Définitions

Fonction de transfert $\quad G(s) \equiv \mathcal{L}[g(t)] = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + \ldots + a_1 s + a_0} \qquad m \le n$

Gain statique $\quad K = \dfrac{\lim\limits_{t \to \infty} y(t)}{\lim\limits_{t \to \infty} u(t)} = \dfrac{\lim\limits_{s \to 0} sY(s)}{\lim\limits_{s \to 0} sU(s)} = \dfrac{\lim\limits_{s \to 0} sG(s)U(s)}{\lim\limits_{s \to 0} sU(s)} = \lim\limits_{s \to 0} G(s)$

Pôles et zéros $\quad G(s) = \dfrac{b_m(s - z_1)(s - z_2)\ldots(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)\ldots(s - p_n)}$

Equation caractéristique $\quad s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0$

Ordre
- nombre d’équations différentielles du premier ordre
  nombre de variables d’états
- degré du polynôme en s du dénominateur de $G(s)$
  nombre de pôles de $G(s)$

Ordre d'un système

- $m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t) = \sum_{\mathrm{i}} F_{\mathrm{i}}(t)$ Ordre 2

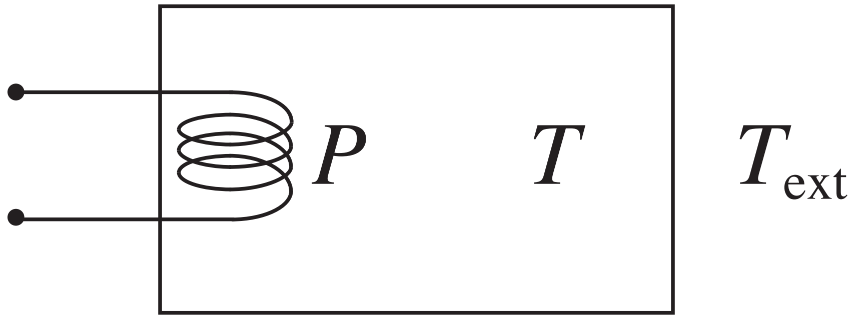
- $G_1(s) = \frac{1}{s^3 + 2s}$ Ordre 3

- $G_2(s) = \frac{s}{s^3 + 2s}$ Ordre 2

- $\ddot{x} + 5\dot{x} + 3x = 2\dot{u} + u$ $x(0) = \dot{x}(0) = u(0) = 0$

  $\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{2s + 1}{s^2 + 5s + 3}$ Ordre 2

Etude thermique d'une salle



Bilan thermique

$$\begin{pmatrix}\text{accumulation de chaleur}\\ \text{dans la pièce}\\ \text{par unité de temps}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{puissance thermique qui}\\ \text{entre dans la pièce}\\ \text{via le radiateur}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{puissance thermique}\\ \text{perdue à travers}\\ \text{les cloisons}\end{pmatrix}$$

$$C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta T(t) = \delta P(t) - \frac{1}{R}[\delta T(t) - \delta T_{\mathrm{ext}}(t)]$$

$$\delta T(t) := (T(t) - \bar{T}) \qquad \delta P(t) := (P(t) - \bar{P}) \qquad \delta T_{\mathrm{ext}}(t) := (T_{\mathrm{ext}}(t) - \bar{T}_{\mathrm{ext}})$$

Etude thermique d'une salle (suite)

Fonction de transfert

$$sC\delta T(s) = \delta P(s) - \frac{1}{R}[\delta T(s) - \delta T_{ext}(s)]$$

$$[sRC + 1]\delta T(s) = R\delta P(s) + \delta T_{ext}(s)$$

$$\delta T(s) = \frac{R}{\tau s + 1}\delta P(s) + \frac{1}{\tau s + 1}\delta T_{ext}(s)$$

$$\longrightarrow \quad G_1(s) = \frac{\delta T(s)}{\delta P(s)} = \frac{R}{\tau s + 1}$$

$$G_2(s) = \frac{\delta T(s)}{\delta T_{ext}(s)} = \frac{1}{\tau s + 1}$$

Etude thermique d'une salle (suite)

Réponse de *T*(*t*) à un saut unité de *P*(*t*)

$$\delta P(t) = 1 \qquad\qquad \delta P(s) = \frac{1}{s}$$

$$\delta T(s) = G_1(s)\delta P(s) = \left(\frac{R}{\tau s + 1}\right)\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{A}{s} + \frac{B}{\tau s + 1}$$

Détermination de A et B à l'aide de la méthode des résidus

$$A = \left[\frac{R}{\tau s + 1}\right]_{s = 0} = R$$

$$B = \left[\frac{R}{s}\right]_{s = -\frac{1}{\tau}} = -R\tau$$

Etude thermique d'une salle (suite)

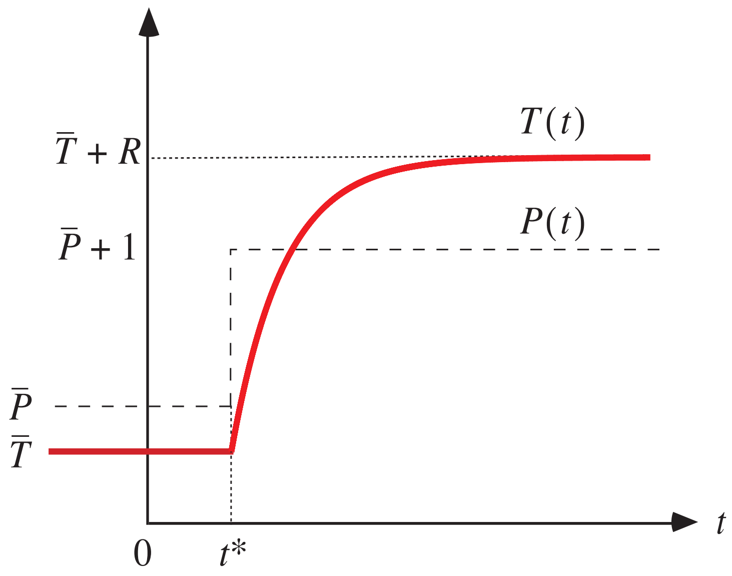
Ainsi $$\delta T(s) = \frac{R}{s} - \frac{R}{s + \frac{1}{\tau}}$$

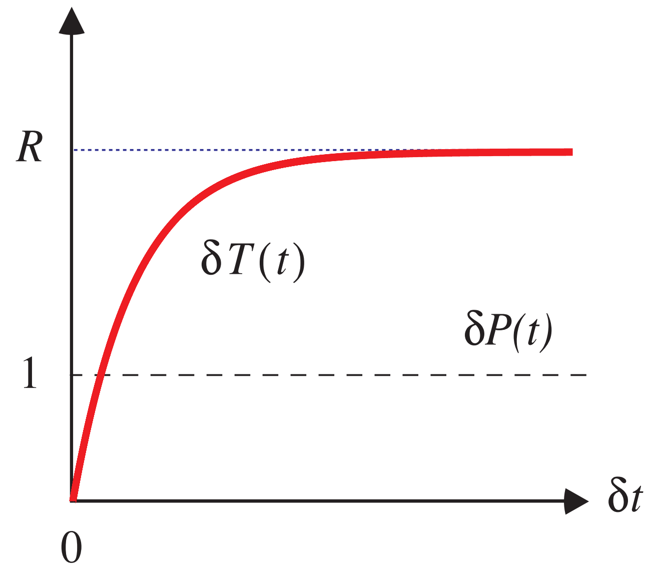
$$\delta T(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{R}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{R}{s + \frac{1}{\tau}}\right] = R - Re^{-\frac{t}{\tau}} = R\left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right]$$

$$T(t) = \bar{T} + \delta T(t) = \bar{T} + R\left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right]$$

Etude thermique d'une salle (suite)

Représentation graphique





$$\delta T(t) := T(t) - \bar{T}$$
$$\delta P(t) := P(t) - \bar{P}$$

Système du premier ordre

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}$$

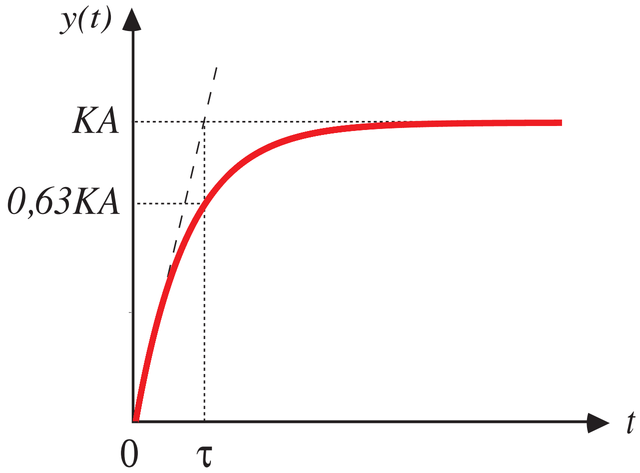
Gain statique $\lim_{s \to 0} G(s) = K$

Pôle $p = -1/\tau$

τ: constante de temps

Réponse indicielle

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{(\tau s + 1)}\frac{A}{s}\right] = \varepsilon(t) KA[1 - e^{-t/\tau}]$$



$t = \tau$ **63,2%**

$t = 3\tau$ **95%**

Réponse indicielle normalisée

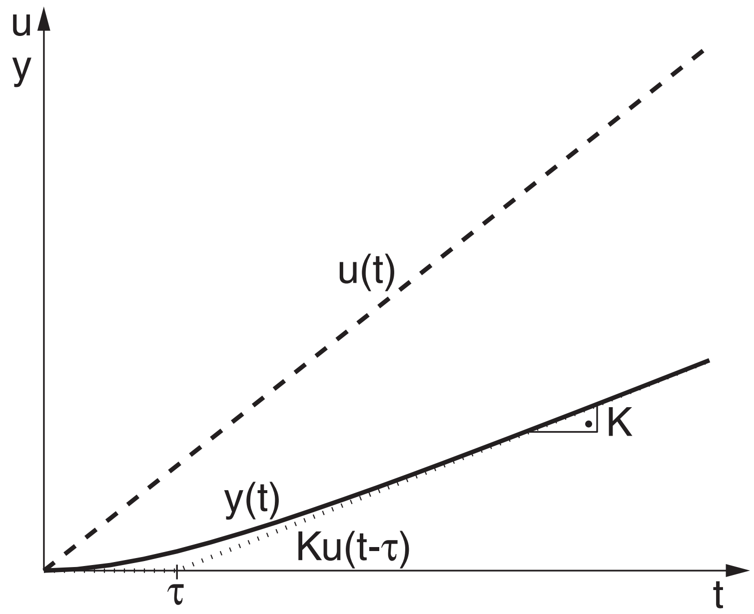
Identification graphique de K et τ

Système du premier ordre

Réponse à une rampe

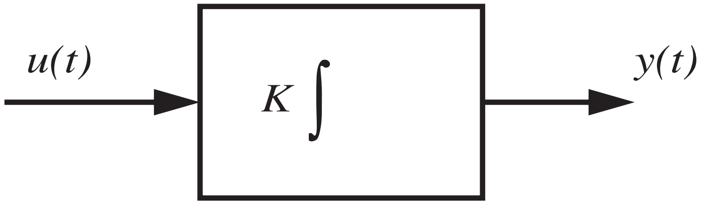
$$Y(s) = \left(\frac{K}{\tau s + 1}\right)\left(\frac{1}{s^2}\right) = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s^2} + \frac{\gamma}{\tau s + 1}$$

$$y(t) = -KA\tau + KAt + KA\tau e^{-t/\tau} = KA(t-\tau) + KA\tau e^{-t/\tau} \qquad t \geq 0$$



Système intégrateur du premier ordre

$$\dot{y}(t) = Ku(t) \qquad y(t) = K\int_0^t u(\tau)\,\mathrm{d}\tau \qquad Y(s) = \frac{K}{s}U(s)$$

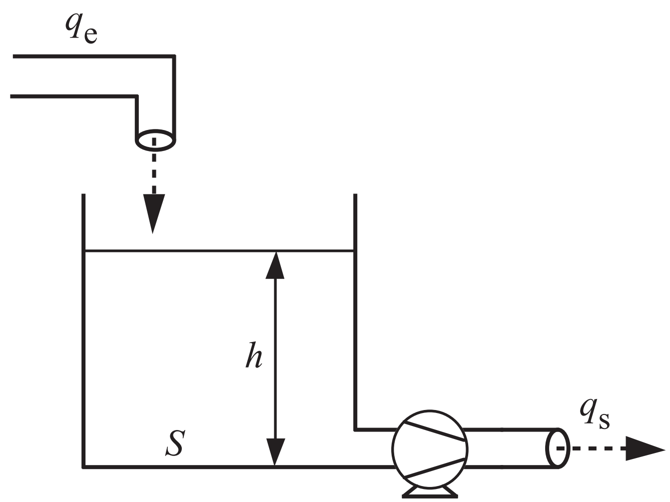


Gain statique INFINI

Gain en vitesse $K_v = \lim_{s \to 0} sG(s) = K$

Réponse indicielle $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)U(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{s}\frac{A}{s}\right] = KAt \qquad t \geq 0$

Cuve de volume variable



$$q_s = \text{const}$$

$$S\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(t) = q_e(t) - q_s$$

En variables écart

$$S\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(t) = q_e(t)$$

$$\frac{H(s)}{Q_e(s)} = \frac{1}{Ss}$$

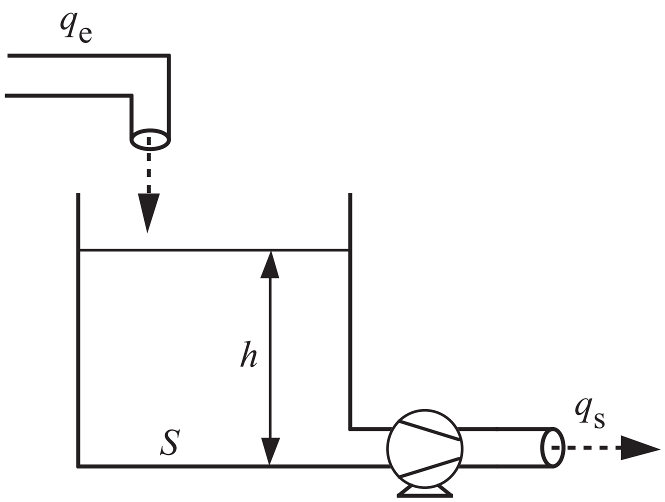
Cuve de volume variable (suite)

Réponse à un saut de $q_e(t)$

$$q_e(t) = A \xrightarrow{\mathcal{L}} Q_e(s) = \frac{A}{s}$$

$$\frac{H(s)}{Q_e(s)} = \frac{1}{Ss}$$

(en variables écart) $h(t) = \frac{A}{S}t \xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}} H(s) = \frac{A}{Ss^2}$



$$h(t) = \bar{h} + \frac{A}{S}t \qquad t \geq 0$$

(en variables absolues)

Système du deuxième ordre sans zéro

- $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{K}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1} = K\dfrac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$

$$\omega_0 = 1/\tau$$

- $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \left(\dfrac{K_1}{\tau_1 s + 1}\right)\left(\dfrac{K_2}{\tau_2 s + 1}\right)$

$$K = K_1 K_2 \qquad \tau = \sqrt{\tau_1 \tau_2} \qquad \zeta = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2\sqrt{\tau_1 \tau_2}} \geq 1$$

Système du deuxième ordre sans zéro (suite)

Réponse indicielle

- Pente à l'origine nulle
- Cas sur-amorti : **Pôles réels distincts** pour $\zeta > 1$

$$G(s) = \left(\frac{K_1}{\tau_1 s + 1}\right)\left(\frac{K_2}{\tau_2 s + 1}\right)$$

$$y(t) = \varepsilon(t)KA\left\{1 - \frac{1}{\tau_1 - \tau_2}[\tau_1 e^{-t/\tau_1} - \tau_2 e^{-t/\tau_2}]\right\}$$

- Cas critique : **Pôles réels confondus** pour $\zeta = 1$

$$G(s) = \frac{K}{(\tau s + 1)^2}$$

$$y(t) = \varepsilon(t)KA\left[1 - \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)e^{-t/\tau}\right]$$

Système du deuxième ordre sans zéro (suite)

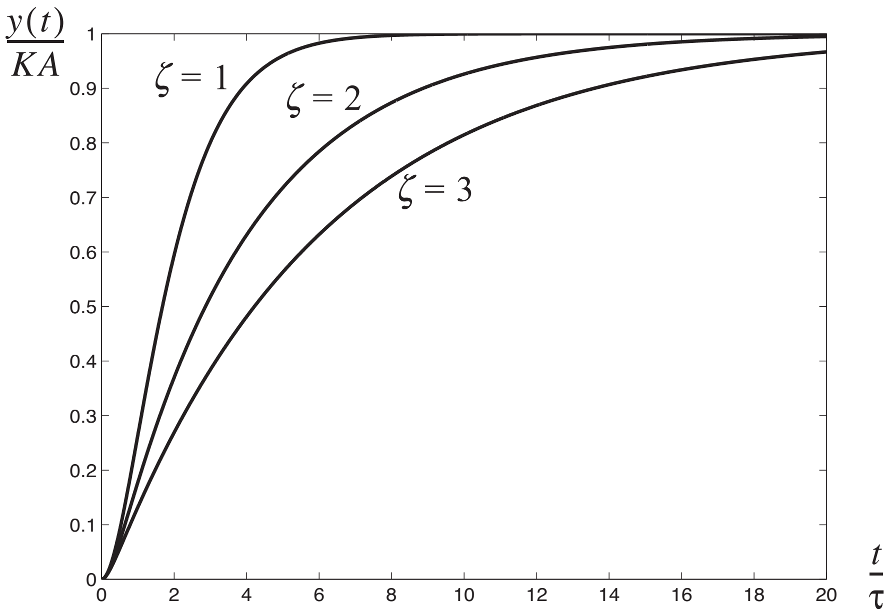
- Cas sous-amorti : **Pôles conjugués complexes** pour $0 \le \zeta < 1$

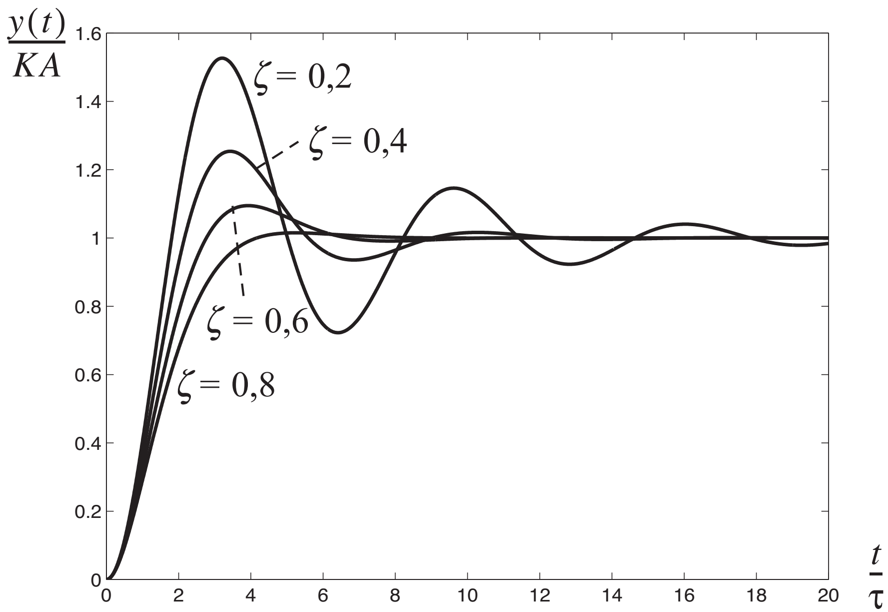
$$G(s) = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}$$

$$y(t) = \varepsilon(t) K A \left\{ 1 - e^{-\zeta t/\tau} \left[\cos \bar{\omega} t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \bar{\omega} t \right] \right\}$$

$$\bar{\omega} = \frac{1}{\tau}\sqrt{1-\zeta^2}$$

Système du deuxième ordre sans zéro (suite)





Position des pôles et réponse temporelle

Décomposition en éléments simple de $Y(s)$

Considérons une paire de pôles conjugués complexes de multiplicité μ

Pôles : $p = \alpha \pm j\omega$

Résidus : $A \pm Bj$

Mode : $\dfrac{2A}{(r-1)!} t^{r-1} e^{\alpha t} \cos(\omega t) - \dfrac{2B}{(r-1)!} t^{r-1} e^{\alpha t} \sin(\omega t) \qquad r = 1, 2, \ldots, \mu$

Pour un pôle réel simple $(\omega = 0, r = 1)$, mode $Ae^{\alpha t}$

Position des pôles et réponse temporelle (suite)

Pour $\mu = 1$