Mécanique Analytique

Série 10, corrigé 19/20 janvier 2005

Exercice 1

(iii) Les solutions des équations du mouvement sont alors ($F_2(q_i, P_i, t) = S(q_i, \alpha_i = P_i, t)$)

$$
\left\{
\begin{array}{rclcl}
p_r &=& \dfrac{\partial F_2}{\partial r} &=& \sqrt{2m\left(P_1 - A(r) - \dfrac{P_3}{r^2}\right)} \ , \\
p_\theta &=& \dfrac{\partial F_2}{\partial \theta} &=& \sqrt{2m\left(P_3 - B(\theta)\right) - \dfrac{P_2^2}{\sin^2\theta}} \ , \\
p_\varphi &=& \dfrac{\partial F_2}{\partial \varphi} &=& P_2 \ , \\
Q_1 &=& \dfrac{\partial F_2}{\partial P_1} &=& -t + \displaystyle\int dr\, \frac{m}{\sqrt{2m\left(P_1 - A(r) - \frac{P_3}{r^2}\right)}} \ , \\
Q_2 &=& \dfrac{\partial F_2}{\partial P_2} &=& \varphi - \displaystyle\int d\theta\, \frac{P_2}{\sin^2\theta\sqrt{2m\left(P_3 - B(\theta)\right) - \frac{P_2^2}{\sin^2\theta}}} \ , \\
Q_3 &=& \dfrac{\partial F_2}{\partial P_3} &=& -\displaystyle\int dr\, \frac{m}{r^2\sqrt{2m\left(P_1 - A(r) - \frac{P_3}{r^2}\right)}} + \int d\theta\, \frac{m}{\sqrt{2m\left(P_3 - B(\theta)\right) - \frac{P_2^2}{\sin^2\theta}}} \ .
\end{array}
\right. \tag{1}
$$

L'interprétation de ces équations est la suivante: la quatrième équation donne l'équation horaire $r(t)$ (une fois qu'on a effectué l'intégrale et inversé l'équation obtenue pour exprimer r en fonction de t). La dernière équation donne alors la trajectoire $\theta(r)$ et par suite l'équation horaire $\theta(t) = \theta(r(t))$ (de nouveau en effectuant les intégrales et en inversant). Ensuite la cinquième équation donne la trajectoire $\varphi(\theta)$ et par suite l'horaire $\varphi(t) = \varphi(\theta(t))$. Enfin, les trois premières équations donnent les impulsions $p_i(t)$ par substitution des équations horaires $q_i(t)$ trouvées précédement. Ces solutions dépendent évidemment des constantes du mouvement (P_i, Q_i), qui peuvent alors être exprimées en termes des conditions initiales quand celles-ci seront précisées.

Remarquons encore que le Hamiltonien est alors donné par $H(q_i, p_i, t) = -\dfrac{\partial F_2}{\partial t} = P_1$, ce qui établit le lien entre P_1 et l'énergie mécanique E. De même, la troisième relation ci-dessus établit la relation entre P_2 et le moment cinétique p_φ autour de l'axe z.

(iv) Pour ce potentiel, nous choisissons donc $A(r) = \frac{K}{r^2}$ et $B(\theta) = 0$. A l'aide de (**??**) et des trois premières équations de (1), on trouve, lorsqu'on les évalue à $t = 0$:

$$
\begin{aligned}
0 = p_r(0) &= \sqrt{2m\left(P_1 - A(r_0) - \frac{P_3}{r_0^2}\right)} \ , \\
m r_0^2 \omega = p_\theta(0) &= \sqrt{2mP_3 - P_2^2} \ , \\
0 = p_\varphi(0) &= P_2 \ ,
\end{aligned} \tag{2}
$$

ce qui donne $E = P_1 = \frac{1}{2} m r_0^2 \omega^2 + \frac{K}{r_0^2}$, $P_2 = 0$ et $P_3 = \frac{1}{2} m r_0^4 \omega^2$.

A l'aide de ces expressions, calculons les trois dernières équations de (1): la quatrième s'écrit

$$
Q_1 = -t + \int dr\, \frac{m}{\sqrt{2mE\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)}} = -t + \sqrt{\frac{m}{2E}}\sqrt{r^2 - r_0^2} \ , \tag{3}
$$

ce qui donne tout d'abord, en évaluant cette équation à $t = 0$, $Q_1 = 0$, et par suite $r(t) = \sqrt{r_0^2 + \frac{2E}{m}t^2}$. La dernière équation donne ensuite

$$
Q_3 = -\int dr\, \frac{m}{r^2\sqrt{2mE\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)}} + \int d\theta\, \frac{1}{r_0^2\omega} = \frac{\theta}{r_0^2\omega} - \int dt\, \frac{1}{r_0^2 + \frac{2E}{m}t^2} = \frac{\theta}{r_0^2\omega} - \sqrt{\frac{m}{2E}}\frac{1}{r_0}\arctan\left(\sqrt{\frac{2E}{m}}\frac{t}{r_0}\right) \ , \tag{4}
$$

ce qui donne, en évaluant cette équation à $t = 0$, $Q_3 = \frac{\pi}{2r_0^2\omega}$ et par suite $\theta(t) = \frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{m}{2E}}\omega r_0 \arctan\left(\sqrt{\frac{2E}{m}}\frac{t}{r_0}\right)$. Finalement, la cinquième équation donne $Q_2 = \varphi$, soit, en évaluant en $t = 0$, $Q_2 = 0$ et par suite $\varphi(t) = 0$.

Récrivons le résultat de manière concise:

$$\left\{\begin{array}{rcl} r(t) & = & \sqrt{r_0^2 + \frac{2E}{m}t^2} \ , \\ \theta(t) & = & \frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{m}{2E}}\omega r_0 \arctan\left(\sqrt{\frac{2E}{m}}\frac{t}{r_0}\right) \ , \\ \varphi(t) & = & 0 \ . \end{array}\right. \tag{5}$$

Finalement, la trajectoire se trouve en exprimant t en fonction de r dans $\theta(t)$, ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{l} \theta(r) = \frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{m}{2E}}\omega r_0 \arctan\left(\sqrt{\frac{r^2}{r_0^2} - 1}\right) \qquad \leftrightarrow \qquad r(\theta) = \dfrac{r_0}{\cos\left(\sqrt{\frac{2E}{m}}\frac{\theta - \frac{\pi}{2}}{\omega r_0}\right)} \ , \\ \varphi(t) = 0 \ . \end{array}\right. \tag{6}$$

Remarque:

Remarquons pour terminer que nous aurions très bien pu choisir $A(r) = 0$ et $B(\theta) = K$, ce qui donne le même potentiel. Il est alors très facile de constater que ce choix conduit aux mêmes résultats que ceux présentés ci-dessus (si ce n'est que la constante P_3 n'a plus la même signification, ni la même valeur en fonction des conditions initiales).

Exercice 2

i) Entre deux collisions sur les parois les impulsions p_x et p_y sont conservées.
ii) entre deux collisions, nous sommes en présence de particules libres, nous avons donc :

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2)$$

L'équation de Hamilton-Jacobi est donc donnée par :

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] = \alpha_1$$

Nous utilisons la séparation des variables, nous cherchons $f(x, y)$ sous la forme $f(x, y) = f_1(x) + f_2(y)$. Ceci implique :

$$\left(\frac{df_1}{dx}\right)^2 = 2m\alpha_2 \ \Rightarrow \ f_1(x) = \pm\sqrt{2m\alpha_2}x$$

$$\left(\frac{df_2}{dy}\right)^2 = 2m(\alpha_1 - \alpha_2) \ \Rightarrow \ f_2(y) = \pm\sqrt{2m(\alpha_1 - \alpha_2)}y$$

Ce qui donne 4 solutions :

$$f_{\pm\pm}(x, y) = \pm\sqrt{2m\alpha_2}x \pm \sqrt{2m(\alpha_1 - \alpha_2)}y$$