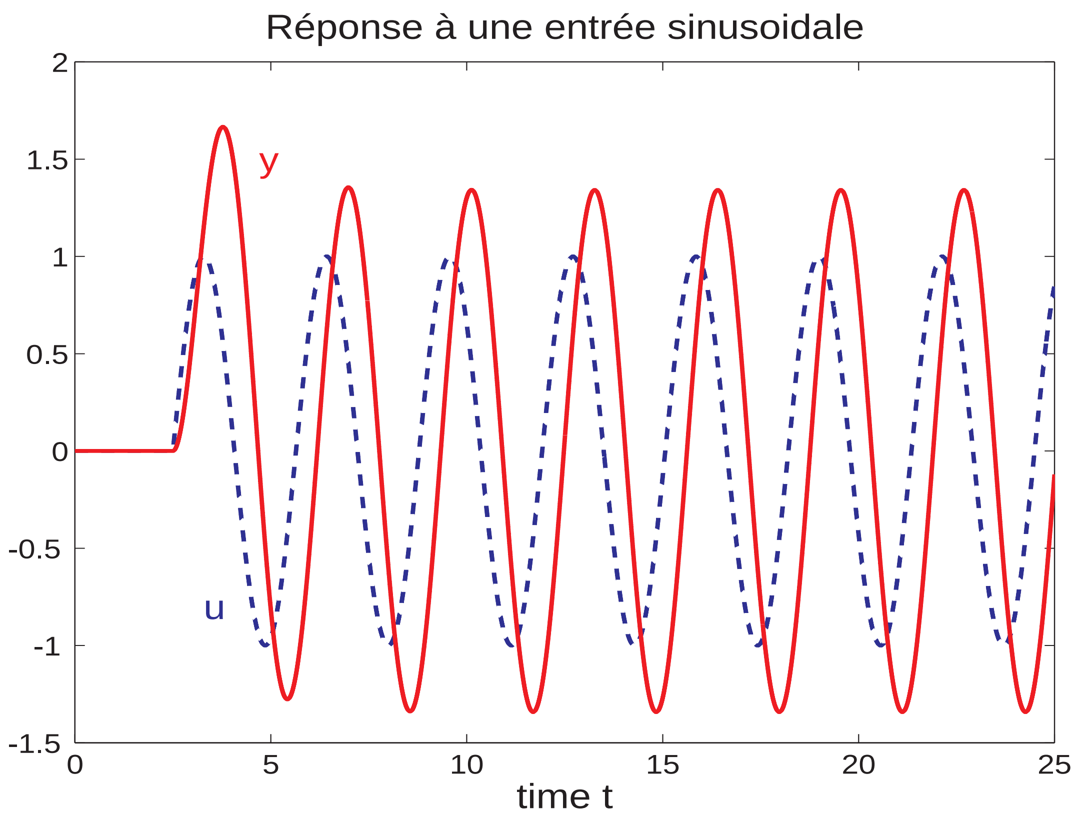
Réponse harmonique



La **réponse harmonique** est la réponse en régime permanent d'un système dynamique excité par une sinusoïde de pulsation donnée. Le terme transitoire de la réponse est donc négligé

Système du premier ordre

$$U(s) \longrightarrow \boxed{\frac{K}{\tau s + 1}} \longrightarrow Y(s)$$

$$u(t) = A \sin(\omega t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\Big\downarrow \quad \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}$$

$$y(t) \xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}} Y(s) = \frac{KA\omega}{(\tau s + 1)(s^2 + \omega^2)} = \frac{\alpha_1}{\tau s + 1} + \frac{\alpha_2 s + \alpha_3}{s^2 + \omega^2}$$

Système du premier ordre (suite)

$$Y(s) = \frac{KA}{1+\tau^2\omega^2}\left[\frac{\omega\tau^2}{\tau s+1} - \frac{\omega\tau s}{s^2+\omega^2} + \frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right]$$

$$y(t) = \frac{KA}{1+\tau^2\omega^2}\left[\omega\tau\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - \omega\tau\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\right]$$

$$y(t) = \underbrace{\left(\frac{KA\omega\tau}{1+\tau^2\omega^2}\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}_{\text{régime transitoire}} + \underbrace{\left(\frac{KA}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}\right)\sin(\omega t+\varphi)}_{\text{régime permanent}}$$

Avec $\varphi = \arctan(-\tau\omega) = -\arctan(\tau\omega)$

a $\sin(\omega t) + b\cos(\omega t) = \mathrm{sqrt}(a^2+b^2)\sin(\omega t+\phi)$

$\phi = \arctan(b/a)$ si $a > 0$

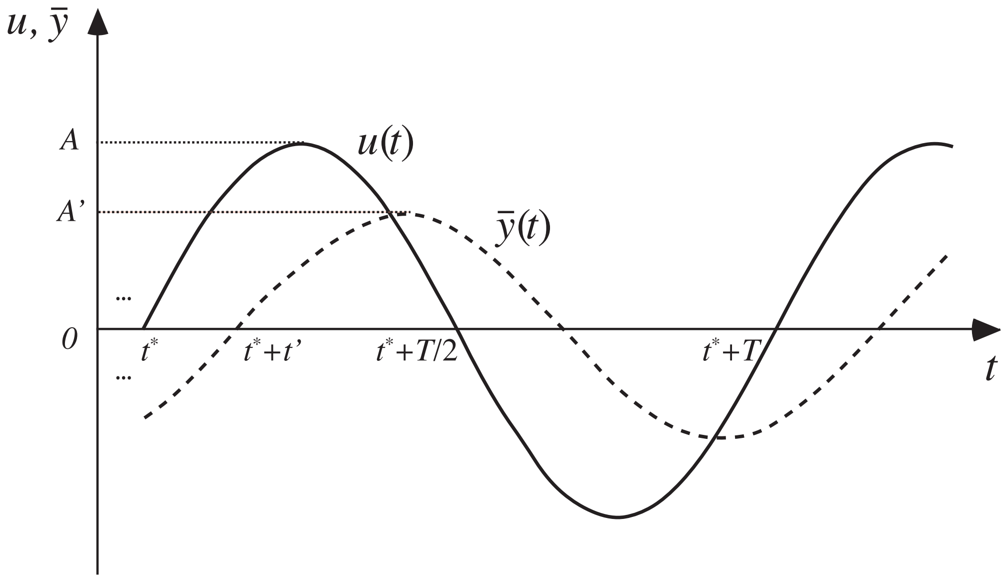
Système du premier ordre (suite)

En **régime permanent**

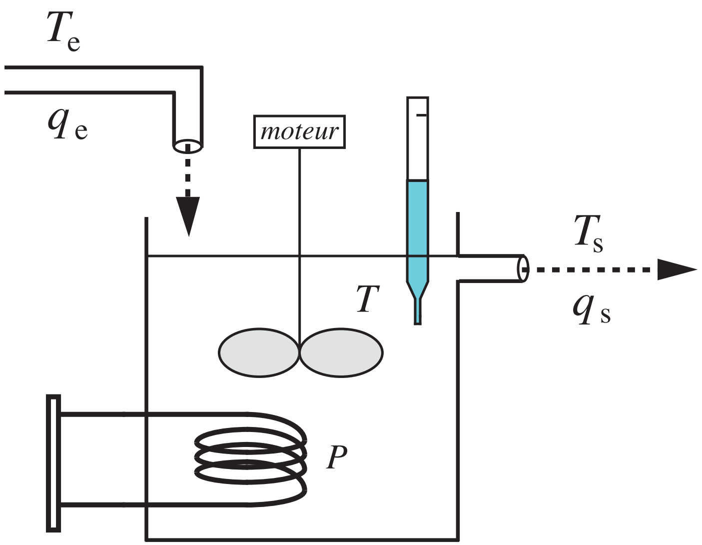
$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \bar{y}(t) = \frac{KA}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}} \sin(\omega t + \varphi)$$

- amplitude A’ différente de celle du signal d’excitation $R_A = A' / A$
- même pulsation
- déphasage $\varphi = -\omega t'$

$$\sin(\omega t + \varphi) = \sin[\omega(t - t')]$$



Comportement thermique d'une cuve



$V = 1 \text{ m}^3$

$q = 0.05 \text{ m}^3/\text{min}$

$\bar{T}_{\text{désiré}} = 20°\text{C}$ T_e

$\bar{=}\ 10°\text{C}$

$\bar{P} = 35 \text{ kW}$

$$\frac{T(s)}{P(s)} = \frac{0.29[°\text{C/kW}]}{20s + 1}$$

Excitations sinusoïdales

$P(t) = 10 \sin(0.01\, t)$ [kW] $\quad \bar{T}(t) = 2.84 \sin(0.01t - 0.197) = 2.84 \sin [0.01(t - 19.7)]$ [°C]

$P(t) = 10 \sin(t)$ [kW] $\quad \bar{T}(t) = 0.14 \sin(t - 1.52)$ [°C]

Système du deuxième ordre

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

$$u(t) = A\sin(\omega t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{KA\omega}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)(s^2 + \omega^2)}$$

$$= \frac{\alpha}{\tau_1 s + 1} + \frac{\beta}{\tau_2 s + 1} + \frac{\gamma s + \delta}{s^2 + \omega^2}$$

Système du deuxième ordre (suite)

Régime permanent $\bar{Y}(s) = \dfrac{\gamma s + \delta}{s^2 + \omega^2}$

travail avec nombres complexes

En décomposant $\bar{Y}(s)$ via la méthode des résidus

$$A\omega\left[\frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}\right]_{s = j\omega} = (\gamma s + \delta)_{s = j\omega} = \delta + j\omega\gamma$$

avec $\left[\dfrac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}\right]_{s = j\omega} = R + jI$

$A\,\omega\,R = \delta$

$A\,\omega\,I = \omega\,\gamma$

Finalement $\bar{Y}(s) = \dfrac{\gamma s + \delta}{s^2 + \omega^2} = \dfrac{AIs}{s^2 + \omega^2} + \dfrac{A\omega R}{s^2 + \omega^2}$

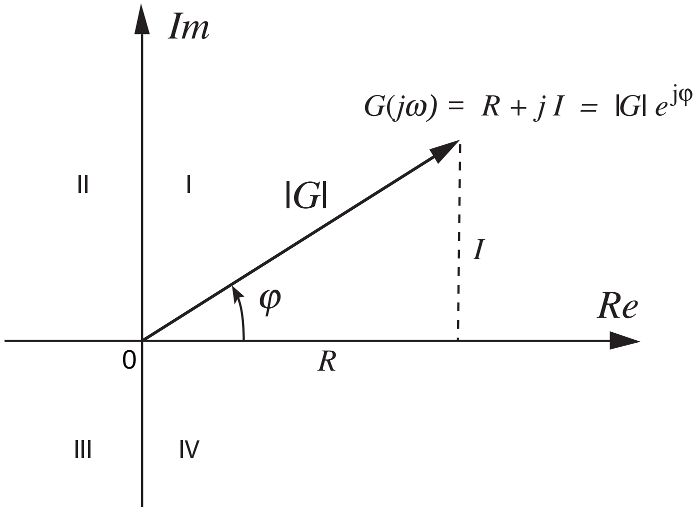
$\bar{y}(t) = A\,[I\,\cos(\omega t) + R\,\sin(\omega t)]$

$$\bar{y}(t) = A\sqrt{R^2 + I^2}\sin(\omega t + \varphi) \qquad \text{avec } \varphi = \arctan\left(\frac{I}{R}\right) \text{ si } R > 0$$

$$= A|G(j\omega)|\sin(\omega t + \varphi) \qquad \varphi = \arg\{G(j\omega)\}$$

Calcul de la réponse harmonique

Première généralisation



$$R_A = |G(j\omega)| = \frac{A'}{A} = \sqrt{R^2 + I^2}$$

$$\varphi = \arg[G(j\omega)] = \begin{cases} \arctan\left(\frac{I}{R}\right) & \text{si } R > 0 \\ \arctan\left(\frac{I}{R}\right) \pm \pi & \text{si } R \leq 0 \end{cases}$$

Procédure

1) Remplacer **s** par **jω** dans G(s)
2) Exprimer **G(jω)** sous la forme **R + jI**
3) Calculer $R_A = \sqrt{R^2 + I^2}$ et $\varphi = \arctan(I/R)$ ou $\varphi = \arctan(I/R) \pm \pi$

Calcul de la réponse harmonique (suite)

Deuxième généralisation

$$z_1 = a_1 + jb_1$$

$$z_2 = a_2 + jb_2 \qquad\qquad z = \frac{z_1 z_2}{z_3}$$

$$z_3 = a_3 + jb_3$$

$$|z| = \frac{|z_1||z_2|}{|z_3|} \qquad\qquad \arg(z) = \arg(z_1) + \arg(z_2) - \arg(z_3)$$

Exemple

$$G(s) = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

$$R_A = \frac{|K|}{|j\tau_1\omega + 1||j\tau_2\omega + 1|} = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau_1^2\omega^2}\sqrt{1 + \tau_2^2\omega^2}}$$

$$\varphi = \arg(K) - \arg(j\tau_1\omega + 1) - \arg(j\tau_2\omega + 1) = 0 - \arctan(\tau_1\omega) - \arctan(\tau_2\omega)$$

Diagramme de Bode

Diagramme d'amplitude : représentation log - log du rapport d'amplitude $\mathbf{R_A}$ en fonction de la pulsation $\boldsymbol{\omega}$

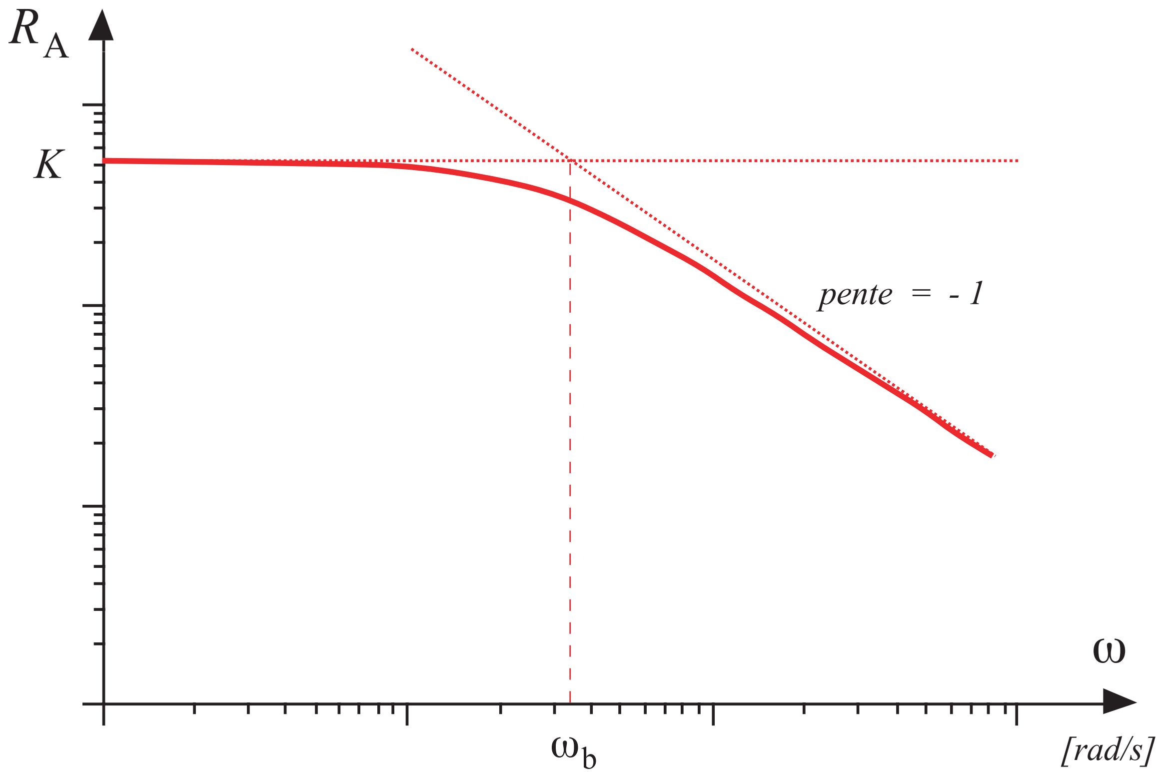
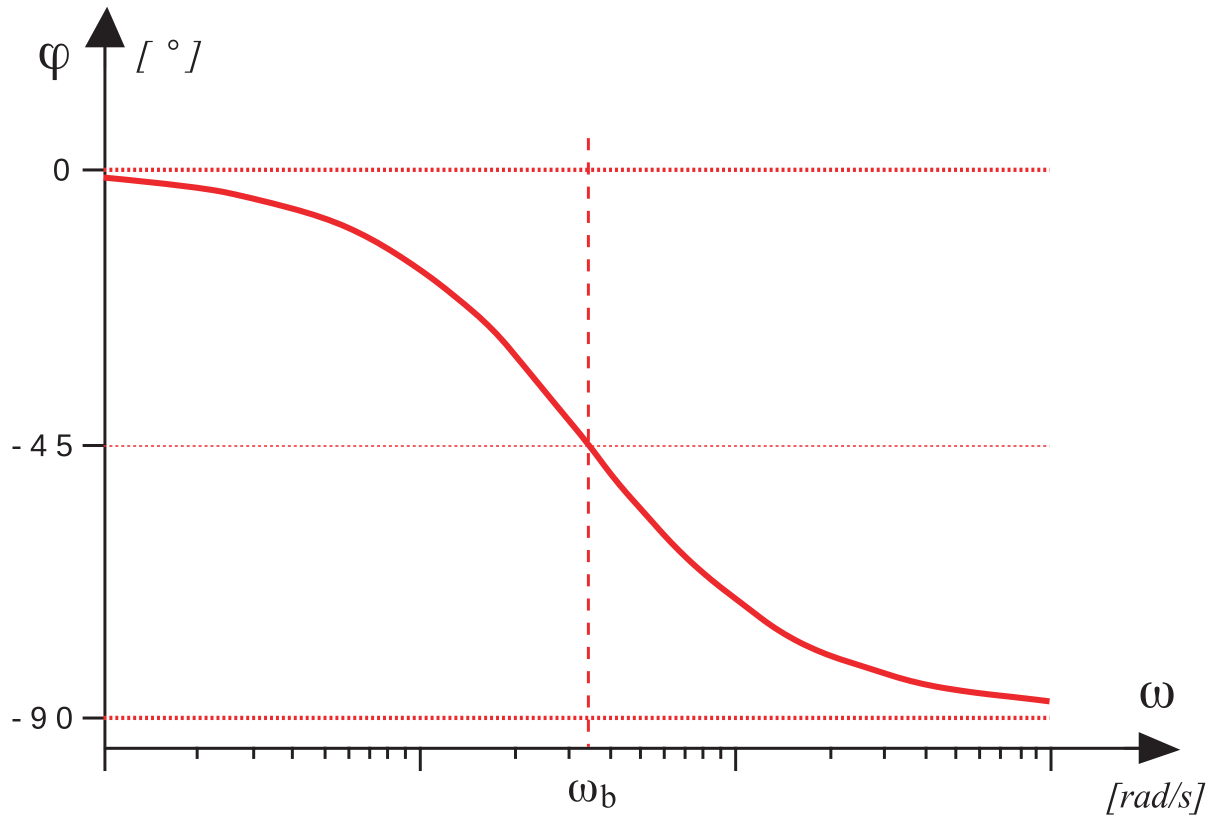


Diagramme de Bode

Diagramme de phase : représentation semi - log du déphasage **φ** en fonction de la pulsation **ω**



Système du premier ordre

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \qquad p = -\frac{1}{\tau}$$

A) Diagramme d'amplitude $\quad R_A = \frac{A'}{A} = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}}$

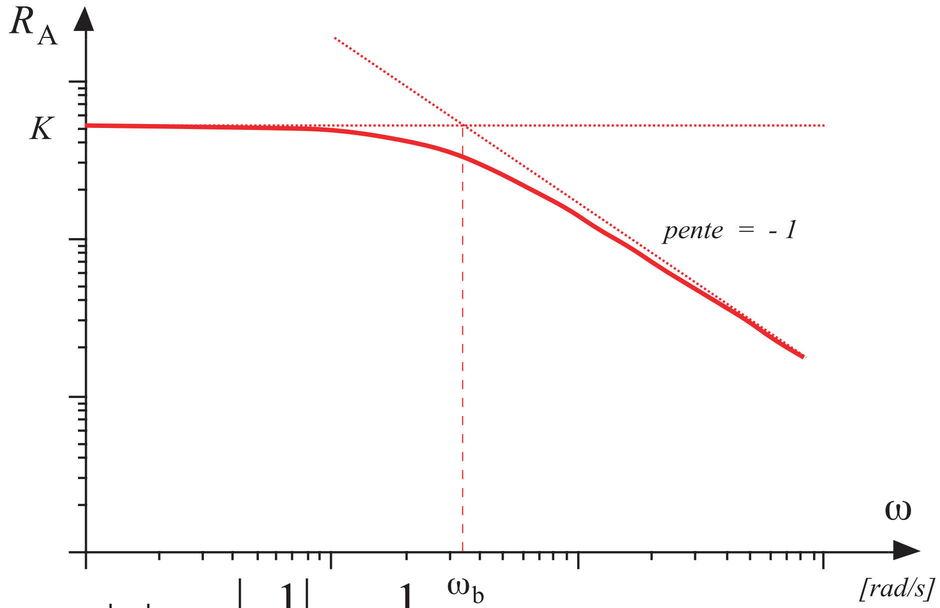
Calcul des asymptotes

a) si $\tau\omega << 1$, alors $R_A \to K$

ou $\log(R_A) \to \log(K)$

b) si $\tau\omega >> 1$, alors $R_A \to K/\tau\omega$

ou $\log(R_A) \to \log(K) - \log(\tau\omega)$



$$\omega_b = |p| = \left|-\frac{1}{\tau}\right| = \frac{1}{\tau}$$

$$\log(R_A) \to \log(K) - \log(\tau\omega)$$

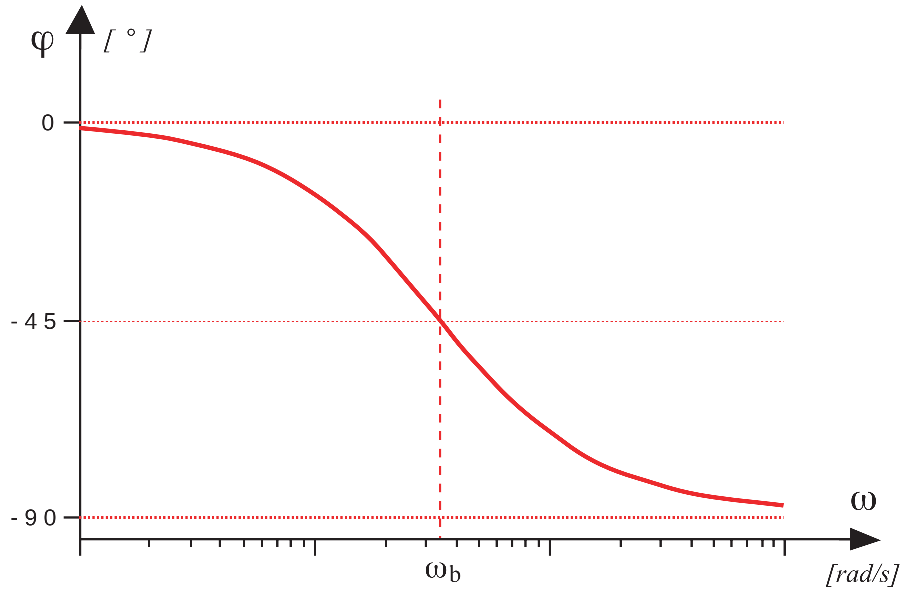
$\log(K/\tau) - \log(\omega)$

Système du premier ordre

B) Diagramme de phase $\varphi = -\arctan(\tau\omega)$

Calcul des asymptotes

a) si $\omega \to 0$, alors $\varphi \to 0$ (asymptote horizontale)
b) si $\omega \to \infty$, alors $\varphi \to -\pi/2$ (asymptote horizontale)



$$\omega_b = \frac{1}{\tau} \qquad R_A(\omega_b) = \frac{K}{\sqrt{2}} \qquad \varphi(\omega_b) = -45°$$

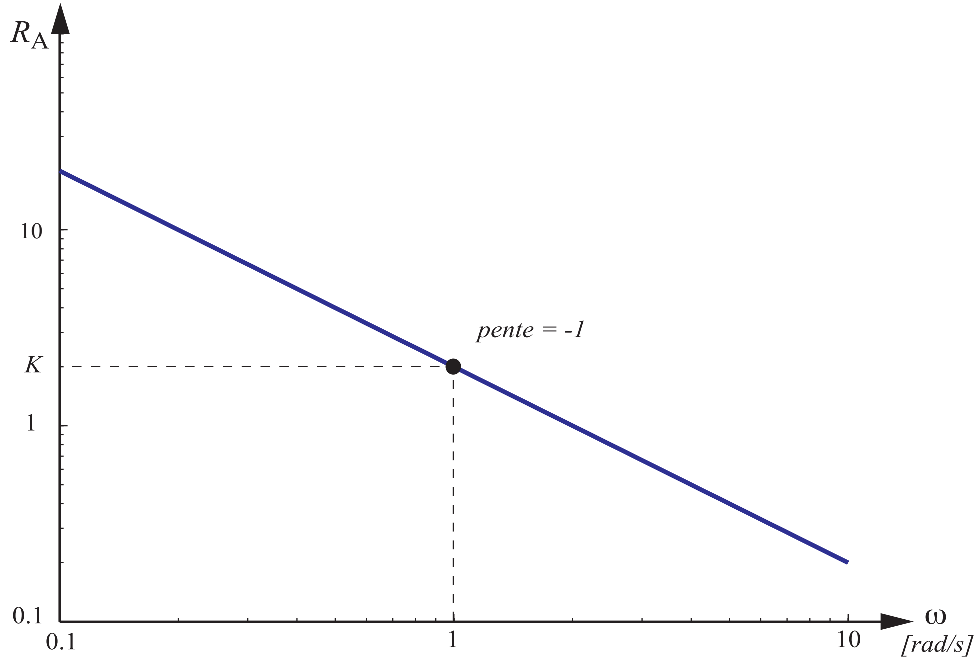
Système intégrateur

$$G(s) = \frac{K}{s} \qquad \text{p} = 0$$

$G(j\omega) = -j\ K/\omega$

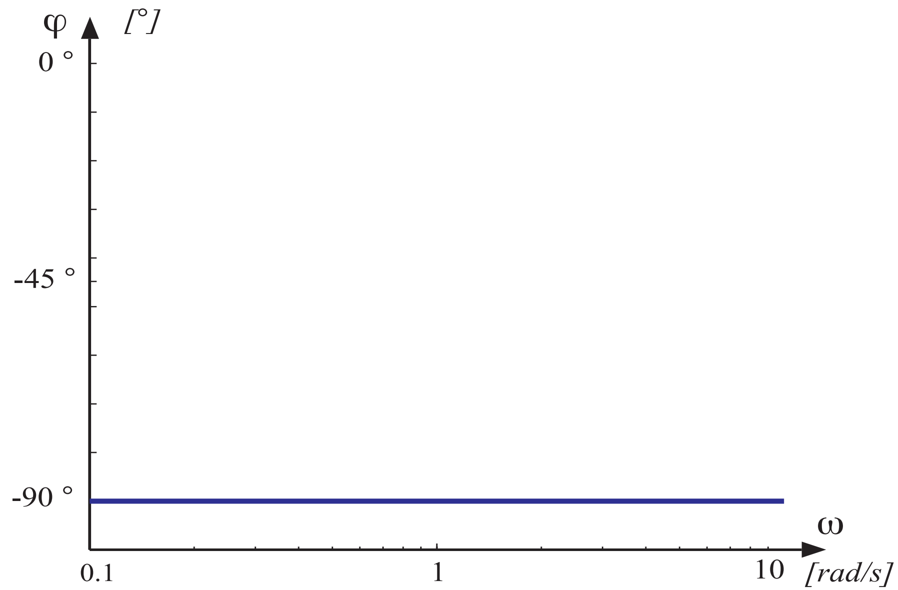
A) Diagramme d'amplitude $R_A = \frac{A'}{A} = |G(j\omega)| = \frac{K}{\omega}$

$$\log(R_A) = \log(K) - \log(\omega)$$



Système intégrateur

B) Diagramme de phase $\varphi = \arg[G(j\omega)] = -\arg\left(j\dfrac{K}{\omega}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$



Système du deuxième ordre

$$G(s) = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \quad \text{avec} \quad \tau_1 \geq \tau_2$$

A) Diagramme d'amplitude

Calcul des asymptotes

1) si $\tau_1\omega << 1$ *et* $\tau_2\omega << 1$, alors $\log(R_A) \to \log(K)$
   asymptote horizontale passant par K à basses fréquences

   R_A --> K

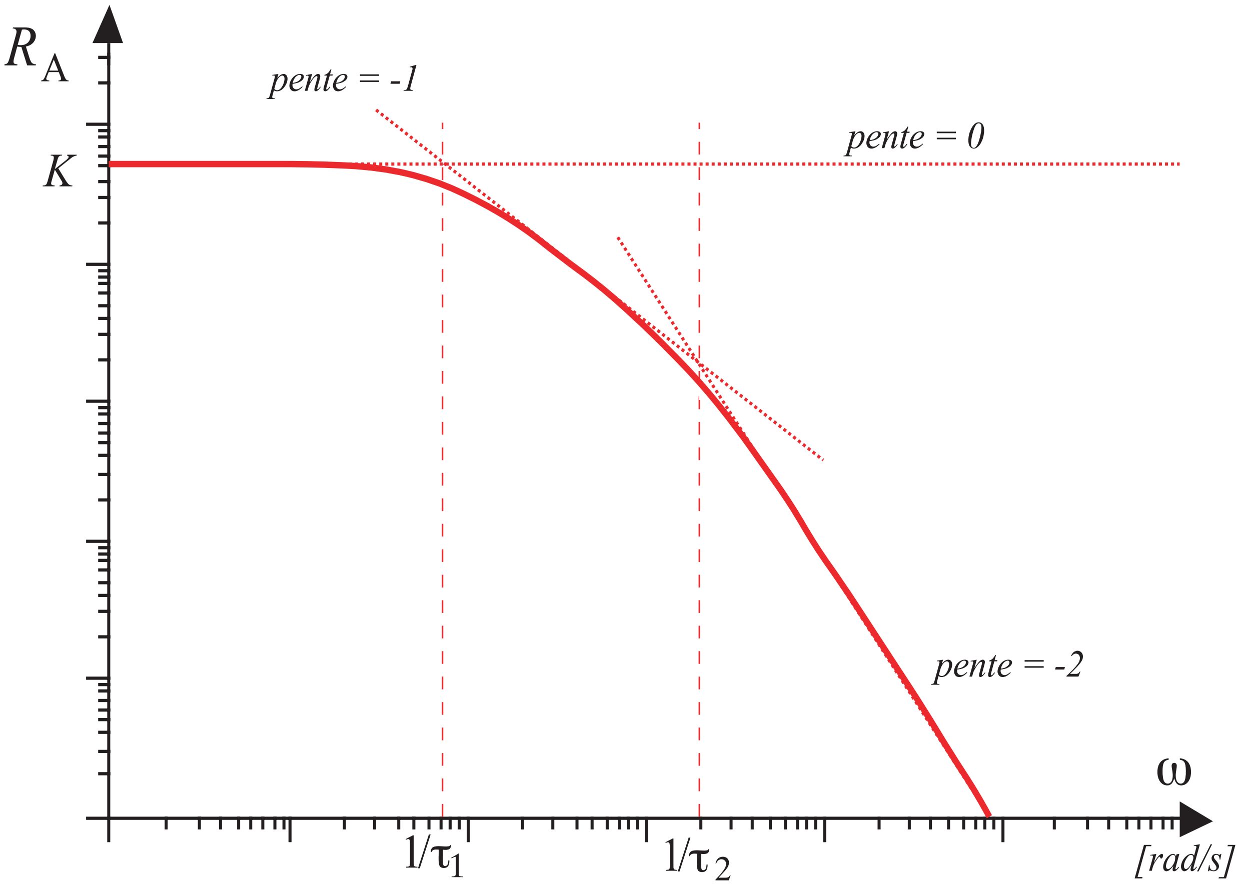
2) si $\tau_1\omega >> 1$ *et* $\tau_2\omega << 1$, alors $\log(R_A) \to \log(K) - \log(\tau_1\omega)$
   asymptote de pente –1 passant par K pour $\tau_1\omega = 1$

   R_A --> $K/(\tau_1\ \omega)$

3) si $\tau_1\omega >> 1$ *et* $\tau_2\omega >> 1$, alors $\log(R_A) \to \log(K) - \log(\tau_1\omega) - \log(\tau_2\omega)$
   asymptote hautes fréquences de pente –2 passant par $K/\tau_1\omega$ pour $\tau_2\omega = 1$

   R_A --> $K/(\tau_1\tau_2\ \omega^2)$

Système du deuxième ordre (suite)

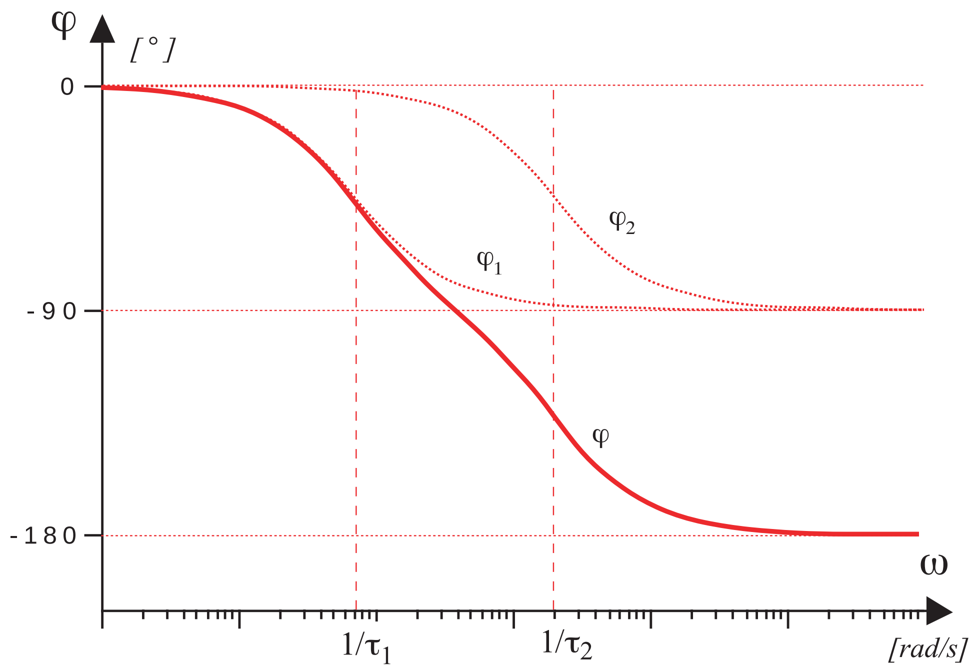


Système du deuxième ordre (suite)

B) Diagramme de phase

$$\varphi = -\arctan(\tau_1 \omega) - \arctan(\tau_2 \omega)$$

1) si $\omega \to 0$, alors $\varphi \to 0$ (asymptote horizontale)
2) si $\omega \to \infty$, alors $\varphi \to -\pi/2 - \pi/2 = -\pi$ (asymptote horizontale)



Système du deuxième ordre (suite)

$$G(s) = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\tau\zeta s + 1}$$

$$G(j\omega) = \frac{K}{(1 - \tau^2\omega^2) + j2\tau\zeta\omega}$$

$$R_{\mathrm{A}} = |G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{(1 - \tau^2\omega^2)^2 + (2\tau\zeta\omega)^2}}$$

$$\varphi = \arg[G(j\omega)] = -\arctan\left(\frac{2\tau\zeta\omega}{1 - \tau^2\omega^2}\right)$$

Système du deuxième ordre (suite)

Calcul des asymptotes

1) pour $\tau\omega << 1$, on a:

$R_A \rightarrow K$ ou $\log(R_A) = \log(K)$
(asymptote horizontale passant par K)

et $\varphi \rightarrow 0$

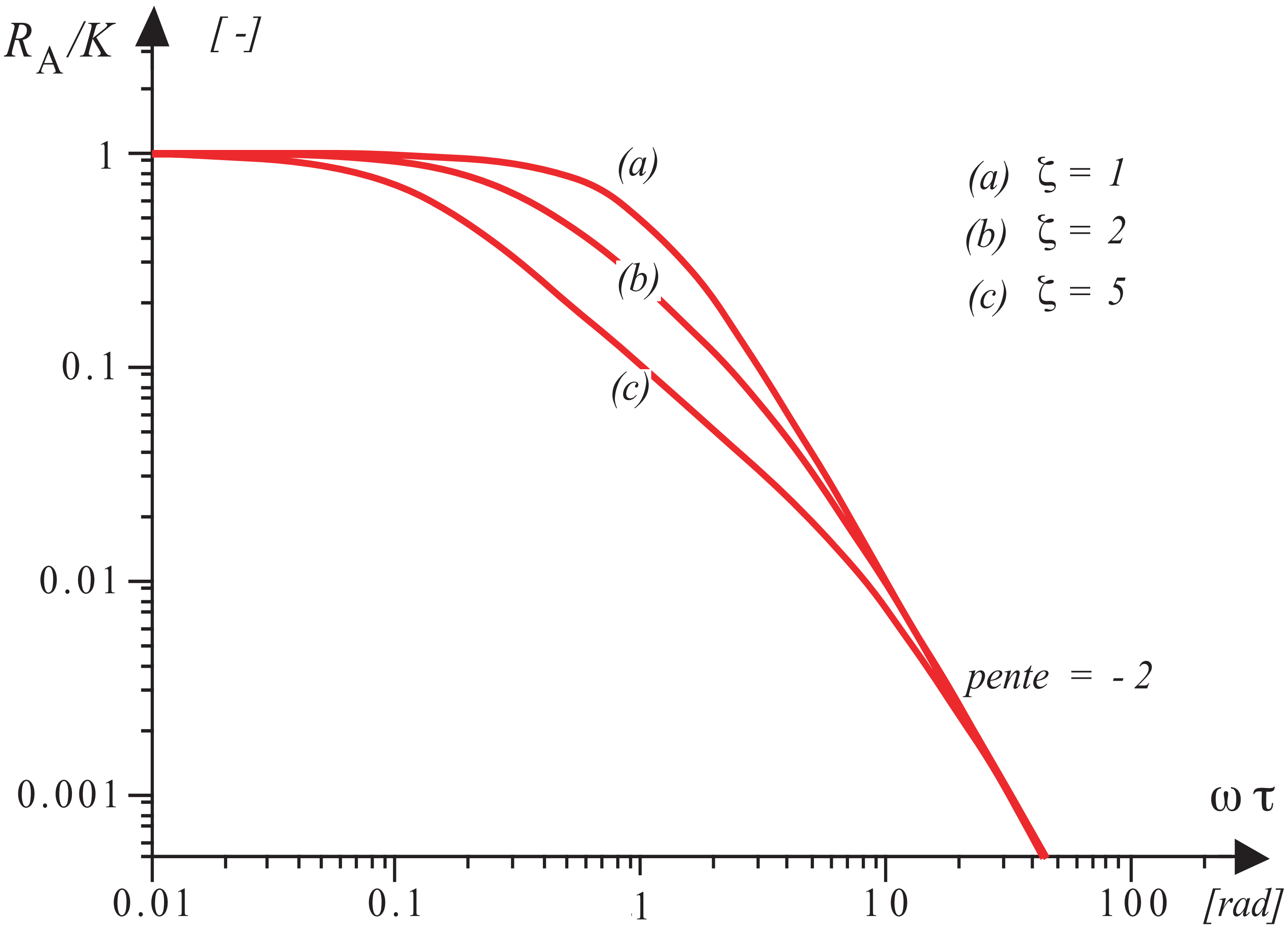
2) pour $\tau\omega >> 1$, on a:

$$R_A \rightarrow \frac{K}{(\tau\omega)^2} \quad \text{et} \quad \log(R_A) = \log(K) - 2\log(\tau\omega)$$

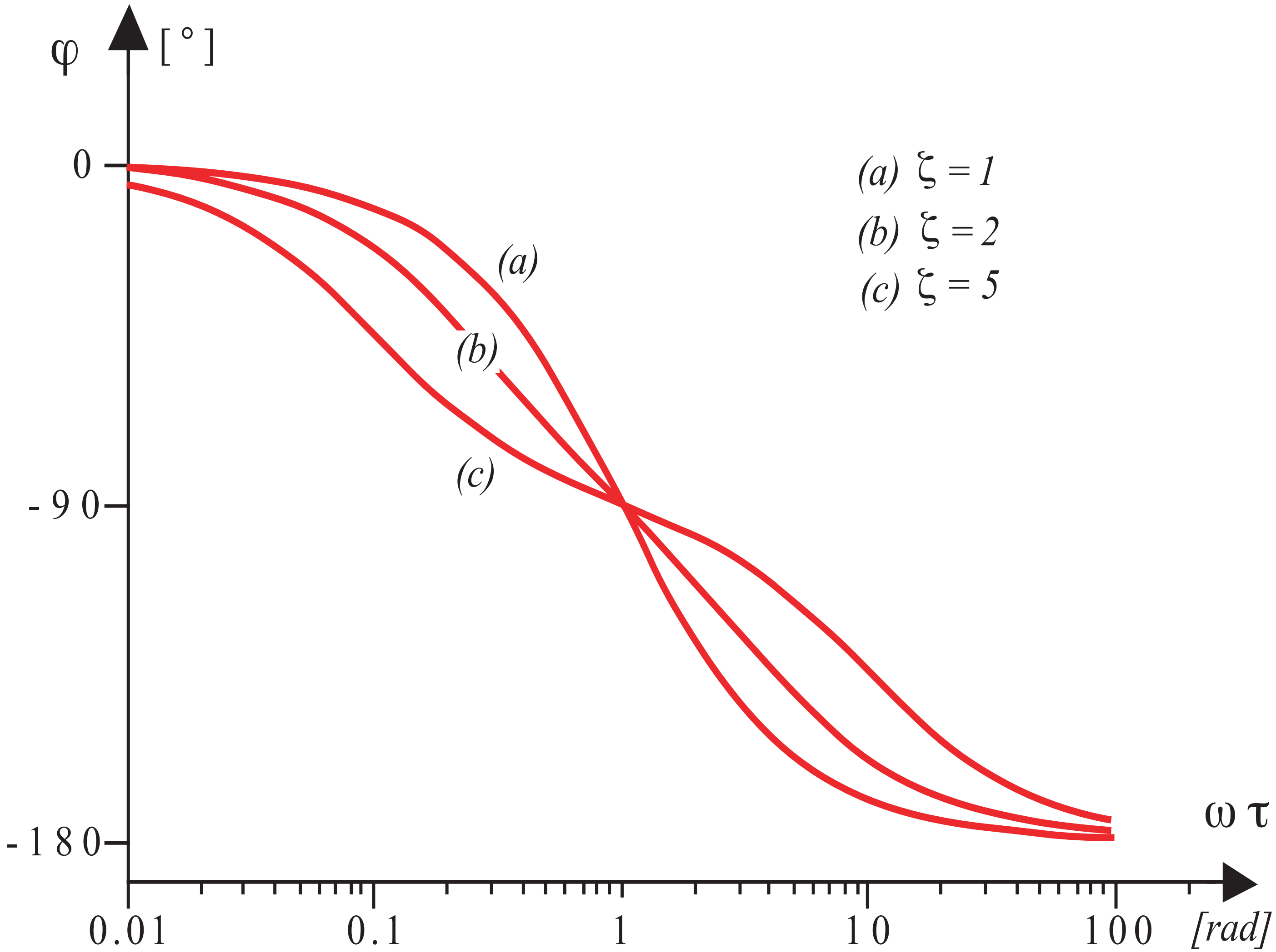
(asymptote de pente –2 passant par K pour $\tau\omega = 1$)

et $\varphi \rightarrow -\pi$

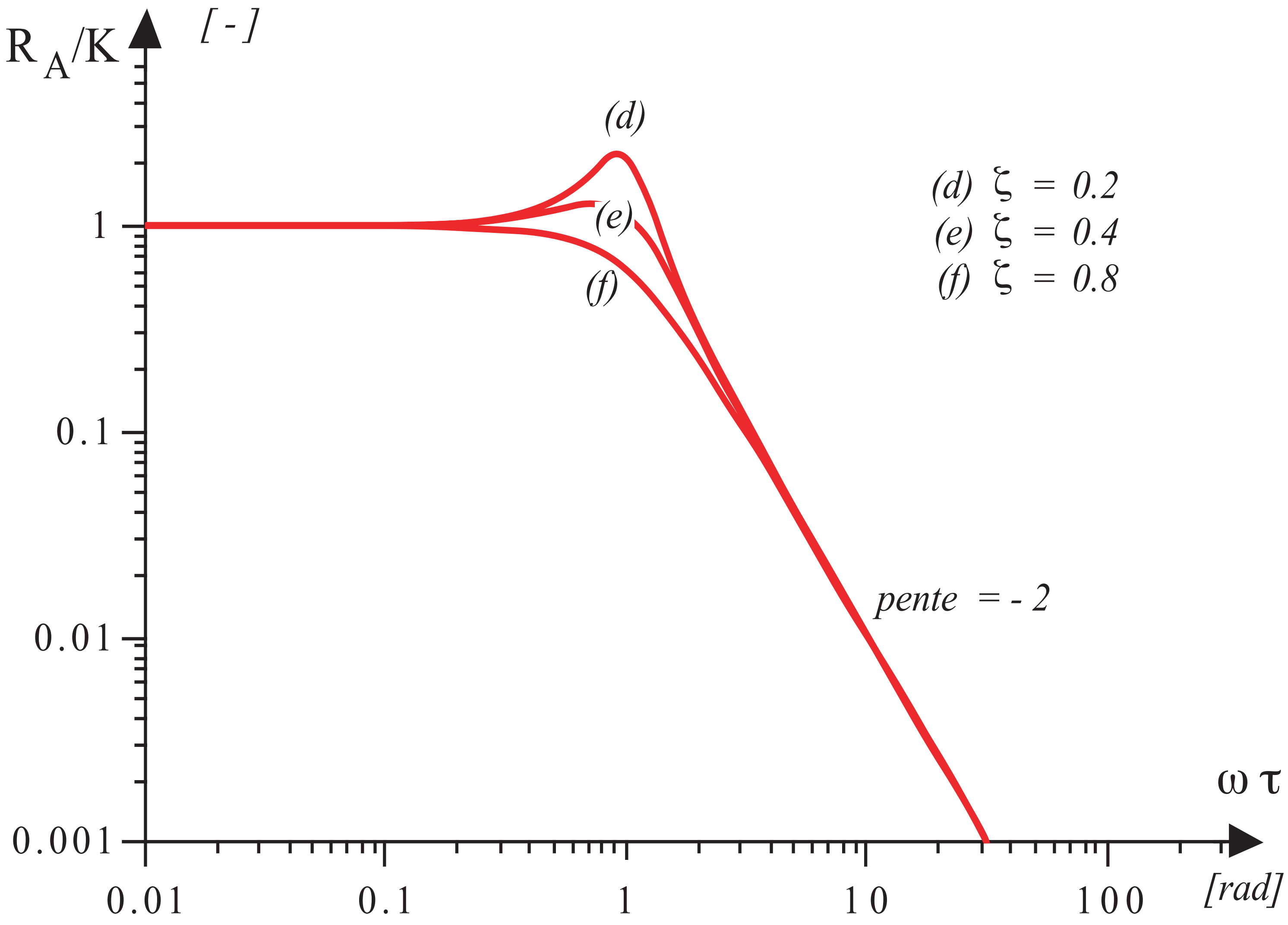
Système du deuxième ordre ($\zeta \geq 1$)



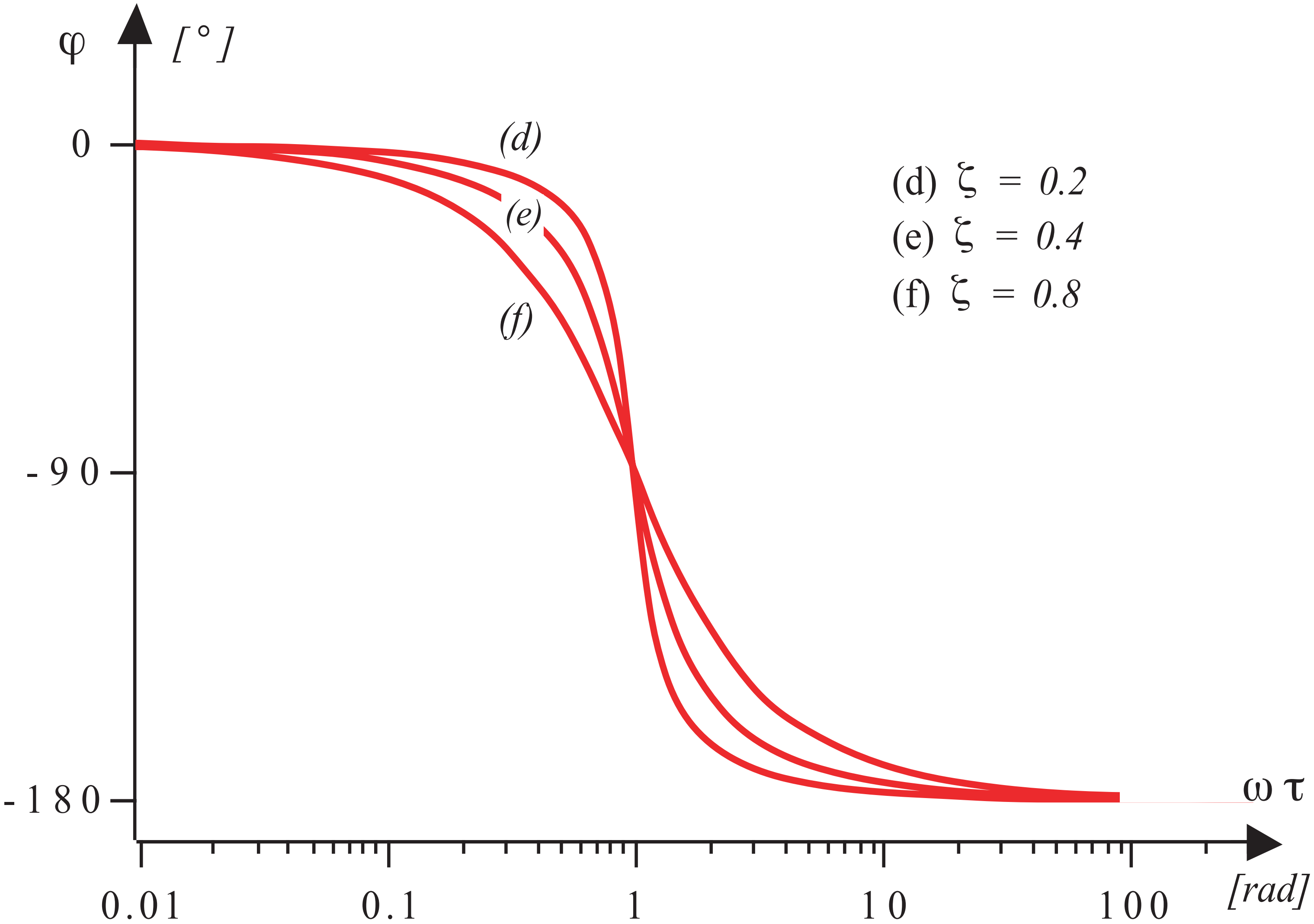
Système du deuxième ordre ($\zeta \geq 1$)



Système du deuxième ordre ($\zeta < 1$)



Système du deuxième ordre ($\zeta < 1$)



Système d'ordre supérieur

$$G(s) = \frac{3}{(10s+1)(2s+1)(0{,}1s+1)} = 3G_1(s)G_2(s)G_3(s)$$

$$G_1(s) = \frac{1}{10s+1}$$

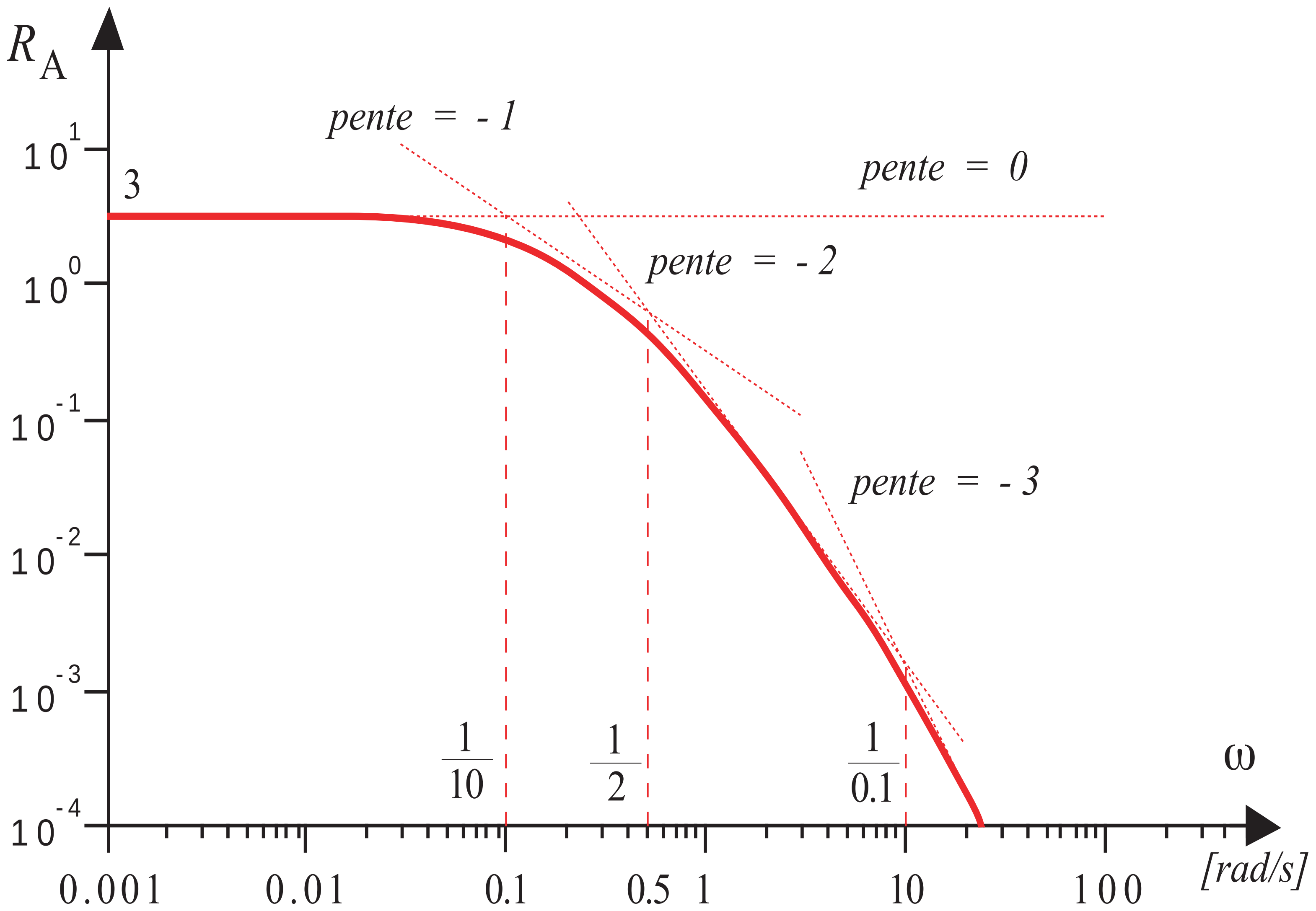
$$G_2(s) = \frac{1}{2s+1}$$

$$G_3(s) = \frac{1}{0{,}1s+1}$$

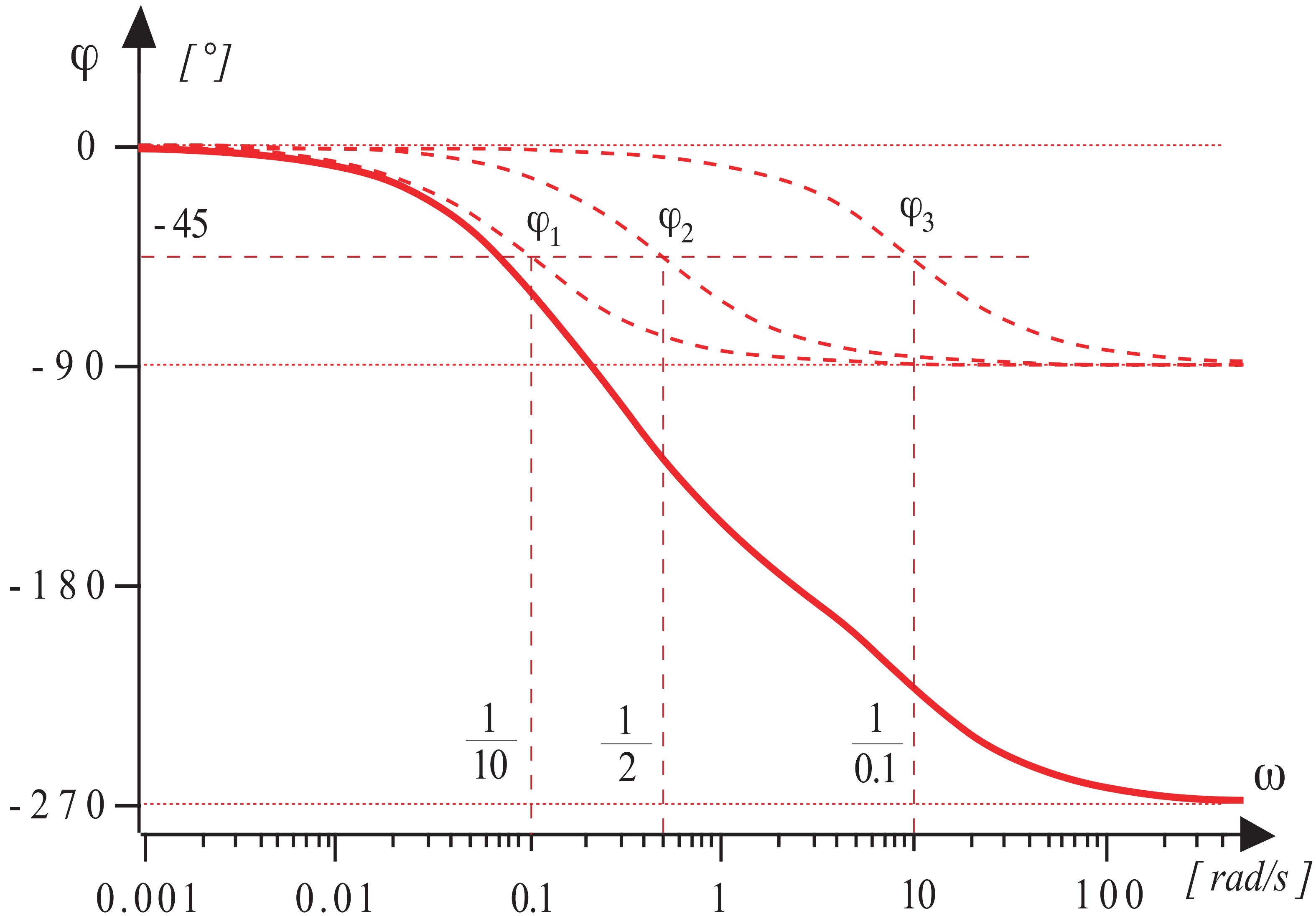
$$R_A = |G(j\omega)| = 3|G_1||G_2||G_3| = \frac{3}{\sqrt{1+(10\omega)^2}\sqrt{1+(2\omega)^2}\sqrt{1+(0{,}1\omega)^2}}$$

$$\begin{aligned}\varphi &= \arg[G(j\omega)] = \arg(G_1) + \arg(G_2) + \arg(G_3)\\ &= -\arctan(10\omega) - \arctan(2\omega) - \arctan(0{,}1\omega)\end{aligned}$$

Système d'ordre supérieur (suite)



Système d'ordre supérieur (suite)



Système avec zéro

$$G_1(s) = \frac{2s+1}{5s+1} \qquad G_2(s) = \frac{-2s+1}{5s+1}$$

$$G_{\text{num1}}(s) = 2s+1 \qquad G_{\text{num2}}(s) = -2s+1 \qquad G_{\text{den}}(s) = 5s+1$$

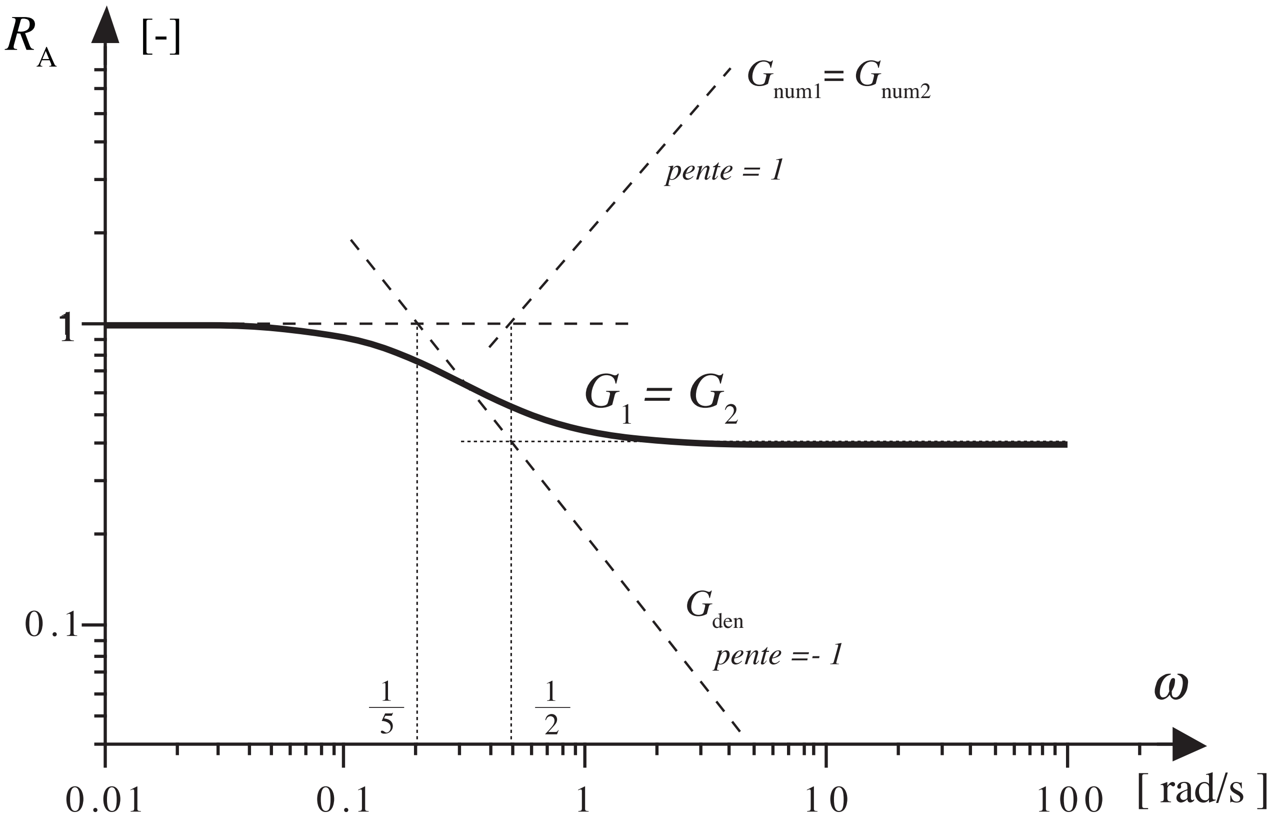
$$R_{A1} = R_{A2} = \frac{\sqrt{1+(\pm 2\omega)^2}}{\sqrt{1+(5\omega)^2}}$$

$$\varphi_1 = \arctan(2\omega) - \arctan(5\omega)$$

$$\varphi_2 = -\arctan(2\omega) - \arctan(5\omega)$$

Système avec zéro (suite)

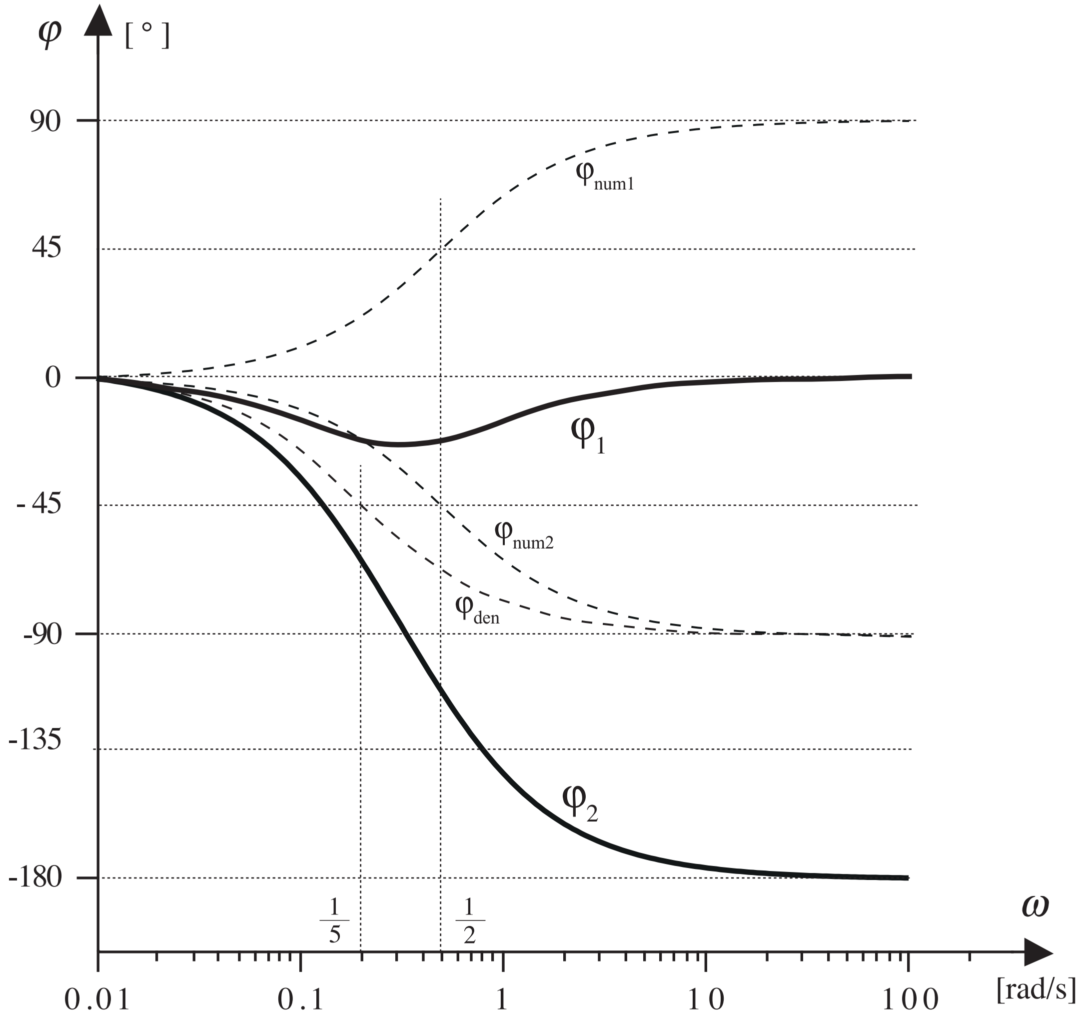
$$R_{A1} = R_{A2} = \frac{\sqrt{1 + (\pm\, 2\,\omega)^2}}{\sqrt{1 + (5\,\omega)^2}}$$



Système avec zéro (suite)

$$\varphi_1 = \arctan(2\omega) - \arctan(5\omega)$$

$$\varphi_2 = -\arctan(2\omega) - \arctan(5\omega)$$



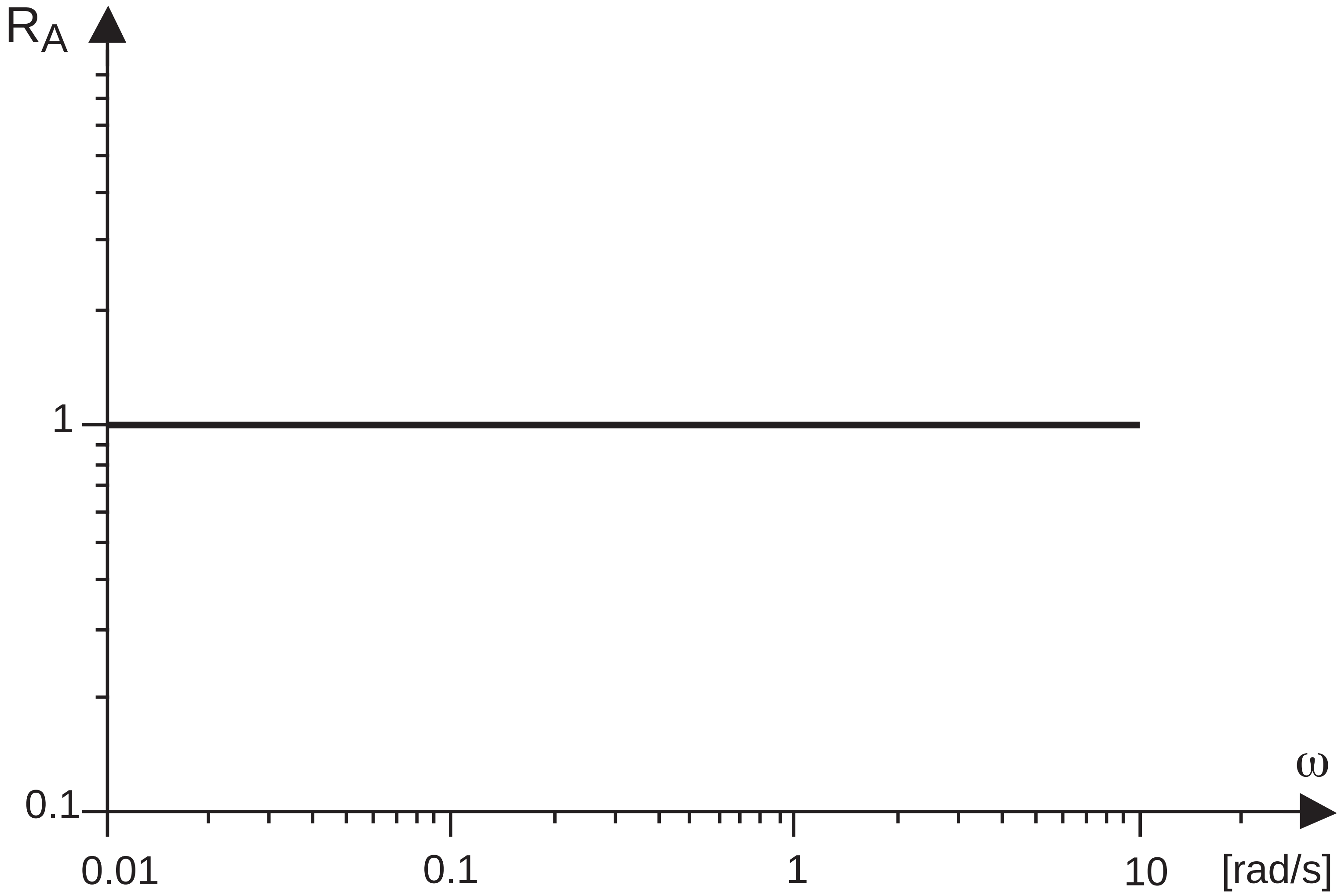
Retard pur

$$y(t) = u(t-\theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} Y(s) = \exp(-\theta s)U(s)$$

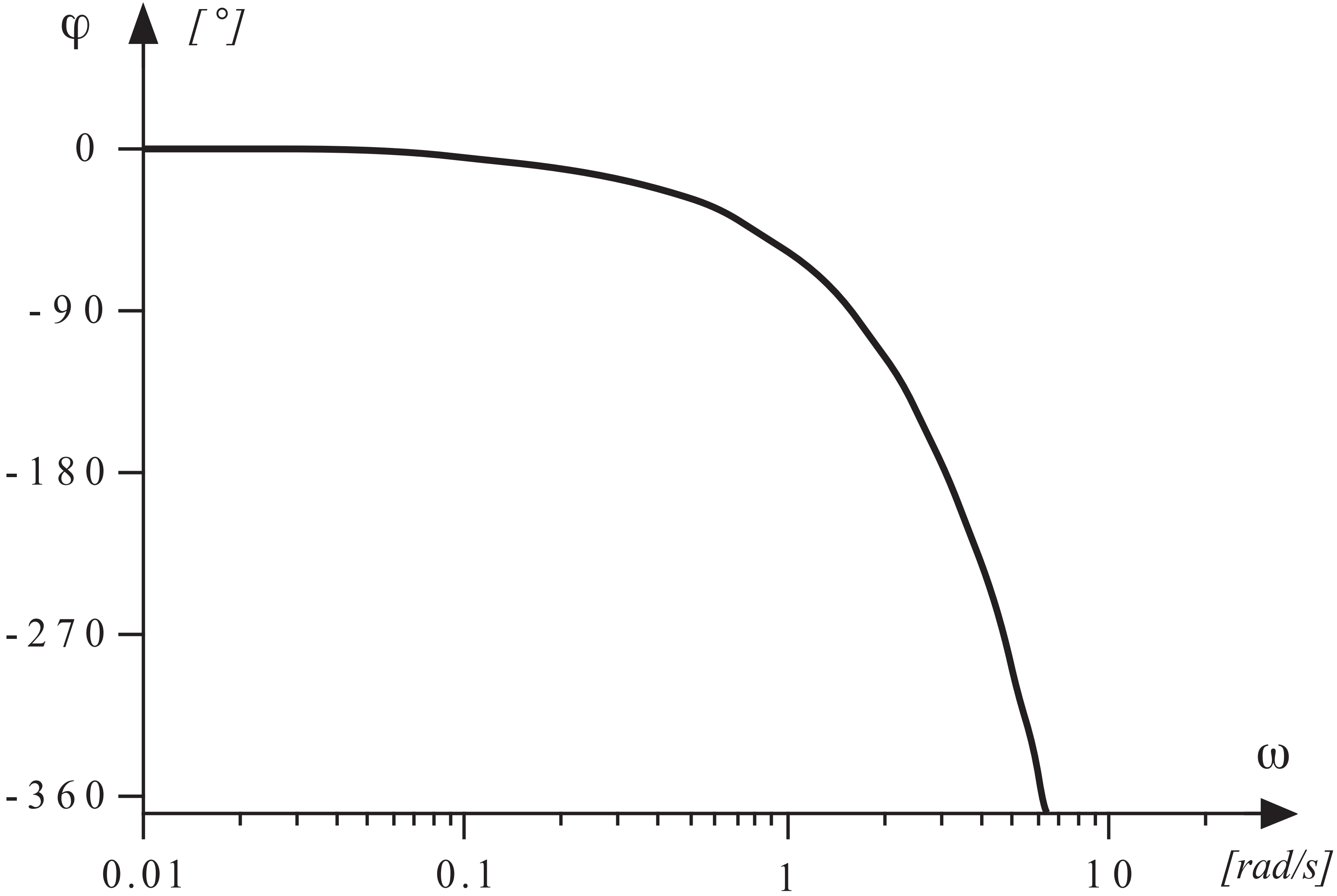
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \exp(-\theta s)$$

$$R_A = |\exp(-j\theta\omega)| = 1$$
$$\varphi = \arg[\exp(-j\theta\omega)] = -\theta\omega$$

Retard pur (suite)



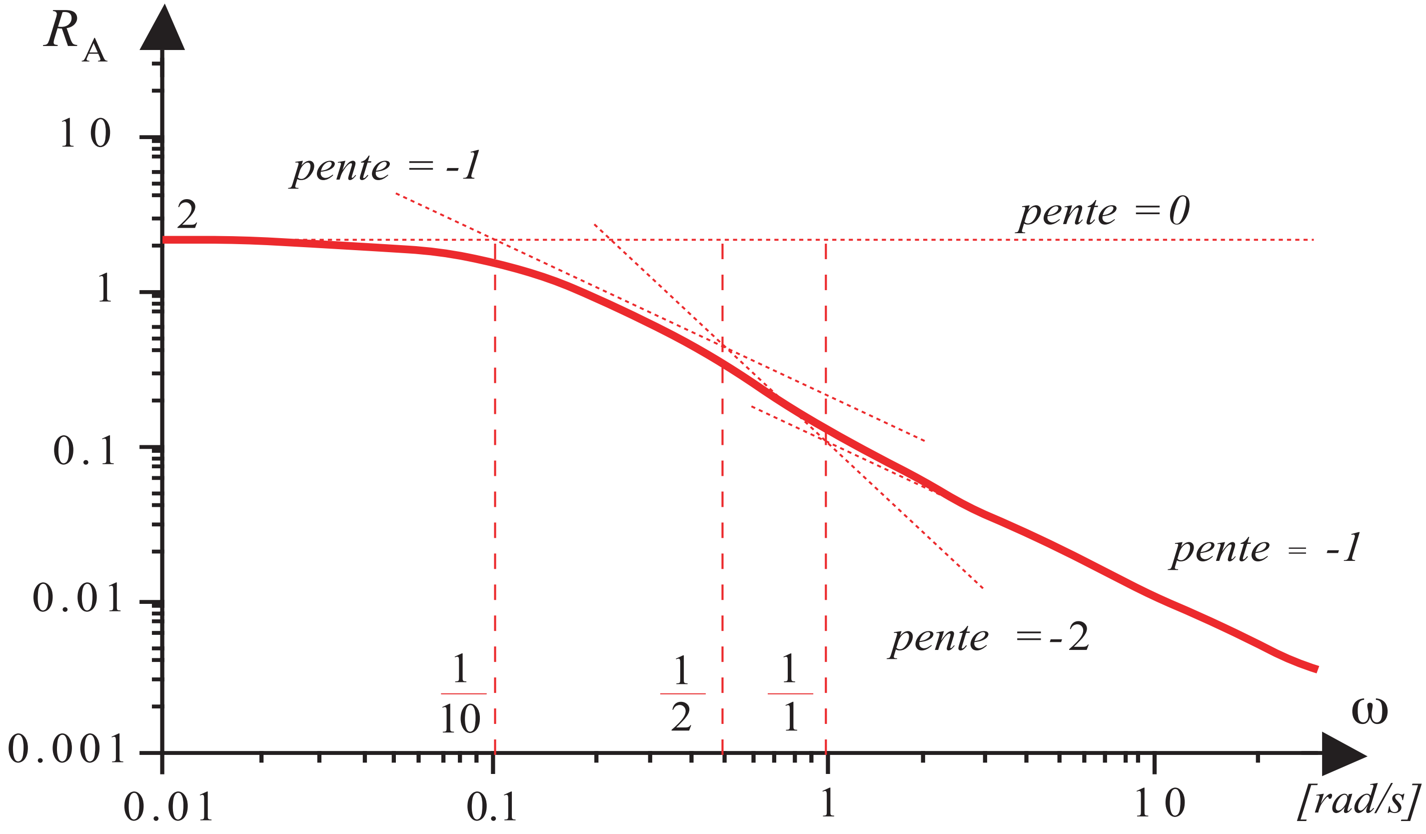
Retard pur (suite)



Exemple

$$G(s) = \frac{2(s+1)\exp(-s)}{(10s+1)(2s+1)}$$

$$R_A = 2\frac{\sqrt{1+\omega^2}}{\sqrt{1+(10\omega)^2}\sqrt{1+(2\omega)^2}}$$



Exemple

$$G(s) = \frac{2(s+1)\exp(-s)}{(10s+1)(2s+1)} \qquad \varphi = -\omega + \arctan(\omega) - \arctan(10\omega) - \arctan(2\omega)$$

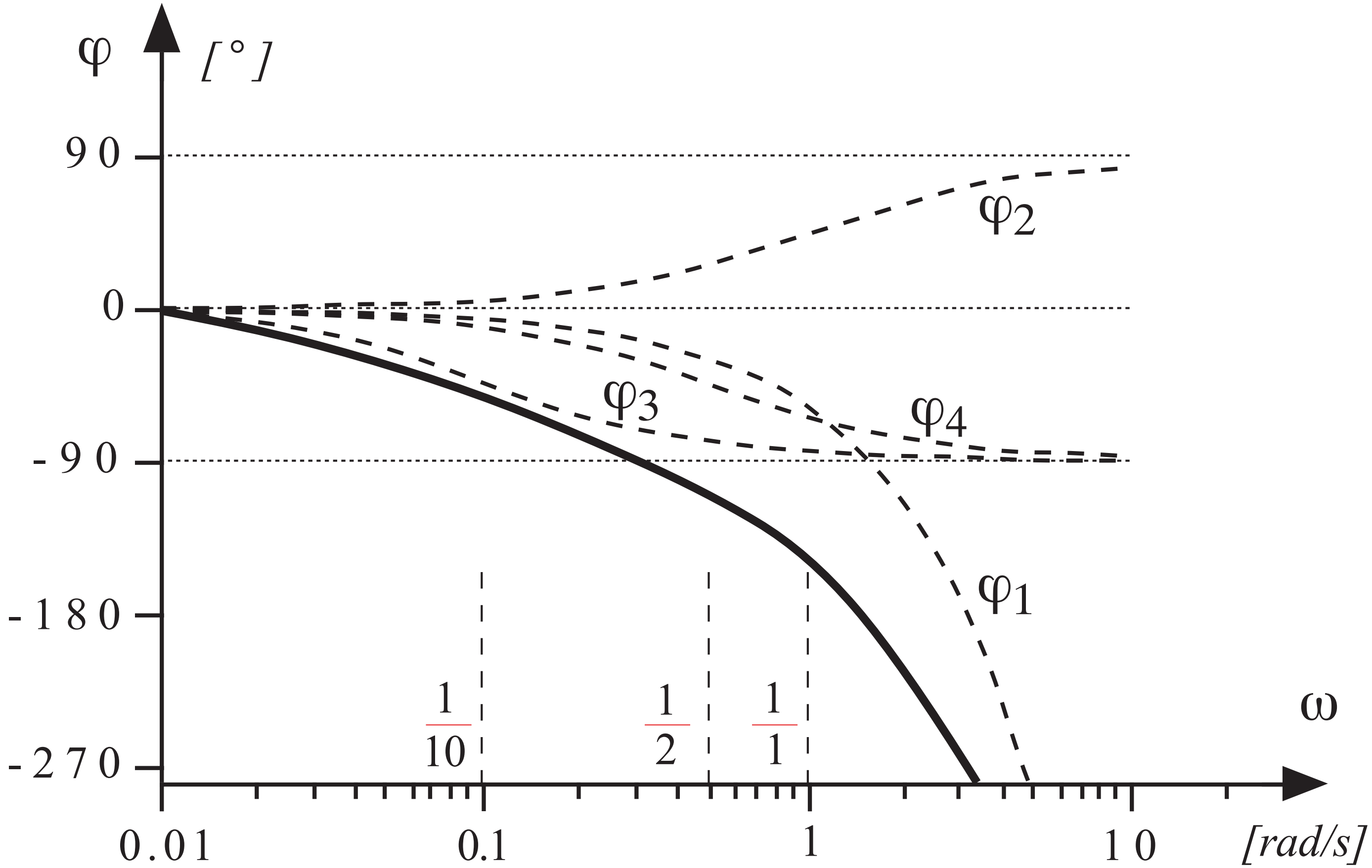
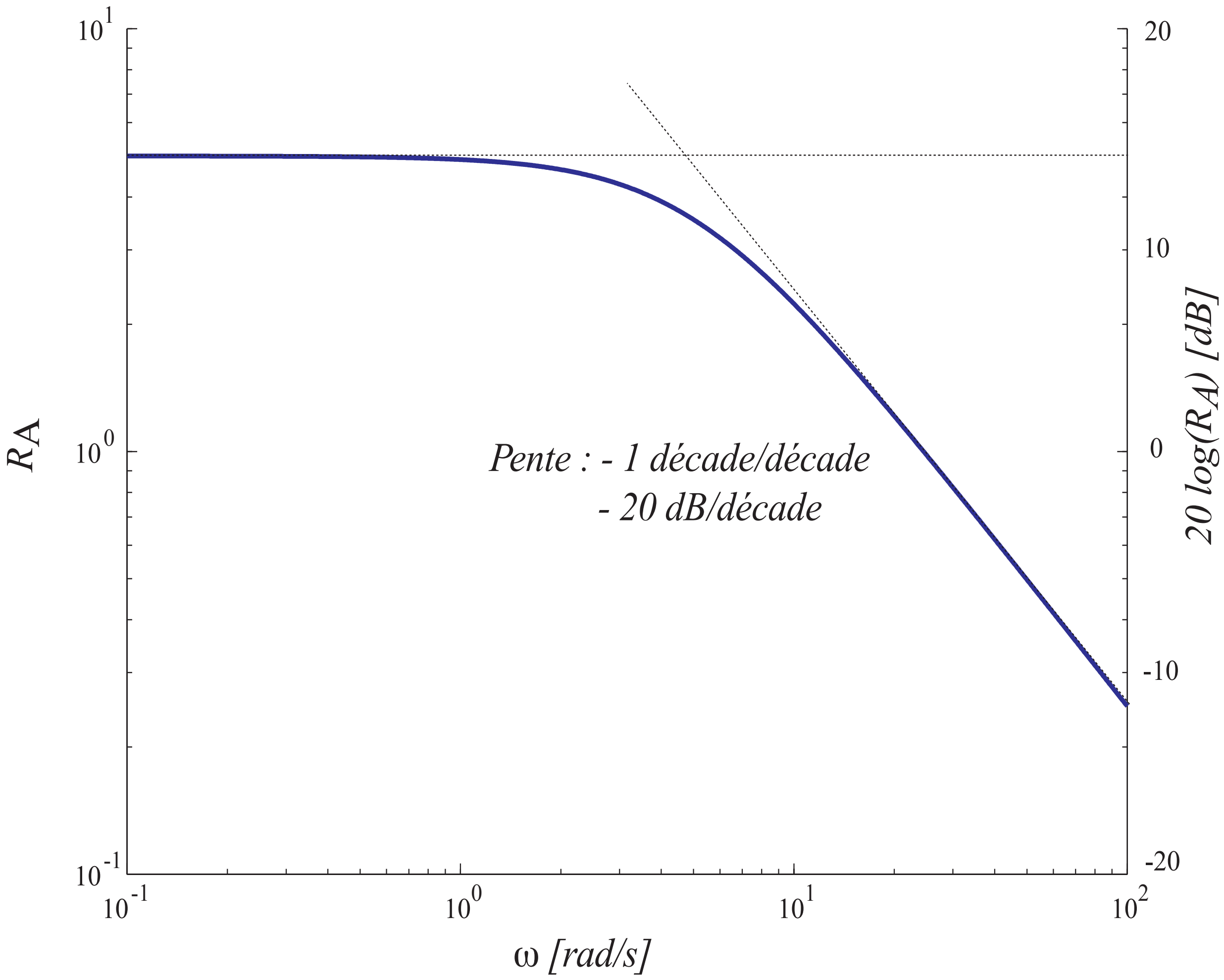


Diagramme d'amplitude en dB



R_A	$20\log R_A$
100	40
10	20
1	0
0.1	-20
0.01	-40

Diagramme de Nyquist