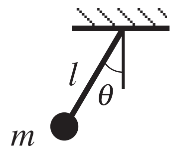
Modélisation mathématique



Système

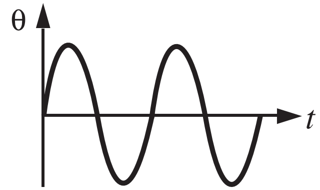
lois physiques connues et d'une complexité abordable	comportements particuliers ou dominants connus
modèle de CONNAISSANCE déterminé analytiquement	modèle de REPRESENTATION déterminé expérimentalement

Loi de Newton

$$ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgl\sin\theta$$

$$\theta(0) = \theta_0 \; ; \; \dot{\theta}(0) = \omega_0$$

Observation



$$\theta(t) = \omega_0\sqrt{l/g}\,\sin(\sqrt{g/l}\,t)$$

Modèle de connaissance

Procédure

1) Structuration du problème

2) Mise en équation en utilisant des lois connues de la nature, telles

- lois de conservation de type *différentiel*
- des relations connues de type *algébrique*

3) Identification des paramètres à partir de mesures expérimentales

4) Validation du modèle en comparant sa prédiction avec certaines données expérimentales

Systèmes mécaniques

Lois de mouvement de Newton

Inertie : opposition d'une masse à une accélération

	<u>**translation**</u>	<u>**rotation**</u>
position	x	θ
vitesse	$v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$	$\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$
accélération	$a = \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$	$\alpha = \dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$

Systèmes mécaniques (suite)

1) La quantité de mouvement **mv** (ou **Jω**) reste constante en l'absence de forces ou de couples extérieurs

2) La relation entre les forces $\mathbf{F}_i$ (ou couples $\mathbf{M_i}$) appliquées à une masse et la variation de la vitesse (accélération) qui en résulte s'écrit :

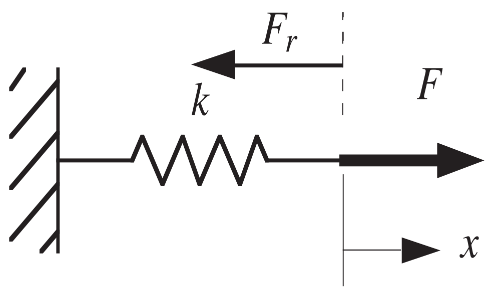
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv) = \sum_i F_i \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J\omega) = \sum_i M_i$$

3) A chaque action s'oppose une réaction de même amplitude (si pas d'accélération)

Elements mécaniques flexibles

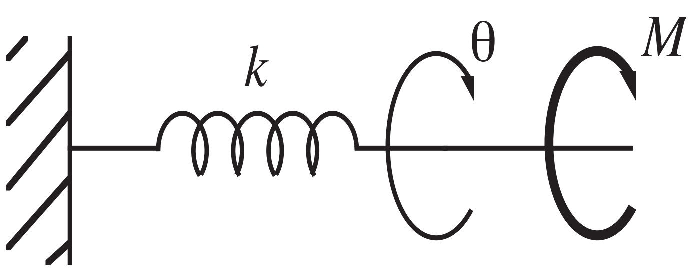
modélisés par des ressorts

Mouvement de translation



$$F_r = -F = -kx \qquad [k] : \frac{N}{m}$$

Mouvement de rotation

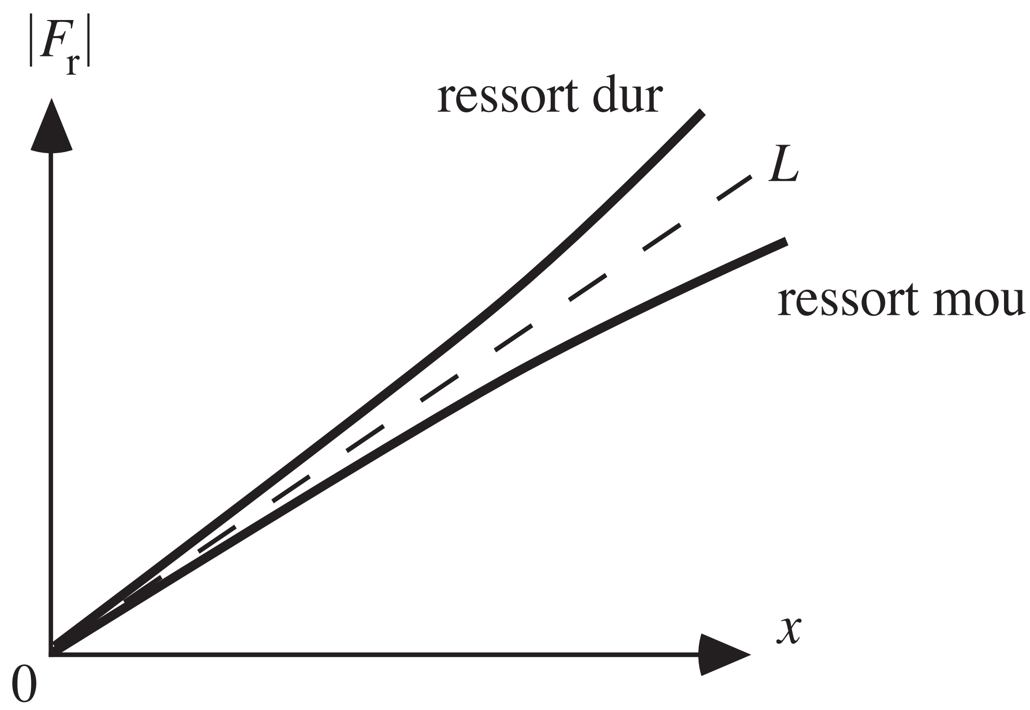


$$M_r = -M = -k\theta \qquad [k] : \frac{Nm}{(rad)}$$

Elements mécaniques flexibles

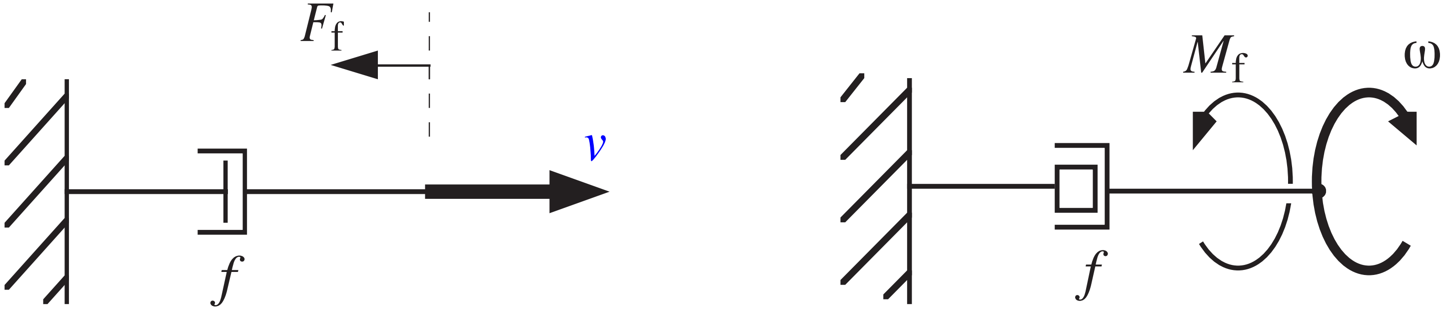
modélisés par des ressorts

Ressort linéaire, sans inertie, ni frottement



Elements mécaniques dissipatifs

modélisés par des frottements



Frottement visqueux

linéaire, sans inertie, ni élément flexible

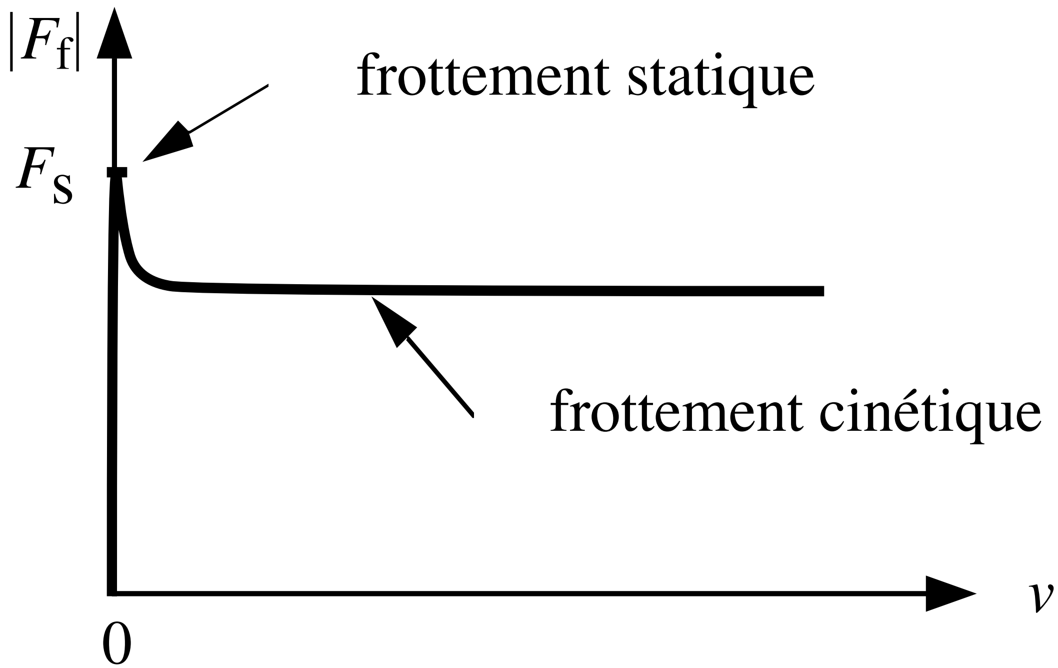
$$F_f = -fv = -f\,\frac{dx}{dt} \qquad [f]:\ \frac{Ns}{m}$$

$$M_f = -f\omega = -f\,\frac{d\theta}{dt} \qquad [f]:\ \frac{Nms}{(rad)}$$

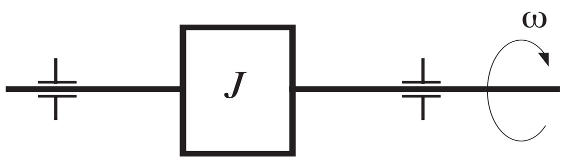
Elements mécaniques dissipatifs

modélisés par des frottements

Frottement sec non linéaire



Rotor en mouvement

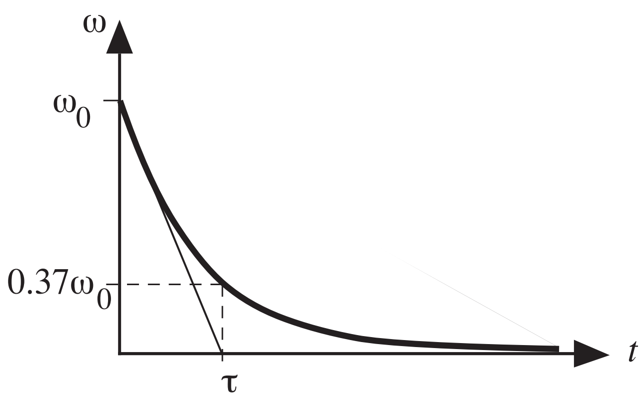


frottement visqueux ; $\omega(0) = \omega_0$ $\omega(t) = ?$

Loi de Newton

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} = \sum_i M_i \qquad J\frac{d\omega}{dt} = -f\omega \qquad \omega(0) = \omega_0$$

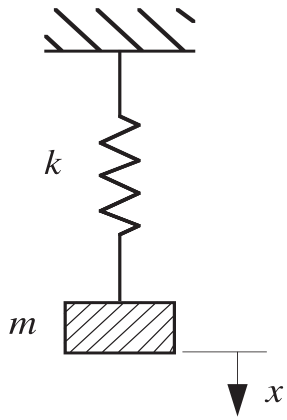
Evolution de la vitesse



$$\omega(t) = \omega_0 e^{-t/\tau}$$

$$\tau = \frac{J}{f} = -\frac{1}{\lambda}$$

Système masse / ressort



- pas de frottement, ni de force extérieure
- $x(0) = x_0 \qquad \dfrac{dx(0)}{dt} = 0$
- $x(t) = ?$

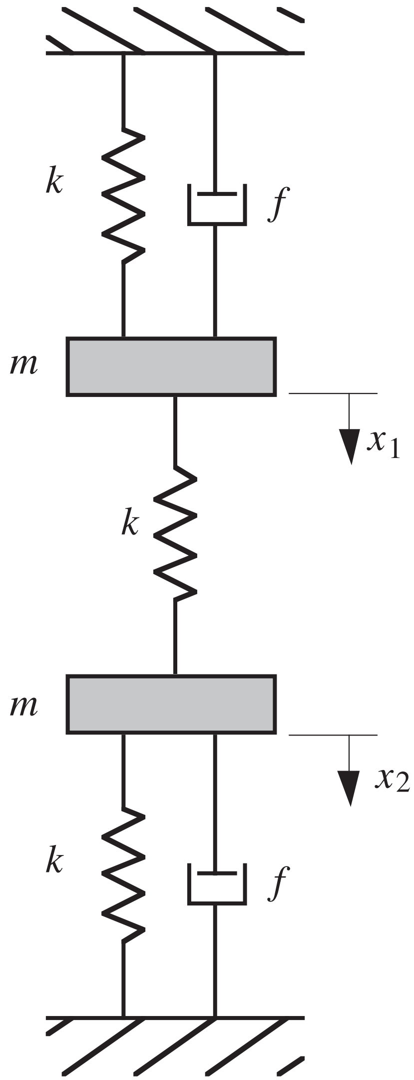
Loi de Newton

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \qquad x(0) = x_0 \qquad \frac{dx(0)}{dt} = 0$$

Trajectoire

$$x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$$ avec la pulsation naturelle $\omega_n = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \quad \left[\dfrac{(\text{rad})}{\text{s}}\right]$

Masses couplées par des ressorts



- frottements visqueux
- pas de force extérieure
- conditions initiales?

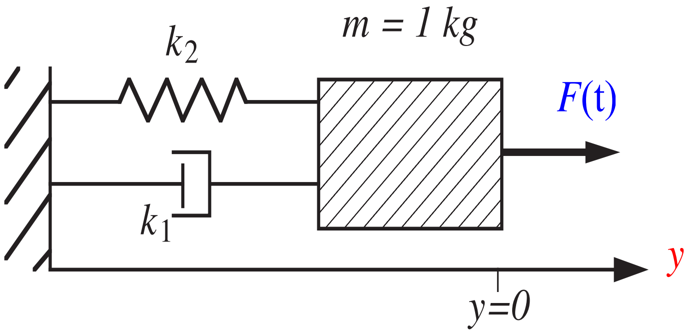
Loi de Newton

$$m \frac{d^2}{dt^2} x_1 = -kx_1 - k(x_1 - x_2) - f \frac{d}{dt} x_1 \qquad x_1(0) \quad \dot{x}_1(0)$$

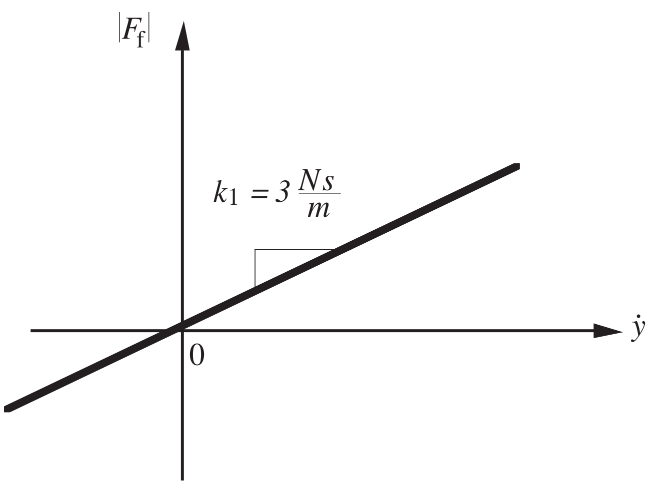
$$m \frac{d^2}{dt^2} x_2 = -kx_2 - k(x_2 - x_1) - f \frac{d}{dt} x_2 \qquad x_2(0) \quad \dot{x}_2(0)$$

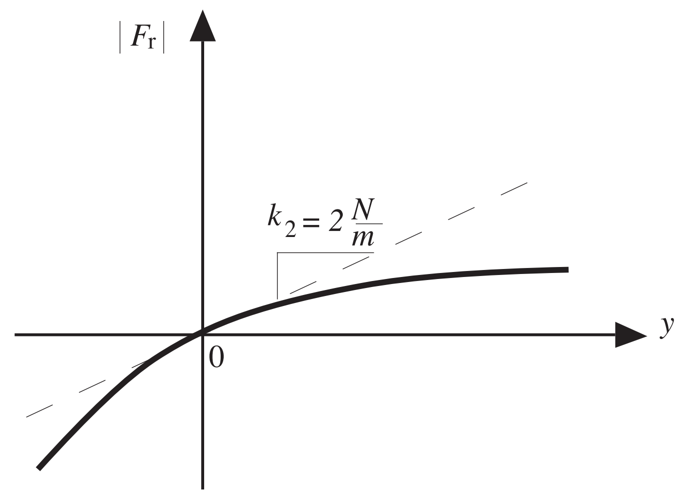
et si F(t) ?

Système flexible avec frottement



- frottement visqueux
- ressort non linéaire
- force F(t)
- y(t) = ?

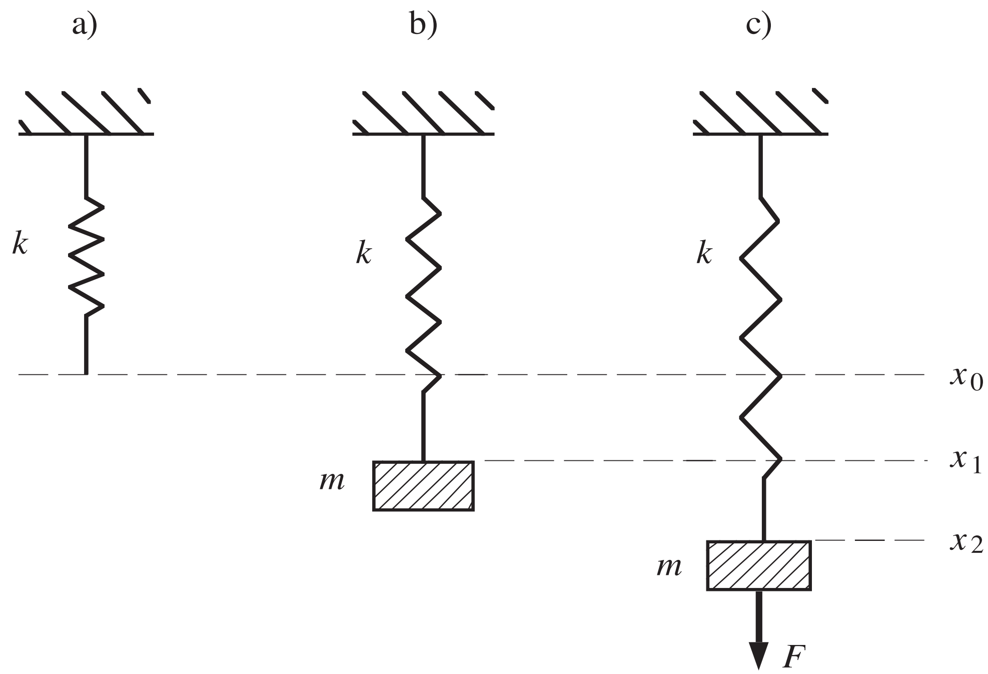




Loi de Newton $$m \frac{d^2}{dt^2} y(t) = F(t) - k_1 \frac{d}{dt} y(t) - k_2\, y(t) \qquad y(0) = 0 \qquad \frac{dy}{dt}(0) = 0$$

Point de référence et variables écart

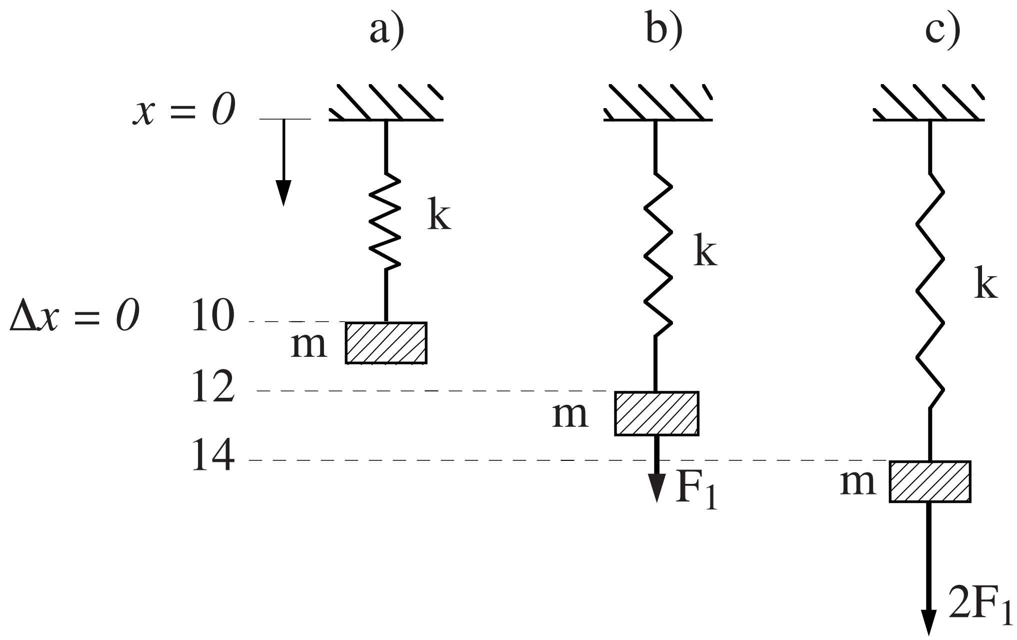
$E_{pot} = m\ g\ h$ $\qquad$ $E_{thermique} = m\ c_p\ \Delta T = m\ c_p\ (T - T_{réf})$

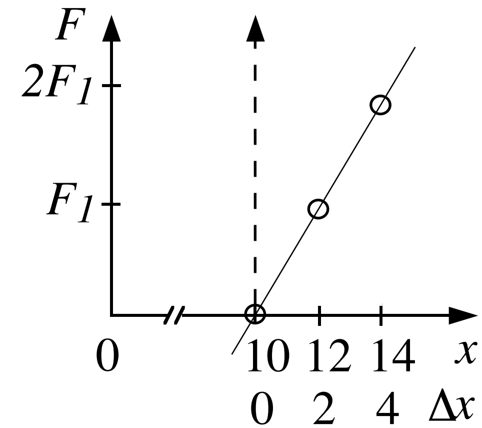


$k(x_1 - x_0) = mg$ $\qquad$ $k(x_2 - x_0) = mg + F$

$k(x_2 - x_1) = F$

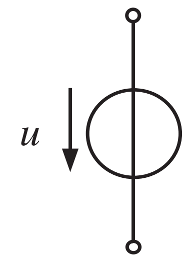
Point de référence et linéarité



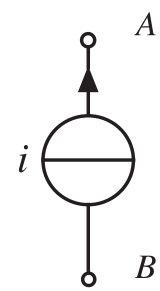


Systèmes électriques

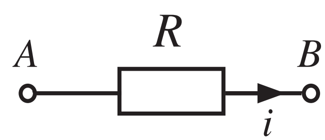
Source de tension



Source de courant



Résistance

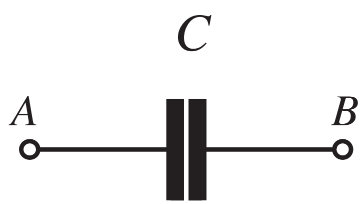


statique

$$v_{\mathrm{A}} - v_{\mathrm{B}} = u_{\mathrm{AB}} = Ri \qquad [\mathrm{R}] = \Omega = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}$$

Systèmes électriques

Condensateur



$$q = C(v_A - v_B) = Cu_{AB}$$

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \mathrm{C}\,\frac{\mathrm{d}u_{AB}}{\mathrm{d}t} \qquad [\mathrm{C}] = \mathrm{F} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}}$$

dynamique

Inductance

$$v_A - v_B = u_{AB} = L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \qquad [\mathrm{L}] = \mathrm{H} = \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{A}}$$

dynamique

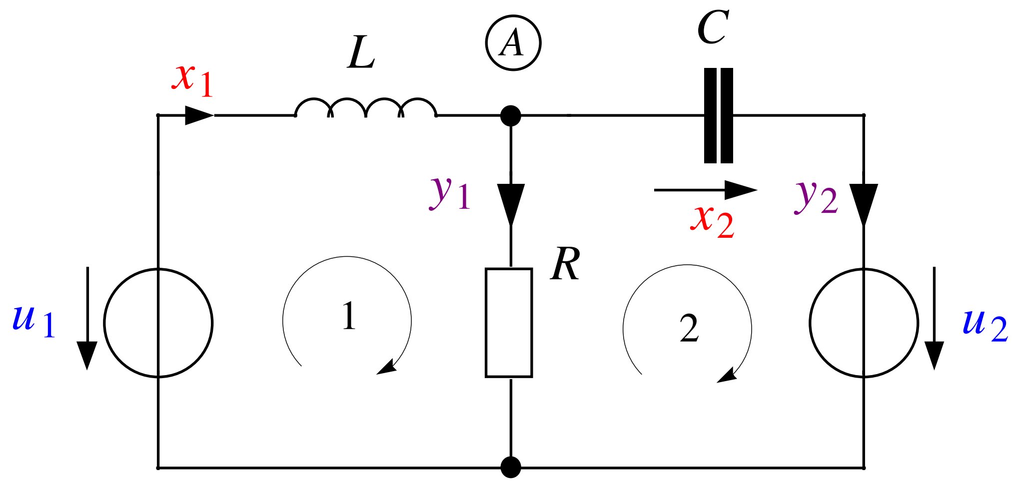
Loi d’Ohm

u = Z i

Lois de Kirchhoff

loi des mailles
loi des noeuds

Circuit RLC



2 entrées : les tensions u_1 et u_2

2 sorties : les courants y_1 et y_2

x_1 : courant dans la bobine

x_2 : tension aux bornes du condensateur

Circuit RLC (suite)

Lois de Kirchhoff

- La somme des tensions dans la boucle 1 est nulle

$$L\,\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + R y_1 - u_1 = 0$$

- La somme des tensions dans la boucle 2 est nulle

$$x_2 + u_2 - R y_1 = 0$$

- La somme des courants au noeud A est nulle

$$x_1 - y_1 - y_2 = 0$$

Condensateur

$$y_2 = C\,\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}$$

Circuit RLC (suite)

On élimine y_1 et y_2 de façon à obtenir une relation entre les entrées u_1 et u_2 et les variables d'état x_1 et x_2

$$y_1 = \frac{1}{R}(x_2 + u_2) \qquad y_2 = x_1 - \frac{1}{R}(x_2 + u_2)$$

→ équations dynamiques

$$L\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + x_2 + u_2 - u_1 = 0 \qquad C\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = x_1 - \frac{1}{R}(x_2 + u_2)$$

Circuit RLC (suite)

Sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ 0 & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R} \\ 1 & -\frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R} \\ 0 & -\frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

Systèmes électromécaniques

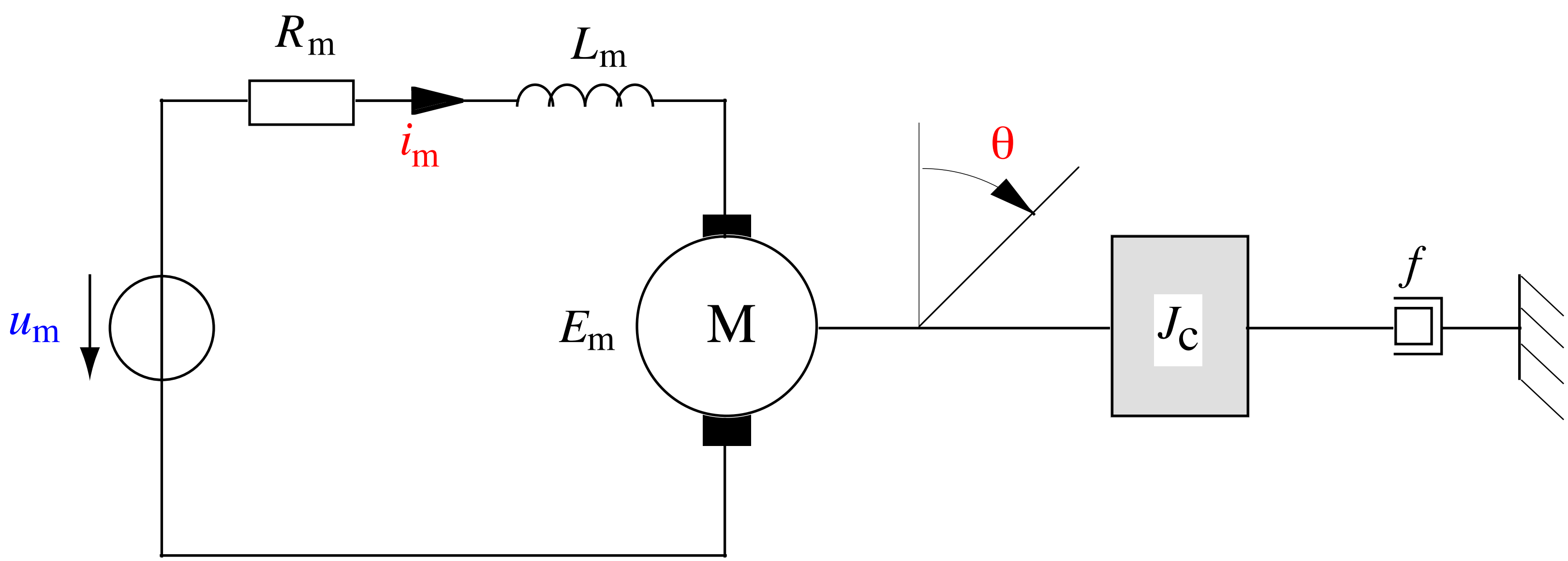
moteur électrique entraînant une charge mécanique

$$J\,\ddot{\theta}(t) \quad = \quad M_m(t) \quad - \quad f\,\dot{\theta}(t)$$

couple résultant (moteur + charge)

couple fourni par le moteur électrique

couple de frottement



Systèmes électromécaniques (suite)

Couple moteur $M_m = K_{\mathrm{m}}^{\mathrm{c}}\, i_m$

Loi de Kirchhoff $i_m R_m + L_m \dfrac{\mathrm{d}i_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t} + E_m - u_m = 0$

Tension induite $E_m = K_m^e \dot{\theta}$

Bilan de puissance

$$E_m\, i_m = M_m \dot{\theta}$$

$$(K_{\mathrm{m}}^{\mathrm{e}} \dot{\theta})\, i_{\mathrm{m}} = (K_{\mathrm{m}}^{\mathrm{c}}\, i_{\mathrm{m}})\, \dot{\theta}$$

$$K_{\mathrm{m}}^{\mathrm{e}} = K_{\mathrm{m}}^{\mathrm{c}} \equiv K_m \qquad [K_m] = Vs$$

Systèmes électromécaniques (suite)

Loi de mouvement de Newton

$$J\dot{\omega} = K_m i_m - f\omega \qquad \text{avec} \quad \omega = \dot{\theta}$$

ou

$$J\ddot{\omega} = K_m \frac{1}{L_m}\left[u_m - \frac{1}{K_m}(J\dot{\omega} + f\omega)R_m - K_m\omega\right] - f\dot{\omega}$$

ou encore

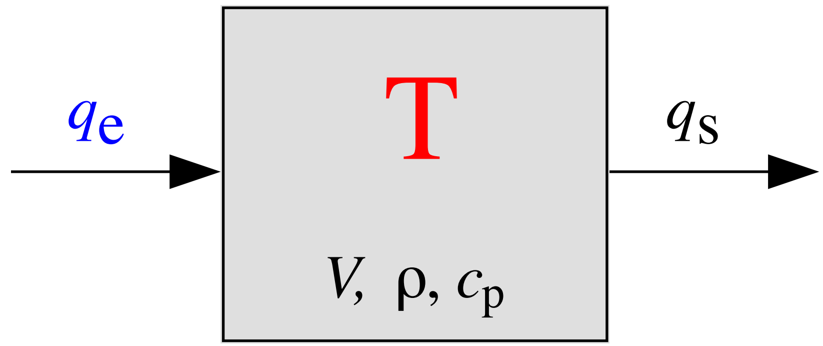
$$\tau_c\ddot{\omega} + \left(1 + \frac{\tau_c}{\tau_m}\right)\dot{\omega} + \left(\frac{1}{\tau_m} + \frac{K_m^2}{L_m f}\right)\omega = \frac{K_m}{fL_m}u_m$$

avec

$$\tau_c = \frac{J}{f}$$ constante de temps de la charge

$$\tau_m = \frac{L_m}{R_m}$$ constante de temps du moteur électrique

Systèmes thermiques



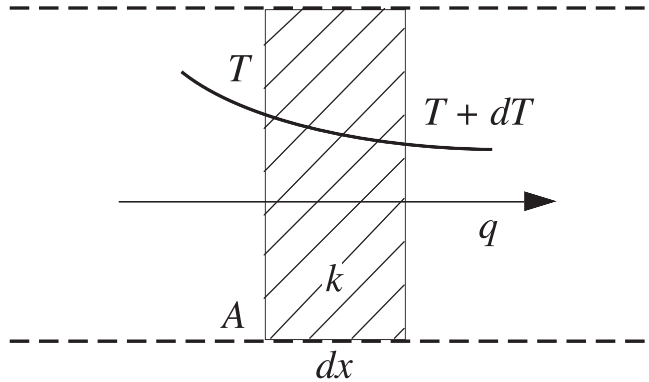
Bilan thermique

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[V\rho c_{\mathrm{p}}T(t)] = q_e(t) - q_s(t) \qquad [\mathrm{W}]$$

$$V\rho c_p \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = q_e - q_s \qquad [\mathrm{W}]$$

$$C_t = V\rho c_p \qquad \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}\right] = [\mathrm{m}^3]\left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right]\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\ K}}\right]$$ capacité thermique

Conduction thermique



Loi de Fourier

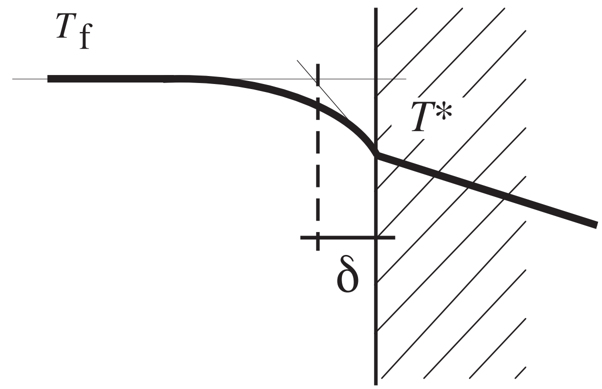
$$q = -\,kA\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$$

Relation constitutive

q : flux thermique [W]

k : conductivité thermique $\left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{mK}}\right]$

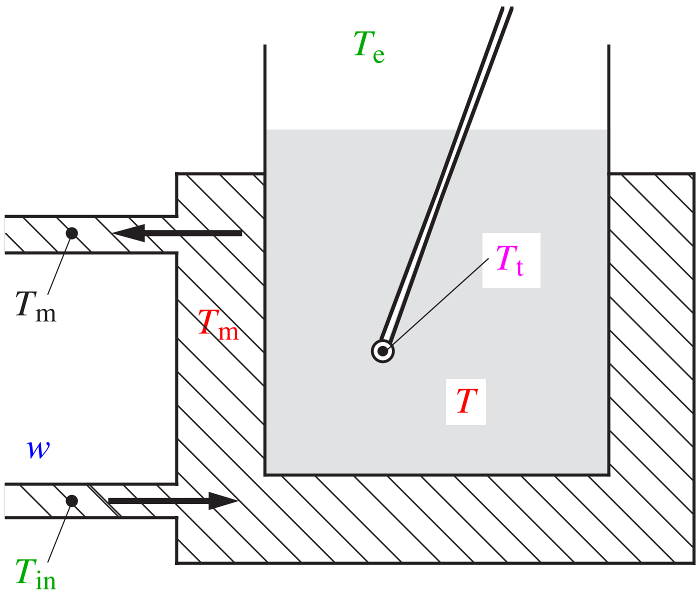
Convection thermique



$$q = -k_f A \frac{T^* - T_f}{\delta} = hA(T_f - T^*)$$

h : coefficient d'échange thermique $\left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K}}\right]$

Réservoir thermostatisé



Modèle

- réservoir (température T) :

$$V\rho c_p \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = hA(T_m - T) + h_e A_e (T_e - T) + h_t A_t (T_t - T) \qquad \text{[W]}$$

Réservoir thermostatisé

- **manteau** (température T_m) :

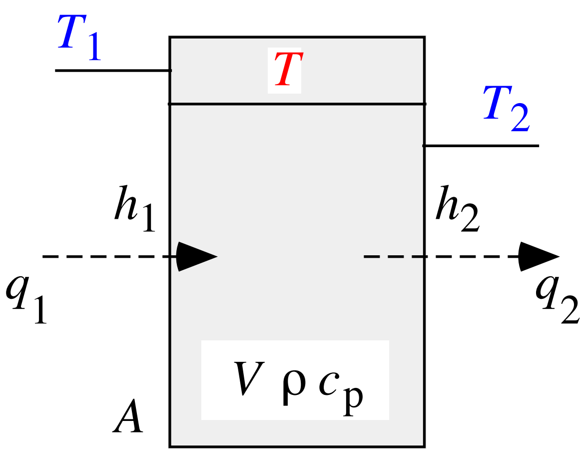
$$V_m \rho_m c_{pm} \frac{\mathrm{d}T_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t} = w c_{pm}(T_{in} - T_m) + hA(T - T_m) + h'_e\, A'_e\, (T_e - T_m) \quad [\mathrm{W}]$$

- **thermomètre** (température T_t) :

$$C_t \frac{\mathrm{d}T_\mathrm{t}}{\mathrm{d}t} = h_t A_t (T - T_t) \quad [\mathrm{W}]$$

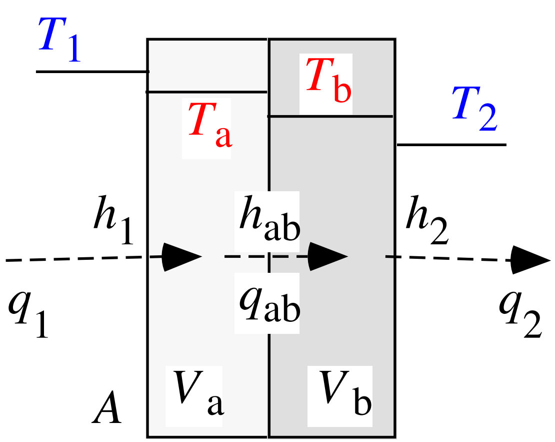
Systèmes à paramètres répartis

a)



$$V\rho c_p \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = q_1 - q_2 = h_1 A(T_1 - T) - h_2 A(T - T_2)$$

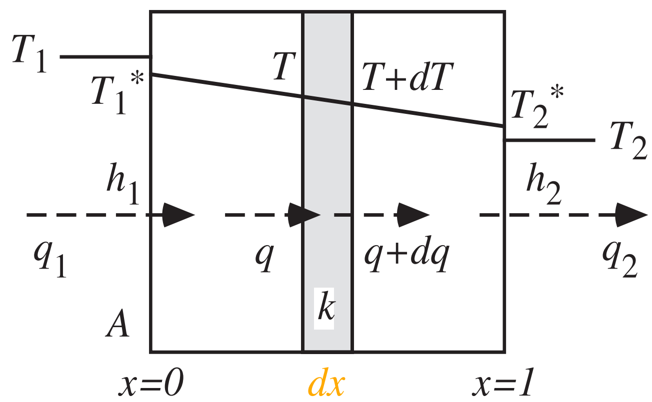
b)



$$V_a \rho c_p \frac{\mathrm{d}T_a}{\mathrm{d}t} = q_1 - q_{ab} = h_1 A(T_1 - T_a) - h_{ab} A(T_a - T_b)$$

$$V_b \rho c_p \frac{\mathrm{d}T_b}{\mathrm{d}t} = q_{ab} - q_2 = h_{ab} A(T_a - T_b) - h_2 A(T_b - T_2)$$

Systèmes à paramètres répartis (suite)



$$(Adx)\rho c_p \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = q - (q + dq) = -kA\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} - \left[-kA\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(T + \mathrm{d}T)\right]$$

$$\rho c_p \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = k\frac{\mathrm{d}(T + \mathrm{d}T)/\mathrm{d}x - \mathrm{d}T/\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}$$

Pour dx $\longrightarrow 0$: $$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c_\mathrm{p}}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Equation différentielle partielle pour T(x,t)

Systèmes à paramètres répartis (suite)

Condition initiale

$$t = 0 : \qquad T(x, 0) = T_0(x)$$

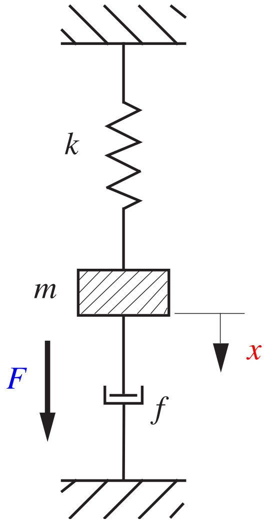
Conditions aux limites

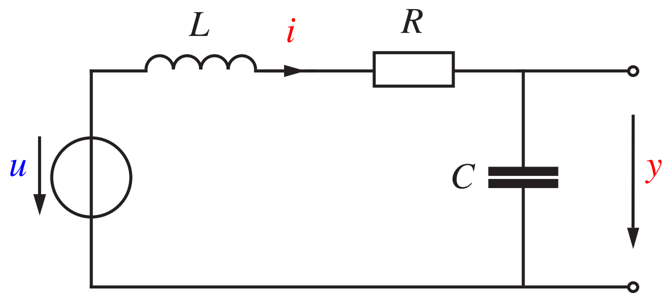
$$x = 0 : \qquad h_1 \left[T_1(t) - T(0, t)\right] = -k \left.\frac{\partial T(x, t)}{\partial x}\right|_{x = 0}$$

$$x = 1 : \qquad -k \left.\frac{\partial T(x, t)}{\partial x}\right|_{x = 1} = h_2 \left[T(1, t) - T_2(t)\right]$$

Approximation d'un système à paramètres répartis par un système à paramètres localisés

Systèmes analogues





Loi de mouvement de Newton

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) - f\dot{x}(t) + F(t)$$

$$m\ddot{x}(t) + f\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$

Loi de Kirchhoff

$$L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + Ri(t) + y(t) - u(t) = 0$$

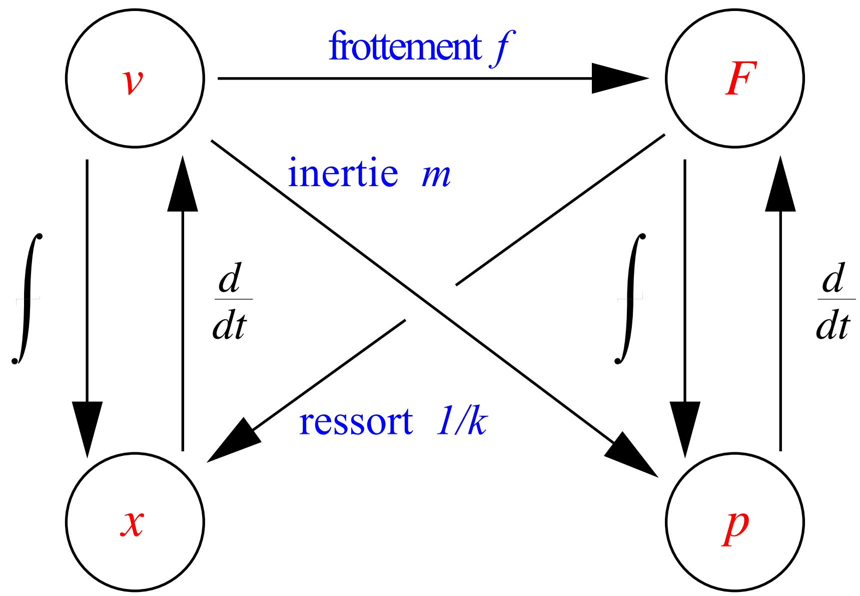
$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{dq(t)}{dt} \qquad q(t) = Cy(t)$$

$$L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = u(t)$$

conditions initiales

$x(0) = 0$	x_0	$q(0) = 0$	q_0
$\dot{x}(0) = 0$	v_0	$\dot{q}(0) = 0$	i_0

Syst¯mes m®caniques

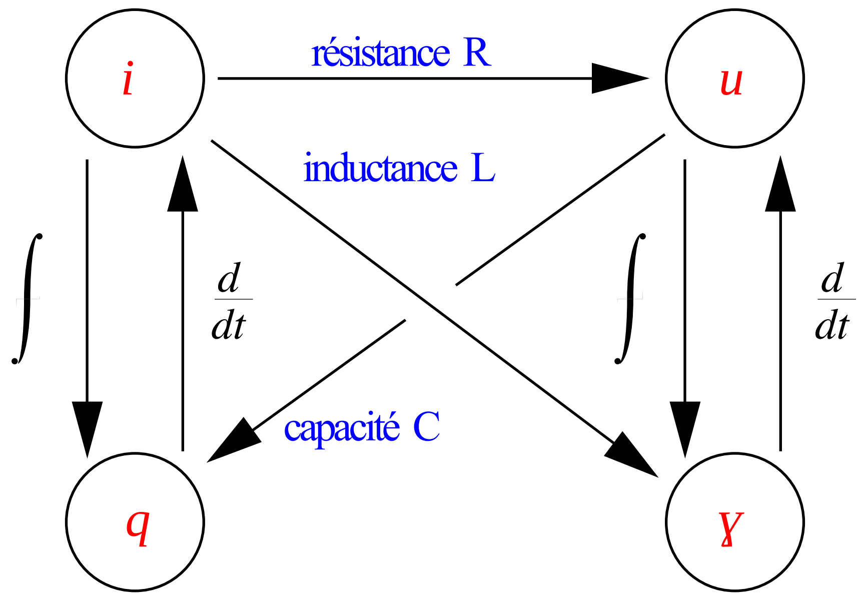


Elément disspatif : f $\longrightarrow$ Puissance dissipative : $P_R = Fv = fv^2$

Elément capacitif : 1/k $\longrightarrow$ Energie capacitive : $E_C = 0.5\ kx^2$

Elément inductif : m $\longrightarrow$ Energie inductive : $E_I = 0.5\ mv^2$

Systèmes électriques

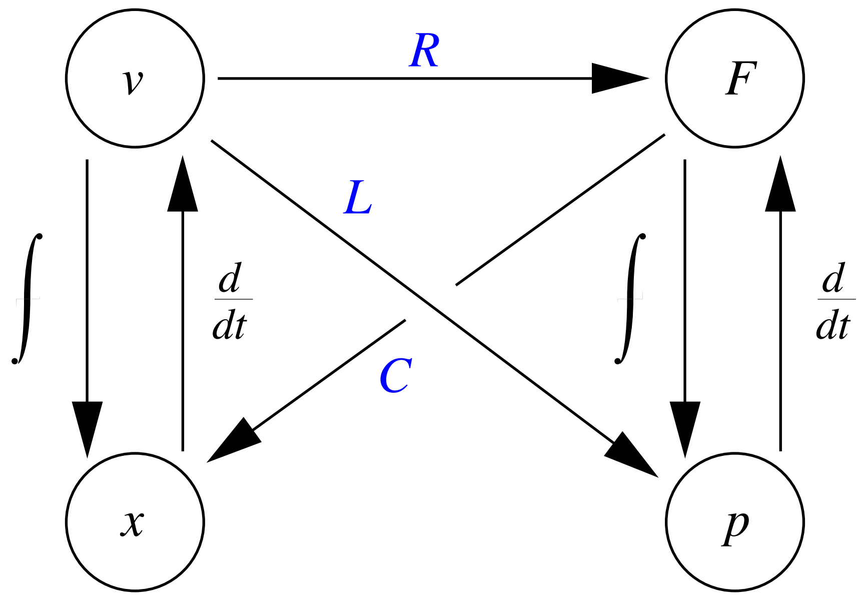


Elément disspatif : R $\longrightarrow$ Puissance dissipative : $P_R = Fv = Rv^2 = \frac{F^2}{R}$

Elément capacitif : C $\longrightarrow$ Energie capacitive : $E_C = \frac{C}{2}\, F^2$

Elément inductif : L $\longrightarrow$ Energie inductive : $E_I = \frac{L}{2}\, v^2$

Variables généralisées



Elément disspatif : R $\longrightarrow$ Puissance dissipative : $P_R = Fv = Rv^2 = \dfrac{F^2}{R}$

Elément capacitif : C $\longrightarrow$ Energie capacitive : $E_C = \dfrac{C}{2}\, F^2$

Elément inductif : L $\longrightarrow$ Energie inductive : $E_I = \dfrac{L}{2}\, v^2$

Système	Force **F**	Vitesse **v**	Quantité mouvement **p = F dt**	Déplacement **x = v dt**	Eléments **R** **F = R v**	 **C** **x = C F**	 **L** **p = L v**	Grandeur conservée	Variables d'état typiques
translation mécanique	force F [N]	vitesse $v \left[\frac{m}{s}\right]$	quantité de mouvement p [Ns]	position x [m]	frottement visqueux $F_f = - f\ v$ $R_m = f$	ressort $F_r = - k\ x$ $C_m = \frac{1}{k}$	inertie $\Sigma F = m\ \frac{dv}{dt}$ $L_m = m$	quantité de mouvement p = mv	x, v $(x, \dot{x})$
rotation mécanique	couple M [Nm]	vitesse angulaire $\omega \left[\frac{rad}{s}\right]$	quantité de mouvement angulaire h [Nms]	position angulaire θ [rad]	frottement visqueux $M_f = -\ f\omega$ $R_m = f$	ressort $M_r = - k\ \theta$ $C_m = \frac{1}{k}$	inertie $\Sigma M = J\ \frac{d\omega}{dt}$ $L_m = J$	quantité de mouvement $h = J\omega$	θ, ω $(\theta, \dot{\theta})$
électrique	tension u [V]	courant i [A]	flux Ψ [Wb]	charge q [C]	résistance u = R i $R_e = R$	condensateur q = C u $C_e = C$	inductance $u = L\ \frac{di}{dt}$ $L_e = L$	flux magnétique $\psi = Li$ charge électrique q = Cu	u, i $(q, \dot{q})$
thermique	différence de température ΔT [K]	flux thermique q [W]	-	énergie Q [J]	échange thermique $q = hA\ \Delta T$ $R_t = \frac{1}{hA}$	accumulation thermique $V\rho\ c_p\ \frac{dT}{dt} = \Sigma q$ $C_t = V\rho\ c_p$	–	énergie Q	T
fluidique (hydraulique, pneumatique)	différence de pression Δp [Pa]	débit volumique $q \left[\frac{m^3}{s}\right]$	moment de pression $\Gamma \left[\frac{Ns}{m^2}\right]$	volume V [m^3]	orifice (linéarisé) $q = \frac{1}{R_f}\Delta p$ $R_f = \frac{\rho\sqrt{2g\bar{h}}}{C_v\ A_0}$	accumulation de fluide $C_f\ \frac{dp}{dt} = \Sigma q$ $C_f = V\ \frac{d \ln \rho}{dp}$	transport dans tube $\Delta p = L_f\ \frac{dq}{dt}$ $L_f = \frac{\rho L}{S}$	masse $m = \rho V$	V, p

Analogie mécanique / électrique

$$f \leftrightarrow R \qquad \frac{1}{k} \leftrightarrow C \qquad m \leftrightarrow L$$

1 application de la loi
de mouvement de Newton

1 boucle électrique
avec inductance

Tableau 2.3 Lois d'arrangements en série de deux éléments mécaniques et électriques.

Elément	Mécanique	Electrique
Résistif	$\frac{1}{f_t} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$	$R_t = R_1 + R_2$
Capacitif	$\frac{1}{k_t} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$	$\frac{1}{C_t} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$
Inductif	$m_t = m_1 + m_2$	$L_t = L_1 + L_2$

Masses en séries $\longleftrightarrow$ Inductances en série

Ressorts en série $\longleftrightarrow$ Capacités en parallèle

Frottements en série $\longleftrightarrow$ Résistances en parallèle