

Systèmes Multivariables

Etude de cas

Alain Bock, Laleh Makarem, MER Denis Gillet

6 octobre 2010

Outline

- 1 Introduction
- 2 Modélisation
- 3 Marche à suivre

Organisation

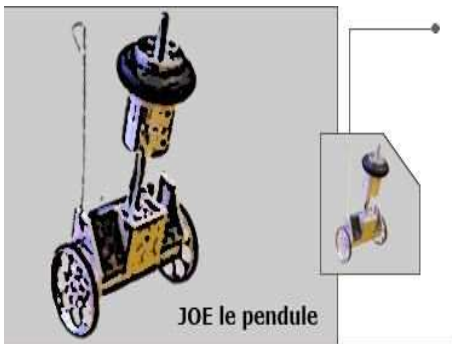
Principe

- Etude d'un cas pratique sur Matlab/Simulink
- Possibilité d'obtenir un bonus de 0.5 pt ajouté à l'examen
- Rapport et programme à rendre pour le 7 janvier

Déroulement

- Possibilité de travailler par deux
- Deux séances : 10 novembre et 22 décembre
- Salle ME A0 392 (fixations de ski)

Qu'est-ce qu'on va faire ?



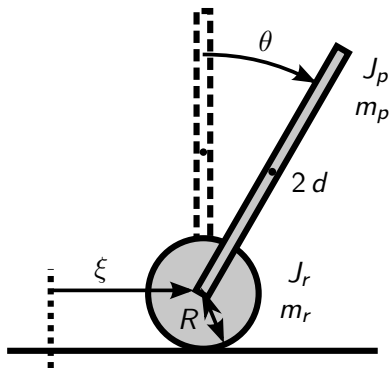
Objectif

On va développer une commande pour un pendule inversé de type Segway

Outline

- 1 Introduction
- 2 Modélisation**
- 3 Marche à suivre

Le système Segway



Système SIMO

- 1 entrée u : couple moteur M_m
- 4 sorties y :
 - position ξ
 - angle θ
 - vitesse $\dot{\xi}$
 - vitesse angulaire $\dot{\theta}$

Hypothèses

Roulement sans glisser

Couple de frottement visqueux $M_f = \eta \left(\frac{\dot{\xi}}{R} - \dot{\theta} \right)$

Méthode de Lagrange

Equation d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = F_{ext}$$

- avec le Lagrangien $L = T - V$
 - T est l'énergie cinétique totale du système
 - V est l'énergie potentielle du système
- les coordonnées généralisées $q = \begin{pmatrix} \xi \\ \theta \end{pmatrix}$
- et les forces généralisées F_{ext}

Energie potentielle et cinétique

$$V = m_p g d \cos(\theta)$$

$$T = 2 T_{roue} + T_{pendule}$$

$$T_{roue} = \frac{1}{2} m_r \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} J_r (\dot{\xi}/R)^2$$

$$T_{pendule} = \underbrace{\frac{1}{2} m_p (\dot{\xi}^2 + 2 \dot{\xi} d \dot{\theta} \cos \theta + d^2 \dot{\theta}^2)}_{T_{translation\ pendule}} + \frac{1}{2} J_p \dot{\theta}^2$$

Energie cinétique de translation du pendule

$$\begin{aligned} T_{\text{pendule}}^{\text{translation}} &= \frac{1}{2} m_p \|\mathbf{v}\|^2 \\ &= \frac{1}{2} m_p (v_x^2 + v_y^2) \\ &= \frac{1}{2} m_p \left[\left(\frac{d}{dt}(\xi + d \sin \theta) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt}(-d \cos \theta) \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} m_p \left[(\dot{\xi} + d \cos \theta \dot{\theta})^2 + (d \sin \theta \dot{\theta})^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} m_p \left(\dot{\xi}^2 + 2\dot{\xi} d \dot{\theta} \cos \theta + d^2 \dot{\theta}^2 (\underbrace{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}_1) \right) \\ &= \frac{1}{2} m_p (\dot{\xi}^2 + 2\dot{\xi} d \dot{\theta} \cos \theta + d^2 \dot{\theta}^2) \end{aligned}$$

Forces généralisées

Avec le principe des travaux virtuels $\delta W = F_{\text{ext}} \cdot \delta q$

$$\delta W_{\xi} = \frac{\delta \xi}{R} M_m - \frac{\delta \xi}{R} M_f = \frac{M_m - M_f}{R} \delta \xi$$

$$\delta W_{\theta} = \delta \theta M_f$$

On obtient les forces généralisées

$$F_{\text{ext}} = \begin{pmatrix} \frac{M_m - M_f}{R} \\ M_f \end{pmatrix}$$

Equation de la dynamique

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = F_{\text{ext}}$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \dot{q} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \ddot{q} - \frac{\partial L}{\partial q}}_{\equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)} = F_{\text{ext}}$$

$$\begin{pmatrix} -d \sin(\theta) m_p \dot{\theta}^2 + d \ddot{\theta} \cos(\theta) m_p + \ddot{\xi} (m_p + 2 \left(\frac{J_r}{R^2} + m_r \right)) \\ d \ddot{\xi} \cos(\theta) m_p - dg \sin(\theta) m_p + \ddot{\theta} (m_p d^2 + J_p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Ru + R\eta \dot{\theta} - \eta \dot{\xi}}{R^2} \\ \eta \left(\frac{\dot{\xi}}{R} - \dot{\theta} \right) \end{pmatrix}$$

Variables d'état

Sélection des variables

i	grandeurs γ_i	ordres ρ_i	variables d'états
1	ξ	2	$x_1 = \xi, x_3 = \dot{\xi}$
2	θ	2	$x_2 = \theta, x_4 = \dot{\theta}$

Nous obtenons le vecteur d'état

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \theta \\ \dot{\xi} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

Vers le modèle d'état

A partir de l'équation de Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \ddot{\mathbf{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} = F_{ext}$$

on obtient

$$\ddot{\mathbf{q}} = \left(\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \right)^{-1} \left(F_{ext} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} \right)$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2((m_p d^2 + J_p)(dR^2 \sin(\theta)m_p \dot{\theta}^2 + R\eta \dot{\theta} + Ru - \eta \dot{\xi}) - dR \cos(\theta)m_p(\eta(\dot{\xi} - R\dot{\theta}) + dgR \sin(\theta)m_p))}{-R^2 \cos(2\theta)m_p^2 d^2 + m_p((m_p + 4m_r)R^2 + 4J_r)d^2 + 2J_p((m_p + 2m_r)R^2 + 2J_r)} \\ \frac{2(\eta(\dot{\xi} - R\dot{\theta}) + dgR \sin(\theta)m_p)((m_p + 2m_r)R^2 + 2J_r) - 2dR \cos(\theta)m_p(dR^2 \sin(\theta)m_p \dot{\theta}^2 + R\eta \dot{\theta} + Ru - \eta \dot{\xi})}{R(-R^2 \cos(2\theta)m_p^2 d^2 + m_p((m_p + 4m_r)R^2 + 4J_r)d^2 + 2J_p((m_p + 2m_r)R^2 + 2J_r))} \end{pmatrix}$$

Il ne reste plus qu'à remplacer par les variables d'état x_i pour avoir un modèle sous la forme $\dot{x} = f(x, u)$.

Modèle d'état non linéaire du système

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\xi} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \frac{2((m_p d^2 + J_p)(dR^2 \sin(x_2)m_p x_4^2 + R\eta x_4 + Ru - \eta x_3) - dR \cos(x_2)m_p (dgR \sin(x_2)m_p + \eta(x_3 - Rx_4)))}{-R^2 \cos(2x_2)m_p^2 d^2 + m_p((m_p + 4m_r)R^2 + 4J_r)d^2 + 2J_p((m_p + 2m_r)R^2 + 2J_r)} \\ \frac{2((m_p + 2m_r)R^2 + 2J_r)(dgR \sin(x_2)m_p + \eta(x_3 - Rx_4)) - 2dR \cos(x_2)m_p (dR^2 \sin(x_2)m_p x_4^2 + R\eta x_4 + Ru - \eta x_3)}{R(-R^2 \cos(2x_2)m_p^2 d^2 + m_p((m_p + 4m_r)R^2 + 4J_r)d^2 + 2J_p((m_p + 2m_r)R^2 + 2J_r))} \end{pmatrix}$$

Outline

- 1 Introduction
- 2 Modélisation
- 3 Marche à suivre**

Du modèle à la commande

A partir du système réel :

- ① Modélisation → modèle non linéaire
- ② Linéarisation → modèle linéaire (valider en simulation)
- ③ Discrétisation → modèle discret (valider en simulation)
- ④ Synthèse d'une commande → système en boucle fermée (valider sur le système réel : modèle non linéaire)

Matlab pour analyse et synthèse

```
=====
%% 1) Linearisation des equ. autour d'un point d'equilibre (x_b,...)
%
% 1.1) Linearisation du systeme f a l'aide de la toolbox "symbolique"
% 1.2) Definition numerique du point de fonctionnement (x_b,u_b)
% 1.3) Evaluation des matrices A et B au point nominal
% 1.4) Sauvegarde du modele linearise dans un fichier *.mat
=====

%% 1.1) Linearisation du systeme f
% Declaration des matrices du systeme linearise
syms A B;

% A = ?-?-?
% B = ?-?-?

%-----

%% 1.2) Definition numerique du point de fonctionnement (x_b,u_b)
% x_b = ?-?-?
% u_b = ?-?-?

%-----

%% 1.3) Evaluation des matrices A et B au point nominal
% xi = x_b(1); ?-1-?
% theta = x_b(2); ?-1-?
% xid = x_b(3); ?-1-?
% thetad = x_b(4); ?-1-?
% u = u_b; ?-1-?

% Chargement des parametres physiques
parametresPhysiques;

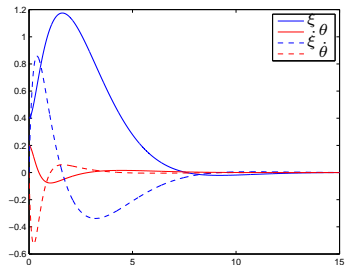
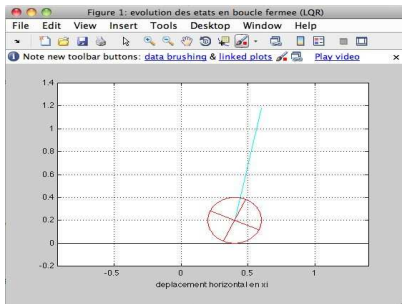
% Evaluation des matrices du systeme linearise au point nominal
% A = ?-?-?
% B = ?-?-?
% C = ?-?-?
% D = ?-?-?

% A ce stade, A et B sont des fonctions des parametres physiques et des
% valeurs nominales (matrices numeriques)
```

Simulink pour simuler les modèles

The screenshot displays a Simulink model window titled "simulationLinearisation" and its associated Simulink Library Browser. The model diagram shows a signal flow starting from "entreeManuelle" (input 0), passing through "entreeBar" (input u_b) and "x_b" (input etatsBars) to "entree". This signal then branches to "systemeNL" and "dynamiquePieelle". "systemeNL" outputs to "etatsNL" and "sauvegarde1". "dynamiquePieelle" outputs to "etatsNL" and "sauvegarde2". "etatsNL" outputs to "etatsCompares". The library browser shows various blocks like Derivative, State-Space, Transport Delay, etc.

Simulation en boucle fermée



Simulation de l'unicycle (projet de semestre ou Master)

