Systèmes dynamiques — Contrôle continu, Mai 2017

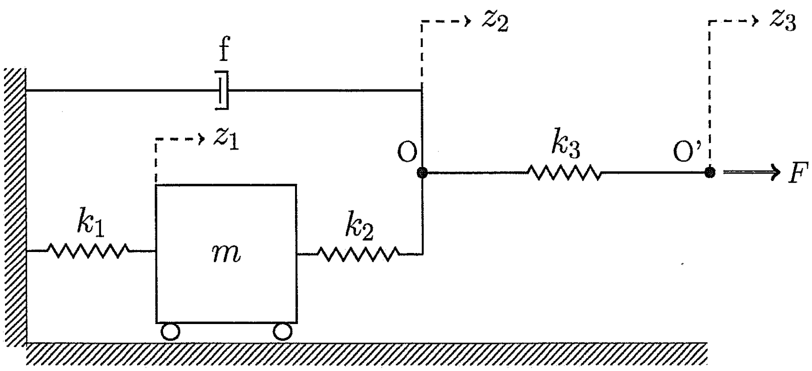
Nom:

Prénom:

Ex.	1	2	3	4	5	Total
1						

Exercice 1 (1 point)

Le système mécanique représénté à la figure ci-dessous est initialement au repos. Les déplacements z_1, z_2 et z_3 sont mesurés par rapport à leur position d'équilibre avant que la force F soit appliquée.



1. Ecrire les équations dynamiques pour ce système (O et O' points matériels de masse nulle). Est-ce que le déplacement de la masse m dépend du coefficient de rigidité k_3 ?

2. L'entrée du système est la force F et la sortie à considérer est le déplacement z_1 de la masse. Représenter ce système dynamique par un modèle d'état.

3. Calculer la fonction de transfert $\frac{Z_1(s)}{F(s)}$. Représenter ce système dynamique par un modèle d'état.

Exercice 2 (1 point)

Proposer un schéma électrique qui soit analogue au système mécanique de l'execice 1 en utilisant l'analogie force-tension.

Exercice 3 (1 point)

Soit le système dynamique représenté par ses équations d'état:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_1 + 2x_1x_2 + u & \qquad x_1(0) = 0 \\ \dot{x}_2 &= x_2 + 3x_1x_2 & \qquad x_2(0) = 0 \end{aligned}$$

1. Calculer le point d'équilibre lorsque $\bar{u} = 1$ et $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \neq 0$.
2. Linéariser les équations d'état pour ce point d'équilibre.

Exercice 4 (1 point)

Un système mécanique est décrit par l'équation ci-dessous:

$$m\ddot{x}(t) = F(t) - kx(t) - f\dot{x}(t) \qquad\qquad x(0) = \dot{x}(0) = 0$$

avec $m = 2$ kg, $k = 10$ N/m, $f = 8$ Ns/m.

Le système est au repos avant que la force $F(t)$ soit appliquée:

$$F(t) = \begin{cases} 1\text{ N} & \text{pour } t < 5, \\ 0 & \text{pour } t \geq 5. \end{cases}$$

1. Tracer $F(t)$ et calculer sa transformée de Laplace F(s).
2. Calculer $x(t)$.

Exercice 5 (1 point)

Un système décrit par l'équation différentielle

$$\dddot{y}(t) + 8\ddot{y}(t) + 17\dot{y}(t) + 10y(t) = 0$$

est soumis aux conditions initiales: $y(0) = 2$, $\dot{y}(0) = 1$, $\ddot{y}(0) = 0.5$.

1. Calculer $Y(s)$.
2. A partir de $Y(s)$, évaluer $y(0)$ et $\dot{y}(0)$ à l'aide du théorème de la valeur initiale.
3. Calculer $y(t)$.

Contrôle continu, Mai 2017 - Solutions

Exercice 1

1) Les équations dynamiques du système sont :

- masse m

$$m\ddot{z}_1 = -k_1 z_1 - k_2 (z_1 - z_2)$$

- pt. matériel O

$$0 = -f\dot{z}_2 - k_2 (z_2 - z_1) - k_3 (z_2 - z_3)$$

- pt. matériel O'

$$0 = F - k_3 (z_3 - z_2)$$

En reécrivant les équations ci-dessus, nous constatons que la dynamique du système ne dépend pas de k_3

$$\left| \begin{array}{ll} m\ddot{z}_1 = -k_1 z_1 - k_2 (z_1 - z_2) & \text{①} \\ 0 = -f\dot{z}_2 - k_2 (\dot{z}_2 - z_1) + F & \text{②} \end{array} \right.$$

2) Nous posons les variables d'état :

$x_1 := z_1$, $x_2 := \dot{z}_1$, $x_3 := z_2$

L'entrée $u := F$ et la sortie $y := z_1$

Le modèle d'état est :

$$\begin{array}{l} x_1 := z_1 \longrightarrow \\ x_2 := \dot{z}_1 \longrightarrow \\ x_3 := z_2 \longrightarrow \end{array} \left| \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{m}\left\{-(k_1 + k_2)\, x_1 + k_2 x_3\right\} \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{f}\left\{k_2 x_1 - k_2 x_3\right\} + \frac{1}{f} u \end{array} \right.$$

$$\left| \; y = x_1 \right.$$

$\longrightarrow$

3) En effectuant la transformation de Laplace des équations dynamiques ① et ② nous avons :

$$① \longrightarrow \quad m s^2 Z_1(s) = -k_1 Z_1(s) - k_2 \left(Z_1(s) - Z_2(s) \right) \qquad (1')$$

$$② \longrightarrow \quad 0 = -f s Z_2(s) - k_2 \left(Z_2(s) - Z_1(s) \right) + F(s) \qquad (2')$$

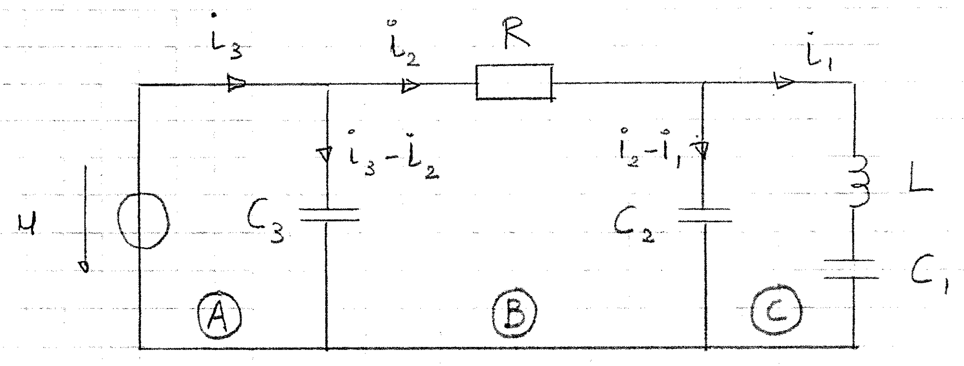
En éliminant $Z_2(s)$ de ces deux équations, nous obtenons :

$$(2') \longrightarrow \quad Z_2(s) = \frac{F(s) + k_2 Z_1(s)}{f s + k_2} \qquad (*)$$

$$(1') \xrightarrow{(*)} \quad Z_1(s) \left(m s^2 + k_1 + k_2 - \frac{k_2^2}{f s + k_2} \right) = F(s) \frac{k_2}{f s + k_2} \Rightarrow$$

$$\frac{Z_1(s)}{F(s)} = \frac{k_2}{m f s^3 + m k_2 s^2 + (k_1 + k_2) f s + k_1 k_2}$$

Exercice 2



mécanique	$\longleftrightarrow$	électrique
m		L
$1/k_1$		C_1
$1/k_2$		C_2
f		R
$1/k_3$		C_3

$z_1 \longleftrightarrow q_1$

$z_2 \longleftrightarrow q_2$

$z_3 \longleftrightarrow q_3$

$F \longleftrightarrow u$

maille A :
$$u = \frac{1}{C_3}\int (i_3 - i_2)\,dt \Rightarrow$$
$$0 = u - \frac{1}{C_3}(q_3 - q_2)$$

maille B :
$$R i_2 + \frac{1}{C_2}\int (i_2 - i_1)\,dt - \frac{1}{C_3}(i_3 - i_2)\,dt = 0 \Rightarrow$$
$$0 = -R\dot{q}_2 - \frac{1}{C_2}(q_2 - q_1) - \frac{1}{C_3}(q_2 - q_3)$$

maille C :
$$\frac{1}{C_2}\int (i_2 - i_1)\,dt = L\frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_1}\int i_1\,dt \Rightarrow$$
$$L\ddot{q}_1 = -\frac{1}{C_1}q_1 - \frac{1}{C_2}(q_1 - q_2)$$

Exercice 3

1) Calcul du point d'équilibre :

$$0 = 2\bar{x}_1 + 2\bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{u} \qquad ①$$
$$0 = \bar{x}_2 + 3\bar{x}_1\bar{x}_2 \qquad ②$$

$$3\cdot① - 2\cdot② \longrightarrow 6\bar{x}_1 + 6\bar{x}_1\bar{x}_2 + 3\bar{u} - 2\bar{x}_2 - 6\bar{x}_1\bar{x}_2 = 0 \Rightarrow$$
$$6\bar{x}_1 - 2\bar{x}_2 + 3\bar{u} = 0 \Rightarrow \bar{x}_2 = 3\bar{x}_1 + 1.5\bar{u} \qquad ③$$

$$① \xrightarrow{③} 2\bar{x}_1 + 2\bar{x}_1(3\bar{x}_1 + 1.5\bar{u}) + \bar{u} = 0 \Rightarrow$$
$$6\bar{x}_1^2 + \bar{x}_1(2 + 3\bar{u}) + \bar{u} = 0 \Rightarrow$$

avec $\bar{u} = 1 \rightarrow 6\bar{x}_1^2 + 5\bar{x}_1 + 1 = 0$

$$\bar{x}_{1,2} = \frac{-5 \pm 1}{12} = \begin{cases} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$③ \longrightarrow \bar{x}_2 = 3\bar{x}_1 + 1.5\bar{u} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ 0 \end{cases}$$

Puisque $\bar{x}_2 \neq 0$ alors : $\bar{x}_1 = -\frac{1}{3}$, $\bar{x}_2 = \frac{1}{2}$, $\bar{u} = 1$

2) Equations d'état :

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x}_1 = 2x_1 + 2x_1x_2 + u = f_1(x_1, x_2, u) \\ \dot{x}_2 = x_2 + 3x_1x_2 = f_2(x_1, x_2, u) \end{array} \right.$$

Equations d'état linéaires :

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{x}_1 \\ \delta\dot{x}_2 \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} + B \cdot \delta u$$

$\longrightarrow$

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\bar{x},\bar{u}} = \begin{bmatrix} 2+2\bar{x}_2 & 2\bar{x}_1 \\ 3\bar{x}_2 & 1+3\bar{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{2}{3} \\ \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\bar{x},\bar{u}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

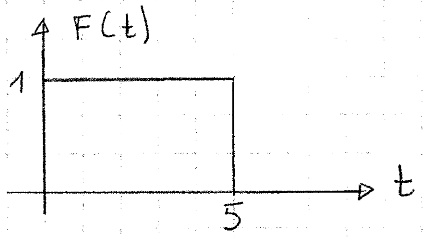
D'où les équations d'état linéaires :

$$\delta\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 3 & -2/3 \\ 3/2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \delta x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \delta u$$

avec $\delta x(0) = x(0) - \bar{x}(0) = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -1/2 \end{bmatrix}$

Exercice 4

1)



$$F(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-5) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \frac{1}{s}\left(1 - e^{-5s}\right)$$

2) En effectuant la transformation de Laplace de l'équation dynamique nous avons :

$$m s^2 X(s) = F(s) - k X(s) - f s X(s) \Rightarrow$$

$$(m s^2 + f s + k)\, X(s) = F(s) \Rightarrow$$

$$X(s) = \frac{F(s)}{m s^2 + f s + k}$$

$$= \frac{1}{s(m s^2 + f s + k)} - \frac{e^{-5s}}{s(m s^2 + f s + k)}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{s} \cdot \frac{0.5}{s^2 + 4s + 5}}_{X_1(s)} - \frac{1}{s}\,\frac{0.5}{s^2+4s+5}\, e^{-5s}$$

Soit $X_1(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{0.5}{s^2+4s+5} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2+4s+5}$

- $A = \lim_{s \to 0} s X_1(s) = 0.1$

- $0.1\,(s^2 + 4s + 5) + (Bs + C)\,s = 0.5 \Rightarrow$

  $(0.1 + B)\,s^2 + (0.4 + C)\,s + 0.5 = 0.5 \Rightarrow$

  $B = -0.1$ et $C = -0.4$

$\longrightarrow$

Donc :

$$X_1(s) = \frac{0.1}{s} - \frac{0.1s + 0.4}{s^2+4s+5}$$

$$= \frac{0.1}{s} - 0.1\,\frac{(s+4)}{(s+2)^2+1}$$

$$= \frac{0.1}{s} - 0.1\left\{\frac{(s+2)}{(s+2)^2+1} + 2\cdot\frac{1}{(s+2)^2+1}\right\}$$

$$= \frac{0.1}{s} - 0.1\,\frac{(s+2)}{(s+2)^2+1} - 0.2\,\frac{1}{(s+2)^2+1}$$

$$x_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X_1(s)\}$$

$$= 0.1\,\varepsilon(t) - 0.1\,\varepsilon(t)\,e^{-2t}\cos(t) - 0.2\,\varepsilon(t)\,e^{-2t}\sin(t)$$

et

$$x(t) = 0.1\,\varepsilon(t) - 0.1\,\varepsilon(t)\,e^{-2t}\cos(t) - 0.2\,\varepsilon(t)\,e^{-2t}\sin(t) + \ldots$$

$$0.1\,\varepsilon(t-5) - 0.1\,\varepsilon(t-5)\,e^{-2(t-5)}\cos(t-5) - 0.2\,\varepsilon(t-5)\,e^{-2(t-5)}\sin(t-5)$$

Exercice 5

1) En appliquant la transformation de Laplace on obtient :

$$\dot{y}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} sY(s) - y(0) = sY(s) - 2$$
$$\ddot{y}(t) \longrightarrow s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) = s^2Y(s) - 2s - 1$$
$$\dddot{y}(t) \longrightarrow s^3Y(s) - s^2y(0) - s\dot{y}(0) - \ddot{y}(0) = s^3Y(s) - 2s^2 - s - 0.5$$

Donc :

$$Y(s) = \frac{2s^2 + 17s + 42.5}{s^3 + 8s^2 + 17s + 10}$$

2) En appliquant le théorème de la valeur initiale, on trouve :

– $$\lim_{t\to 0} y(t) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{2s^3 + 17s^2 + 42.5s}{s^3 + 8s^2 + 17s + 10} = 2$$

c.q.f.d.

– soit $z(t) = \dot{y}(t)$

$$\mathcal{L}\{z(t)\} = Z(s) = sY(s) - y(0)$$

$$\lim_{z\to 0} z(t) = \lim_{s\to\infty} sZ(s) = \lim_{s\to\infty} s[sY(s) - y(0)]$$

$$= \lim_{s\to\infty} s\left[\frac{2s^3 + 17s^2 + 42.5 \cdot s}{s^3 + 8s^2 + 17s + 10} - 2\right]$$

$$= \lim_{s\to\infty} s\left(\frac{s^2 + 8.5s - 20}{s^3 + 8s^2 + 17s + 10}\right) = 1 \quad \text{c.q.f.d}$$

3) $$Y(s) = \frac{2s^2 + 17s + 42.5}{s^3 + 8s^2 + 17s + 10} = \frac{2s^2 + 17s + 42.5}{(s+1)(s+2)(s+5)}$$

$$= \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+5}$$

$\longrightarrow$

avec :

$$A = \lim_{s \to -1} (s+1)\, Y(s) = \frac{27.5}{4}$$

$$B = \lim_{s \to -2} (s+2)\, Y(s) = -\frac{16.5}{3}$$

$$C = \lim_{s \to -5} (s+5)\, Y(s) = \frac{7.5}{12} = \frac{2.5}{4}$$

Donc :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{27.5}{4} e^{-t} - \frac{16.5}{3} e^{-2t} + \frac{2.5}{4} e^{-5t}$$

pour $t \geqslant 0$