Transformation de Laplace

But : Relation *algébrique* liant l'entrée et la sortie d'un système dynamique

Définition

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \equiv \int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

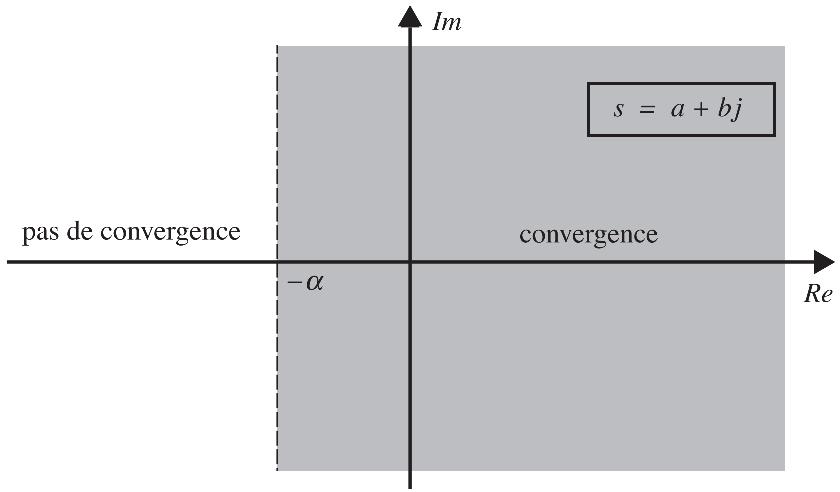
$$f(t) \xrightarrow{\quad\mathcal{L}\quad} F(s)$$

Transformée de Laplace de $f(t) = Ae^{-\alpha t} \quad (t \geq 0)$

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} Ae^{-\alpha t}e^{-st}\mathrm{d}t = A\int_0^{\infty} e^{-(s+\alpha)t}\mathrm{d}t = -\frac{A}{s+\alpha}e^{-(s+\alpha)t}\Big|_0^{\infty}$$

$$= -\frac{A}{s+\alpha}e^{-(a+\alpha)t}[\cos(bt) - j\sin(bt)]\Big|_0^{\infty} \qquad s = a + bj$$

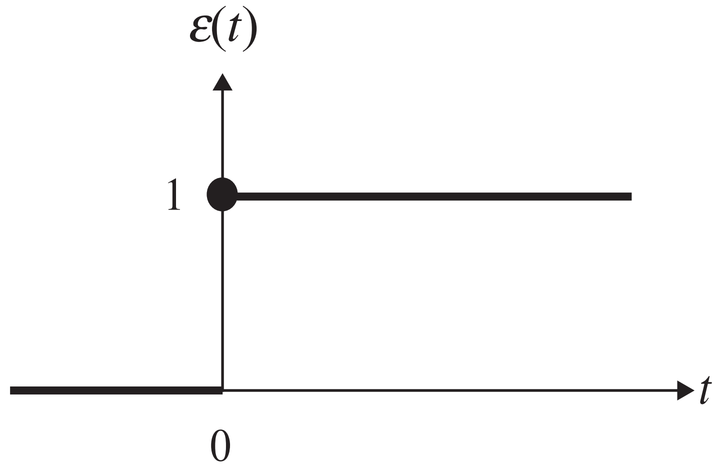
$$= \begin{cases} \dfrac{A}{s+\alpha} & \text{si } (a+\alpha) > 0 \qquad a > -\alpha \\ \text{ne converge pas} & \text{si } (a+\alpha) \leq 0 \qquad a \leq -\alpha \end{cases}$$



→ $-\alpha$: abscisse de converge

Cas particulier $\quad A = 1\ ,\ \alpha = 0$

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour } t < 0 \\ 1 \text{ pour } t \geq 0 \end{cases}$$

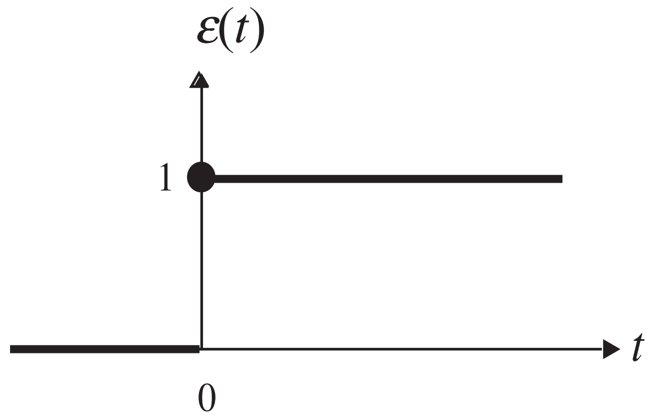


$$\mathcal{L}[\varepsilon(t)] = \int_0^\infty 1 e^{-st} \mathrm{d}t = \frac{1}{s}$$

Abscisse de convergence 0

Saut unité

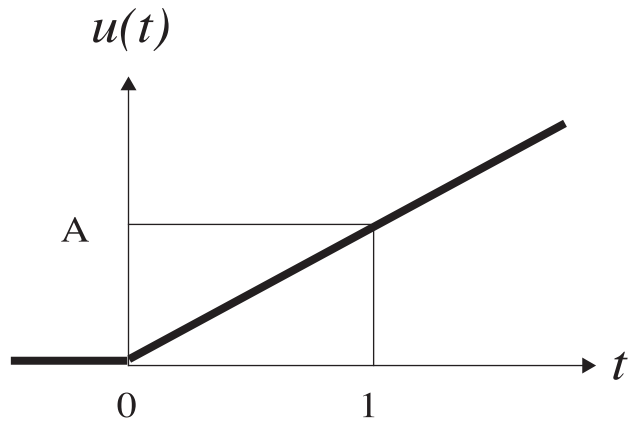
$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ 1 & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$



$$\mathcal{L}[\varepsilon(t)] = \int_0^{\infty} 1 e^{-st} \mathrm{d}t = \frac{1}{s}$$

Rampe

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ At & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$



$$U(s) = \mathcal{L}[u(t)] = \int_0^\infty A t e^{-\mathrm{st}} \mathrm{d}t = A\left\{\left[-t\frac{1}{s}e^{-\mathrm{st}}\right]\Bigg|_0^\infty - \int_0^\infty -\frac{1}{s}e^{-\mathrm{st}}\mathrm{d}t\right\} = \frac{A}{s^2}$$

Exponentielle

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ Ae^{-\alpha t} & \text{pour } t \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = \frac{A}{s+\alpha}$$

Sinus et cosinus

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ A\sin(\omega_0 t) & \text{pour } t \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = \frac{A\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ A\cos(\omega_0 t) & \text{pour } t \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = \frac{As}{s^2+\omega_0^2}$$

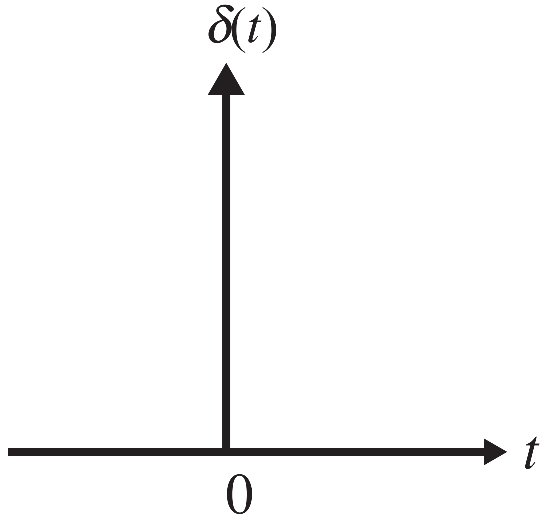
Utiliser

$$e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j\sin(\omega_0 t)$$

$$e^{-j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) - j\sin(\omega_0 t)$$

Impulsion de Dirac

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1$$



$$L[\delta(t)] = \int_{0}^{\infty} \delta(t) e^{-\mathrm{st}} \mathrm{d}t = \int_{0}^{0+} \delta(t) e^{0} \mathrm{d}t + \int_{0+}^{\infty} 0 e^{-\mathrm{st}} \mathrm{d}t = 1$$

Dictionnaire de la transformation de Laplace

n°	Signal temporel	Transformée	Abscisse de convergence
1	$\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s}$	$(0, \infty)$
2	$\delta(t)$	1	$(-\infty,\infty)$
3	$\delta^{n+1}(t)$	s^{n}	$(-\infty,\infty)$
4	$\varepsilon(t)e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$(-\alpha, \infty)$
5	$\varepsilon(t)\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$(0, \infty)$
6	$\varepsilon(t)\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$(0, \infty)$
7	$\varepsilon(t)e^{-\alpha t}\cos(\omega t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$	$(-\alpha, \infty)$
8	$\varepsilon(t)e^{-\alpha t}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$	$(-\alpha, \infty)$
9	$\varepsilon(t)\cos(\omega t+\Phi)$	$\frac{s\cos\Phi-\omega\sin\Phi}{s^2+\omega^2}$	$(0, \infty)$
10	$\varepsilon(t)\sin(\omega t+\Phi)$	$\frac{s\sin\Phi+\omega\cos\Phi}{s^2+\omega^2}$	$(0, \infty)$
12	$\frac{\varepsilon(t)t^{n}}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$	$(0, \infty)$
13	$\frac{\varepsilon(t)t^{n}e^{-\alpha t}}{n!}$	$\frac{1}{(s+\alpha)^{n+1}}$	$(-\alpha, \infty)$

Dérivation temporelle

Intégration par parties →

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)\right] = \int_0^\infty \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)\right] e^{-\mathrm{st}}\mathrm{d}t$$

$$= [f(t)e^{-\mathrm{st}}]\Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t)(-s)e^{-\mathrm{st}}\mathrm{d}t$$

$$= -f(0) + s\int_0^\infty f(t)e^{-\mathrm{st}}\mathrm{d}t = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f(t)\right] = s^2F(s) - sf(0) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(0)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}^\mathrm{n}}{\mathrm{d}t^\mathrm{n}}f(t)\right] = s^\mathrm{n}F(s) - s^{n-1}f(0) - \ldots - \frac{\mathrm{d}^{\mathrm{n}-1}}{\mathrm{d}t^{\mathrm{n}-1}}f(0)$$

Dériver le signal temporel f(t) correspond, dans le domaine de Laplace, à multiplier sa transformée *F(s)* par *s*

Intégration temporelle

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] = \int_0^\infty \left[\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]\left(-\frac{1}{s}\right)e^{-\mathrm{st}}\Bigg|_0^\infty - \int_0^\infty f(t)\left(-\frac{1}{s}\right)e^{-\mathrm{st}}\,\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{s}\left[e^{-\infty}\int_0^\infty f(\tau)\,\mathrm{d}\tau - e^0\int_0^0 f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] + \frac{1}{s}\int_0^\infty f(t)e^{-\mathrm{st}}\,\mathrm{d}t = \frac{F(s)}{s}$$

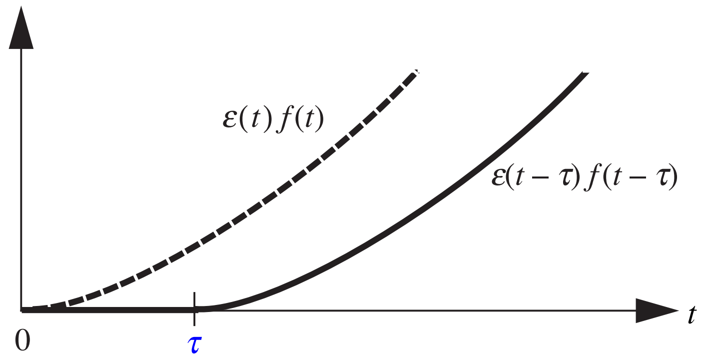
Intégrer le signal temporel f(t) correspond, dans le domaine de Laplace, à multiplier sa transformée F(s) par 1/s

Translation dans le domaine de Laplace : F(s + λ)

$$\mathcal{L}[e^{-\lambda t}f(t)] = \int_0^\infty e^{-\lambda t}f(t)e^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^\infty f(t)e^{-(s+\lambda)t}\mathrm{d}t = F(s+\lambda)$$

Multiplier le signal temporel *f(t)* par $e^{-\lambda t}$ correspond, dans le domaine de Laplace, à remplacer l'argument s par *(s + λ)*

Translation dans le temps $f(t - \tau)$



$$\mathcal{L}[\varepsilon(t-\tau)f(t-\tau)] = \int_0^\infty \varepsilon(t-\tau)f(t-\tau)e^{-st}\mathrm{d}t = \int_\tau^\infty f(t-\tau)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$v = t - \tau$$

$$= e^{-s\tau}\int_0^\infty f(v)e^{-sv}\mathrm{d}v = e^{-s\tau}F(s)$$

Retarder le signal temporel *f(t)* de τ correspond, dans le domaine de Laplace, à multiplier sa transformée de Laplace *F(s)* par $e^{-s\tau}$

Linéarité

Principe de superposition

$$\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s)$$
$$\mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(s)$$

$$\longrightarrow \quad \mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

$$c_1 = const$$
$$c_2 = const$$

Mais $$\mathcal{L}[f_1(t) f_2(t)] = \int_0^\infty f_1(t) f_2(t) e^{-st} dt$$
$$\neq F_1(s) F_2(s)$$

Théorème de la valeur finale

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

à condition que *sF(s)* reste fini pour toute valeur de $s = a + bj$ avec $a \geq 0$ (pas de pôles de $sF(s)$ dans la moitié droite du plan complexe, axe imaginaire compris)

Théorème de la valeur initiale

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

Convolution

$$h(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

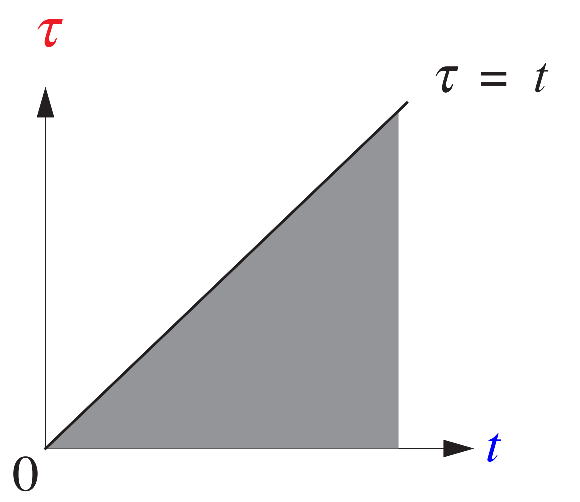
$$H(s) = \int_0^\infty \left[\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] e^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)e^{-st}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{H(s)} = \int_0^\infty \int_\tau^\infty f(\tau)g(t-\tau)e^{-st}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau = \int_0^\infty f(\tau)\left[\int_\tau^\infty g(t-\tau)e^{-st}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\tau$$

avec $v = t - \tau$

$$H(s) = \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\left[\int_0^\infty g(v)e^{-sv}\mathrm{d}v\right]\mathrm{d}\tau = \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}G(s)\,\mathrm{d}\tau$$

$$= \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\mathrm{d}\tau\; G(s) = F(s)G(s)$$

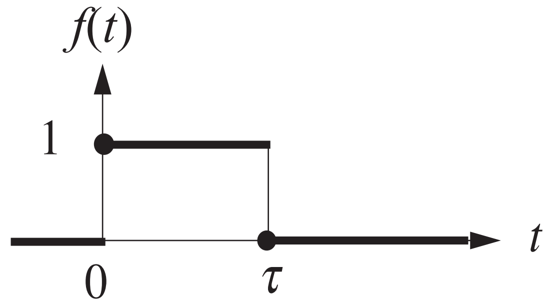


Grammaire de la transformation de Laplace

n°	Signal temporel	Transformée
I	$f(t)$	$F(s)$
II	$\sum_{i} k_i f_i(t)$	$\sum_{i} k_i F_i(s)$
III	$f(t/\lambda)$	$\lvert\lambda\rvert F(\lambda s)$
IV	$e^{-\lambda t} f(t)$	$F(s+\lambda)$
V	$\varepsilon(t-\tau) f(t-\tau)$	$e^{-s\tau} F(s)$
VI	$\frac{d^n}{dt^n} f(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \ldots - \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} f(0)$
VII	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s) F_2(s)$
VIII	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
IX	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$
X	$\lim_{t \to \infty} f(t)$	$\lim_{s \to 0} [sF(s)]$
XI	$\lim_{t \to 0} f(t)$	$\lim_{s \to \infty} [sF(s)]$

Exemple

Déterminons la transformée de Laplace du signal



Solution

1re approche

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\tau} 1 e^{-st} \mathrm{d}t + \int_{\tau}^{\infty} 0 e^{-st} \mathrm{d}t = \frac{1}{s}(1 - e^{-s\tau})$$

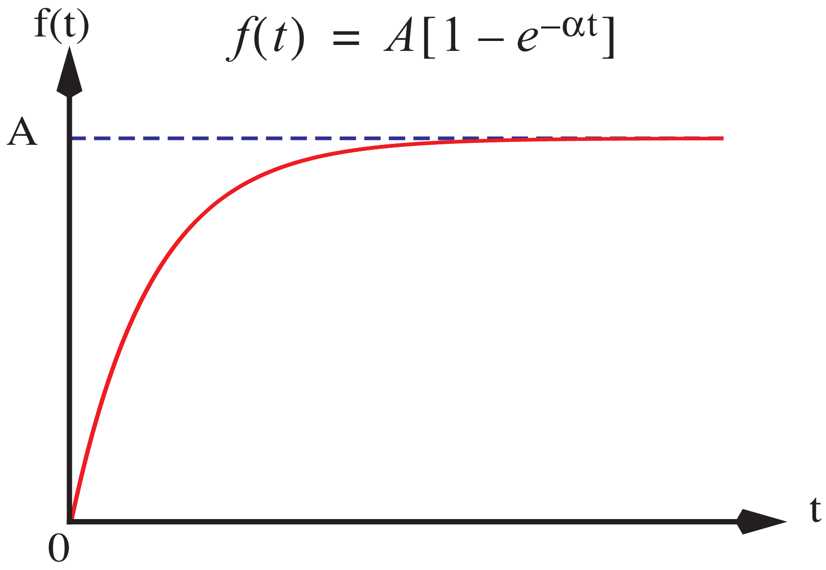
2e approche

$$f(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t - \tau)$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s} + \frac{(-1)}{s} e^{-s\tau} = \frac{1}{s}(1 - e^{-s\tau})$$

Exemple

$$f(t) = A[1 - e^{-\alpha t}]$$



Déterminons la transformée de Laplace ainsi que la valeur finale de *f(t)*

Solution

Selon le dictionnaire

$$F(s) = \frac{A}{s} - \frac{A}{s+\alpha} = \frac{A\alpha}{s(s+\alpha)}$$

Valeur finale

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} [sF(s)] = \lim_{s \to 0}\left[\frac{A\alpha}{s+\alpha}\right] = A$$

Exemple

Soit $F(s) = \dfrac{1}{(s+a)^2}$

Déterminons *f(t)*

Solution

Dictionnaire $\mathcal{L}[t] = \dfrac{1}{s^2}$

Grammaire $\mathcal{L}[e^{-\mathrm{at}}f(t)] = F(s+a)$

Ainsi $\mathcal{L}[e^{-\mathrm{at}}t] = \dfrac{1}{(s+a)^2}$

et $f(t) = te^{-at} \qquad t \geq 0$

Fonction de transfert

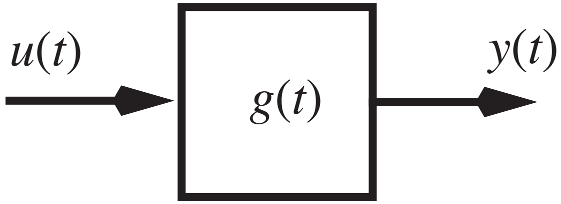
Système lscr

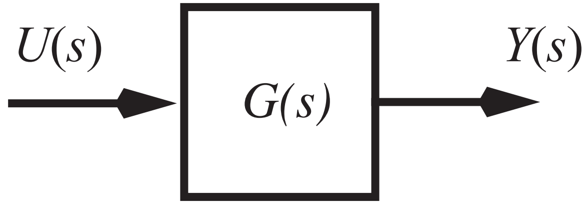
$$y(t) = \int_0^t u(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$Y(s) = G(s)\,U(s)$$

$$G(s) \equiv \mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

$G(s)$ est indépendant de l'entrée





Fonction de transfert

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = b_m u^{(m)} + b_{m-1}u^{(m-1)} + \ldots + b_1 u^{(1)} + b_0 u$$

avec des conditions initiales nulles

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + \ldots + a_1 s + a_0}$$

Causalité $\quad m \leq n \quad$ (degré relatif ≥ 0)

Fonction de transfert

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 3y(t) = \dot{u}(t) - 2u(t)$$

$$y(0) = y_0 \qquad \dot{y}(0) = z_0 \qquad u(0) = u_0$$

Dans le domaine de Laplace

$$\Rightarrow [s^2 Y(s) - sy_0 - z_0] + 2[sY(s) - y_0] + 3Y(s) = [sU(s) - u_0] - 2U(s)$$

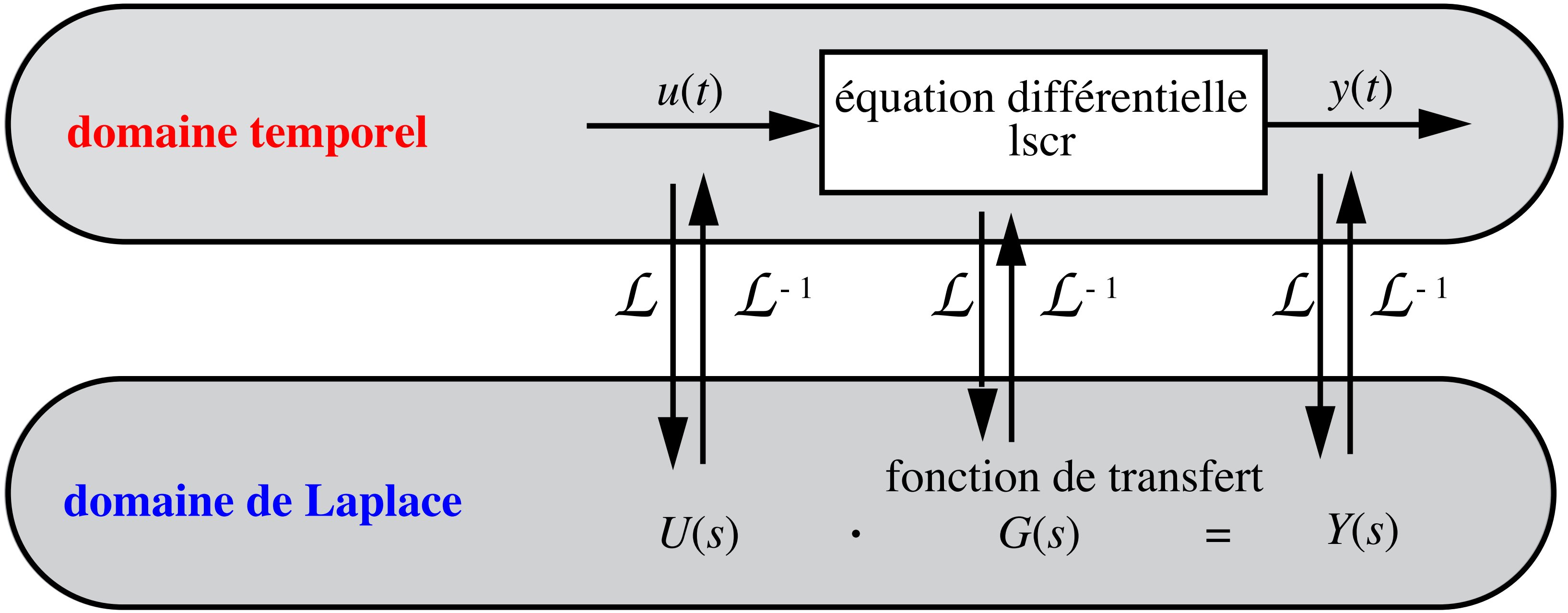
$$Y(s) = \underbrace{\frac{s-2}{s^2+2s+3}U(s)}_{\text{réponse forcée}} + \underbrace{\frac{sy_0 + [z_0 + 2y_0 - u_0]}{s^2+2s+3}}_{\text{réponse libre}}$$

réponse forcée **réponse libre**

La fonction de transfert correspond uniquement à la réponse forcée

$$G(s) = \frac{s-2}{s^2+2s+3}$$

Domaines temporel et de Laplace



Transformation de Laplace inverse

Soit $G(s) = \dfrac{2(s+3)}{s^2+7s+6} = \dfrac{2(s+3)}{(s+1)(s+6)}$ avec des conditions initiales nulles

Déterminons la sortie *y(t)* pour l'entrée $u(t) = e^{-2t}$

Solution

$$U(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{2(s+3)}{(s+1)(s+6)(s+2)}$$

$$= \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+6} + \frac{C}{s+2}$$

Transformation de Laplace inverse (suite)

Méthode 1 : Réduction au même dénominateur et identification des coefficient de même puissance

$$2(s+3) = A(s+6)(s+2) + B(s+1)(s+2) + C(s+1)(s+6)$$

$$\begin{aligned} s^2 &: 0 = A + B + C \\ s^1 &: 2 = 8A + 3B + 7C \\ s^0 &: 6 = 12A + 2B + 6C \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} A &= 0{,}8 \\ B &= -0{,}3 \\ C &= -0{,}5 \end{aligned}$$

Transformation de Laplace inverse (suite)

Méthode 2 : Méthode des résidus

$$A = \lim_{s \to -1} (s+1)Y(s) = \lim_{s \to -1}\left[\frac{2(s+3)}{(s+2)(s+6)}\right] = 0,8$$

$$B = \lim_{s \to -6} (s+6)Y(s) = \lim_{s \to -6}\left[\frac{2(s+3)}{(s+1)(s+2)}\right] = -0,3$$

$$C = \lim_{s \to -2} (s+2)Y(s) = \lim_{s \to -2}\left[\frac{2(s+3)}{(s+1)(s+6)}\right] = -0,5$$

$$Y(s) = \frac{0,8}{s+1} - \frac{0,3}{s+6} - \frac{0,5}{s+2}$$

$$\longrightarrow \quad y(t) = 0,8e^{-t} - 0,3e^{-6t} - 0,5e^{-2t} \qquad t \geq 0$$

Racines complexes

Soit $Y(s) = \dfrac{s+1}{s(s^2+4s+5)}$ Déterminons $y(t)$

Solution

a) $Y(s) = \dfrac{s+1}{s(s+2+j)(s+2-j)} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{C+Dj}{s+2+j} + \dfrac{C-Dj}{s+2-j}$

b) $Y(s) = \dfrac{A}{s} + \dfrac{Es+F}{s^2+4s+5}$

Racines complexes (suite)

Déterminons A, E et F $\qquad (s+1) = A(s^2+4s+5)+(Es+F)s$

$$\left.\begin{array}{l} s^2 : 0 = A+E \\ s^1 : 1 = 4A+F \\ s^0 : 1 = 5A \end{array}\right. \longrightarrow \begin{array}{l} A = 0{,}2 \\ E = -0{,}2 \\ F = 0{,}2 \end{array}$$

$$Y(s) = \frac{0{,}2}{s} + \frac{-0{,}2s+0{,}2}{s^2+4s+5} = \frac{0{,}2}{s} + \frac{-0{,}2(s+2)}{(s+2)^2+1} + \frac{0{,}6}{(s+2)^2+1}$$

$$y(t) = 0{,}2 - 0{,}2e^{-2t}\cos t + 0{,}6e^{-2t}\sin t \qquad t \geq 0$$

Racines doubles

Soit $Y(s) = \dfrac{s+1}{(s+2)^2(s+3)}$ Déterminons $y(t)$

Solution

$$Y(s) = \frac{s+1}{(s+2)^2(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s+2)^2} + \frac{C}{s+3}$$

Note : $\dfrac{As+B'}{(s+2)^2} = \dfrac{A(s+2)+(B'-2A)}{(s+2)^2} = \dfrac{A}{s+2} + \dfrac{B}{(s+2)^2}$

$$(s+2)^2 Y(s) = \frac{s+1}{s+3} = A(s+2) + B + \frac{C(s+2)^2}{s+3}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[(s+2)^2 Y(s)] = \frac{2}{(s+3)^2} = A + (s+2)Q(s)$$

Racines doubles (suite)

Méthode des résidus

$$A = \lim_{s \to -2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[(s+2)^2 Y(s)] = \lim_{s \to -2} \frac{2}{(s+3)^2} = 2$$

$$B = \lim_{s \to -2} (s+2)^2 Y(s) = \lim_{s \to -2} \frac{s+1}{s+3} = -1$$

$$C = \lim_{s \to -3} (s+3) Y(s) = \lim_{s \to -3} \frac{s+1}{(s+2)^2} = -2$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+2} - \frac{1}{(s+2)^2} - \frac{2}{s+3}\right] = 2e^{-2t} - te^{-2t} - 2e^{-3t} \qquad t \geq 0$$

Même degré au numérateur et au dénominateur

Soit $Y(s) = \dfrac{s(s+3)}{(s+1)^2}$ Déterminons $y(t)$

Solution

$$Y(s) = \frac{s^2+3s}{s^2+2s+1} = 1 + \frac{s-1}{(s+1)^2} = 1 + \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2}$$

Déterminons A et B en réduisant au même dénominateur

$$s-1 = A(s+1)+B$$

d'où $s^1 : 1 = A \qquad A = 1$

$s^0 : -1 = A+B \qquad B = -2$

$$Y(s) = 1 + \frac{1}{s+1} - \frac{2}{(s+1)^2}$$

$$y(t) = \delta(t) + e^{-t} - 2te^{-t} \qquad t \geq 0$$

Système non linéaire

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 3x^2 = u \qquad x(0) = \dot{x}(0) = 0$$

Calculons la fonction de transfert $G(s)$

Solution

Linéariser autour d'un point de fonctionnement, par exemple $\bar{u} = 0, \bar{x} = 0$:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} = u \qquad x(0) = \dot{x}(0) = 0$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} \qquad \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(s+2)}$$

Système non linéaire

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 3 = u \qquad y(0) = \dot{y}(0) = 0$$

Calculons la fonction de transfert *G(s)*

Solution

Le système est non linéaire car le principe de superposition ne s'applique pas

$$u_1 \rightarrow y_1 : \qquad \ddot{y}_1 + 2\dot{y}_1 + 3 = u_1$$

$$u_2 \rightarrow y_2 : \qquad \ddot{y}_2 + 2\dot{y}_2 + 3 = u_2$$

$$u_1 + u_2 \not\rightarrow y_1 + y_2 : \qquad (\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2) + 2(\dot{y}_1 + \dot{y}_2) + 6 = (u_1 + u_2)$$

Le terme «3» gêne ! Formulation linéaire en redéfinissant l'entrée

$$u(t) = u(t) - 3$$

$$\ddot{y} + 2\dot{y} = u \qquad y(0) = \dot{y}(0) = 0$$

Le concept de fonction de transfert ne s'applique qu'aux systèmes lscr