M} dx'\,\sqrt{2mE - 2mV_o\; tg^2\left(\frac{\pi x'}{2a}\right)}}_{=A} - \int_{x_M}^{-x_M} dx'\,\sqrt{2mE - 2mV_o\; tg^2\left(\frac{\pi x'}{2a}\right)}\right]$$

Nous calculons A : nous posons $tg\left(\frac{\pi x'}{2a}\right) = \sqrt{\frac{E}{V_o}}z$, donc $\sqrt{\frac{E}{V_o}}dz = \frac{\pi}{2a}\left(1 + tg^2\left(\frac{\pi x'}{2a}\right)\right)dx'$, en reportant dans A, nous avons :

$$A = \int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{\frac{E}{V_o}}}{\frac{\pi}{2a}}\frac{\sqrt{2mE - 2mEz^2}}{1 + \frac{E}{V_o}z^2}dz = \frac{2a}{\pi}\sqrt{\frac{2m}{V_o}}E\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-z^2}}{1 + \frac{E}{V_o}z^2}dz$$

Il suffit de poursuivre le calcul, en utilisant le fait que

$$\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-z^2}}{1+\alpha z^2}dz = \frac{\pi}{\alpha}(\sqrt{\alpha+1} - 1) \quad (\alpha \ge 1)$$

et nous trouvons :

$$A = 2a\sqrt{2m}(\sqrt{E+V_o} - \sqrt{V_o})$$

Ce qui donne pour le calcul de l'action :

$$I = \frac{2A}{2\pi} = \frac{2a}{\pi}\sqrt{2m}(\sqrt{E+V_o} - \sqrt{V_o})$$

(iv) Nous exprimons $E = f(I)$:

$$E = \frac{\pi^2I^2}{8a^2m} + \sqrt{\frac{V_o}{2m}}\frac{\pi I}{a}$$

La fréquence ω est donnée par :

$$\omega = \frac{\partial E}{\partial I} = \frac{\pi^2 I}{4a^2m} + \sqrt{\frac{V_o}{2m}}\frac{\pi}{a}$$

(v) $E \ll V_0$

(vi) $E \gg V_0 \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{E}{2m}}$ (boîte de longueur $2a$)