Le Théorème de Noether

Soit donné un système à N degrés de liberté, associés à les coordonnées généralisées q_i, avec $i=1,\dots,N$. Le système est caractérisé par un Lagrangien $L(\{q_i\},\{\dot{q}_i\},t)$. Supposons que le Lagrangien ne change pas après une transformation des coordonnées $q_i \to q_i(s)$ qui dépende d'un seul paramètre s :

$$L(\{q_i(s)\},\{\dot{q}_i(s)\},t) = L(\{q_i\},\{\dot{q}_i\},t)$$

On écrit en suite une expansion de L dans un voisinage de $s=0$:

$$L(\{q_i(s)\},\{\dot{q}_i(s)\},t) = L(\{q_i\},\{\dot{q}_i\},t) + \\ s\sum_{i=1}^{N}\left[\left.\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial s}\right)\right|_{s=0} + \left.\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial s}\right)\right|_{s=0}\right] + O(s^2)$$

Le terme dans le membre de gauche et le premier terme dans le membre de droite s'efface grâce à l'invariance du Lagrangien. Donc, vu que s peut être arbitrairement petit, il faut que le coefficient du terme linéaire en s soit nulle aussi :

$$\sum_{i=1}^{N}\left[\left.\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial s}\right)\right|_{s=0} + \left.\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial s}\right)\right|_{s=0}\right] = 0$$

On peut en suite re-écrire le deuxième terme dans la parenthèse carrée en observant que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial q_i}{\partial s}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\frac{\partial q_i}{\partial s} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_i}{\partial s}\right) = \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\frac{\partial q_i}{\partial s} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial s}$$

et donc

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial s} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial q_i}{\partial s}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\frac{\partial q_i}{\partial s}$$

Finalement on a

$$\sum_{i=1}^{N}\left[\left.\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial s}\right)\right|_{s=0} + \left.\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial q_i}{\partial s}\right)\right|_{s=0} - \left.\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\frac{\partial q_i}{\partial s}\right)\right|_{s=0}\right] = 0$$

et en récoltant les première et le troisième termes on a

$$\sum_{i=1}^{N}\left\{\left.\left[\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right)\frac{\partial q_i}{\partial s}\right]\right|_{s=0} + \left.\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial q_i}{\partial s}\right)\right|_{s=0}\right\} = 0$$

En utilisant les équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

on voit bien que le première terme dans la somme est nulle et donc on reste avec

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial q_i}{\partial s}\right)\Bigg|_{s=0} = 0$$

Ou, autrement dit,

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial q_i}{\partial s}\right)\Bigg|_{s=0} = const\,du\,mouvement$$

Exemple : l'invariance par translations

Si le potentiel $V(\{q_i\})$ ne dépende que des vecteurs distances entre les particules, une translation du référentiel

$$\vec{r}_i(s) = \vec{r}_i + s\vec{u}$$

ne va pas changer le Lagrangien, car

$$\dot{\vec{r}}_i(s) = \dot{\vec{r}}_i$$
$$\vec{r}_i(s) - \vec{r}_j(s) = (\vec{r}_i + s\vec{u}) - (\vec{r}_j + s\vec{u}) = \vec{r}_i - \vec{r}_j$$

donc il y aura une quantité conservée correspondante à

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i}\frac{\partial \vec{r}_i(s)}{\partial s}\right)\Bigg|_{s=0} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{P}$$

qui est la composante selon le vecteur $\vec{u}$ de l'impulsion totale. Si l'invariance par translation est vérifiée selon toutes les directions possibles, alors toutes les composantes de l'impulsion totale seront conservées.