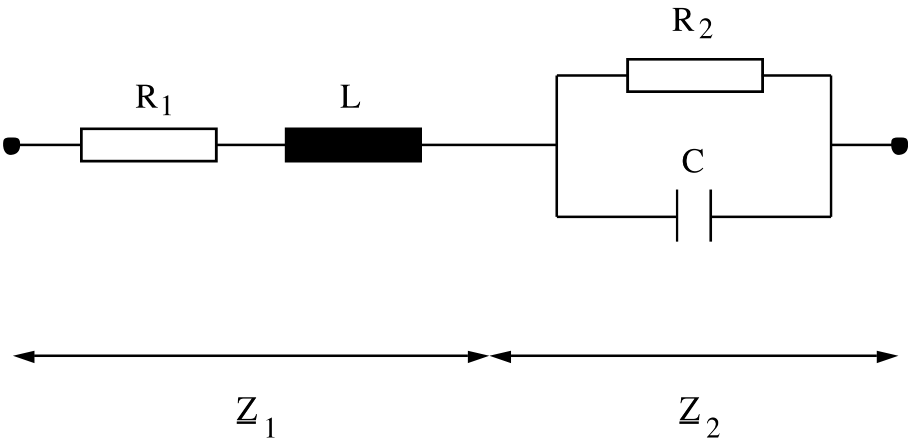
Lieu d'impédances – Corrigé

Le circuit à étudier est le suivant :



On part de l'admittance de la portion de circuit avec des éléments en parallèle, car dans l'expression de l'admittance, seule la partie imaginaire est fonction de ω, donc simple à représenter.

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{R_2} + j\,\omega C = \frac{1}{33} + j\,\omega \cdot 12 \cdot 10^{-6} = 0{,}03 + j\,\omega \cdot 12 \cdot 10^{-6}$$

On représente $\underline{Z}_2 = 1 / \underline{Y}_2$ par inversion, l'inverse d'une droite étant un cercle. Le demi-cercle représentant le lieu de $\underline{Z}_2$ pour $\omega = 0 \to \infty$ est défini par ses deux extrémités :

$\omega = 0$ -> $\underline{Z}_2 = R_2 = 33\ \Omega$

$\omega = \infty$ -> $\underline{Z}_2 = 0$

rayon du cercle : $R_2 / 2 = 16{,}5\ \Omega$

On représente $\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L = 10 + j\omega \cdot 6{,}5 \cdot 10^{-3}$ (parties réelle et imaginaire séparées).

On fait la somme $\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$:

$$\underline{Z}_2 = \frac{R_2 \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R_2}{1 + j\omega C R_2} = \frac{R_2}{1 + \omega^2 C^2 R_2^2} - j \cdot \frac{\omega C R_2^2}{1 + \omega^2 C^2 R_2^2}$$

$$\underline{Z} = R_1 + \frac{R_2}{1 + \omega^2 C^2 R_2^2} + j\omega\left(L - \frac{C R_2^2}{1 + \omega^2 C^2 R_2^2}\right)$$

La fonction $\underline{Z}$ coupe l'axe réel aux deux valeurs particulières de la pulsation ω pour lesquelles $\mathrm{Im}\{\underline{Z}\} = 0$:

1°) $\omega = 0$ -> $\underline{Z} = R_1 + R_2 = 43\ \Omega$

et :

2°) $L - \frac{C R_2^2}{1 + \omega^2 C^2 R_2^2} = 0 \quad \rightarrow \quad L + \omega^2 L C^2 R_2^2 - C R_2^2 = 0$ d'où :

$$\omega = \sqrt{\frac{C R_2^2 - L}{L C^2 R_2^2}} = \sqrt{\frac{12 \cdot 10^{-6} \cdot 33^2 - 6{,}5 \cdot 10^{-3}}{6{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 12^2 \cdot 10^{-12} \cdot 33^2}} = 2{,}538 \cdot 10^3 \text{ rad/sec}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2{,}538 \cdot 10^3}{2\pi} = 404 \text{ Hz}$$

Pour cette valeur particulière de pulsation, l'impédance totale vaut :

$$\underline{Z} = R_1 + \frac{R_2}{1 + \omega^2 C^2 R_2^2} = 10 + \frac{33}{1 + 2{,}538^2 \cdot 10^6 \cdot 12^2 \cdot 10^{-12} \cdot 33^2} = 26{,}4\ \Omega$$

Pour $\omega \to \infty$ la courbe de $\underline{Z}$ tend de manière asymptotique vers la droite :

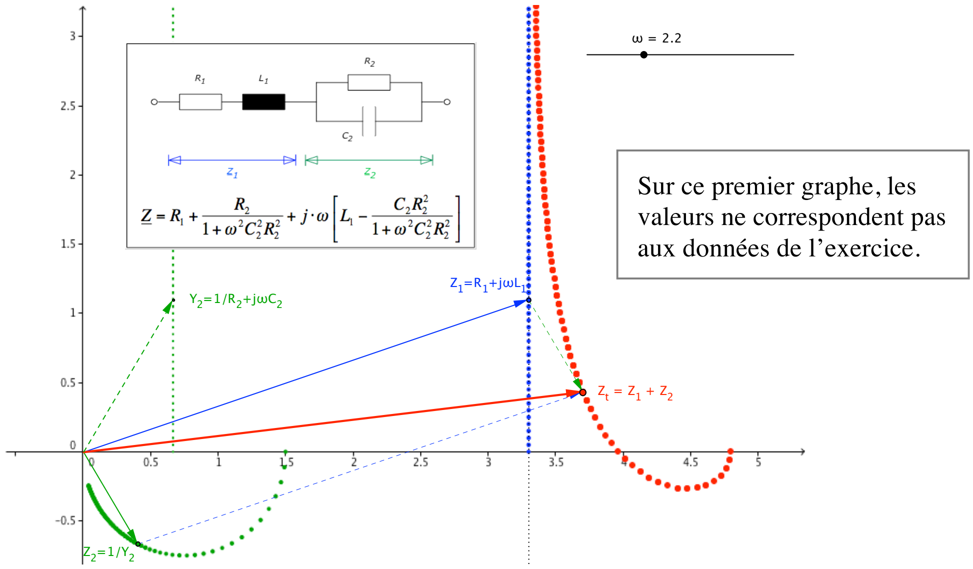
$\mathrm{Re}\{\underline{Z}_1\} = R_1$

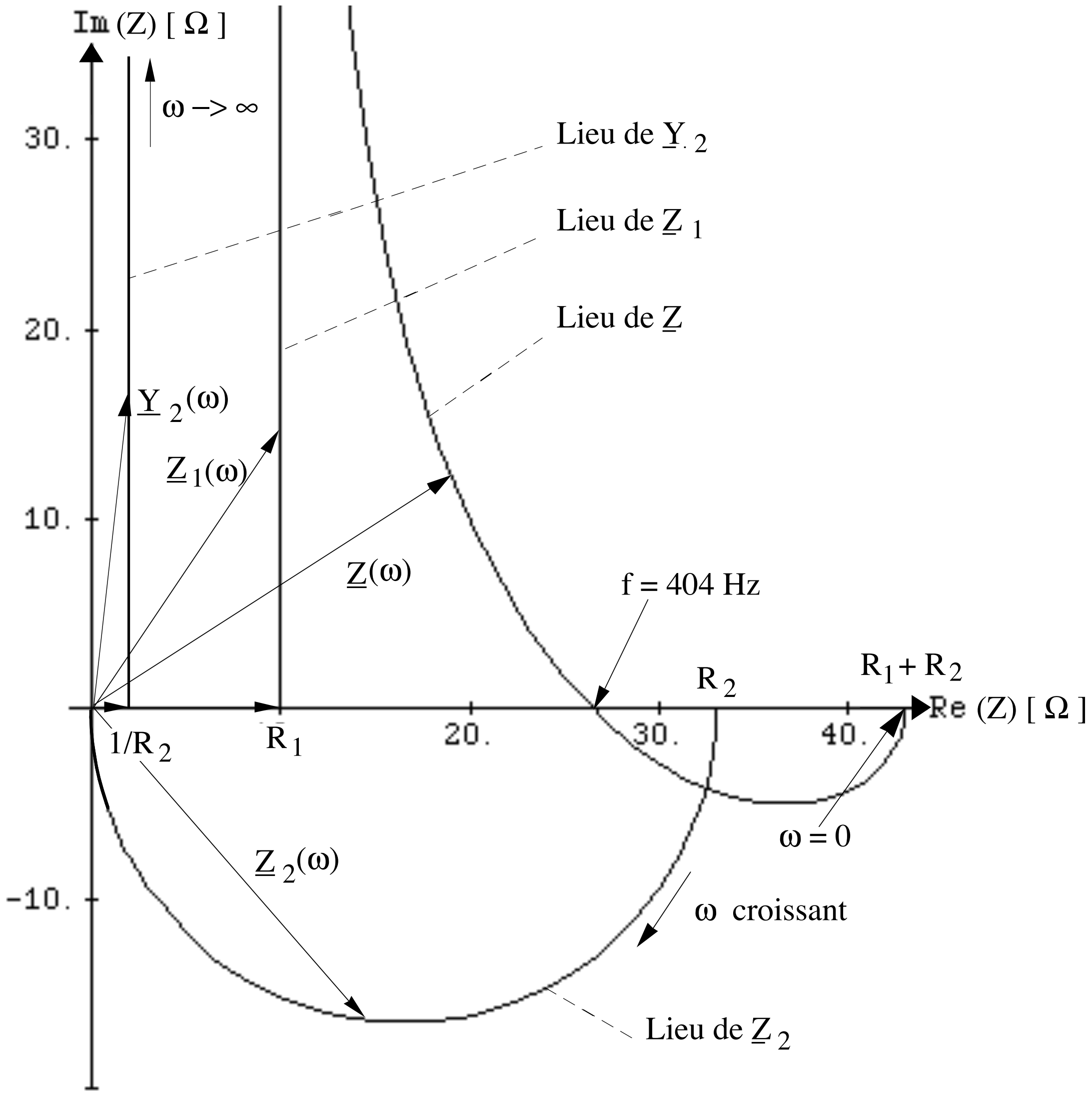
En fonction de la valeur de f, on notera que :

$0 < f < 404$ Hz : le circuit est de nature capacitive

$f = 404$ Hz : le circuit est de nature résistive

$404 \text{ Hz} < f < \infty$: le circuit est de nature inductive





Sur ce deuxième graphe, toutes les grandeurs sont à l'échelle, sauf $1/R_2$.