Commande de procédés, Test Mai 2012

Nom :

Prénom :

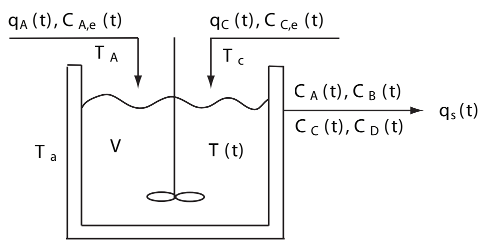
Ex.	1	2	3	4	Total
1					

Problème 1 (Modélisation) [1 point]

On considère les deux réactions :

$$
\begin{array}{lllllll}
R1: & A & \rightarrow & B & & & r_1 = k_1 C_A \\
R2: & B & + & C & \rightarrow & D & r_2 = k_2 C_B C_C
\end{array}
$$

ayant lieu dans un réacteur continu non isotherme de volume constant. La première réaction est exothermique avec une enthalpie de réaction ΔH_1, tandis que la chaleur produite par la seconde réaction est négligeable. Il y a échange de chaleur avec l'extérieur qui se trouve à la température T_a. Les températures T_A et T_C des débits d'alimentation peuvent être considérées constantes. On suppose les densités et les chaleurs spécifiques de tous les débits identiques et constantes.

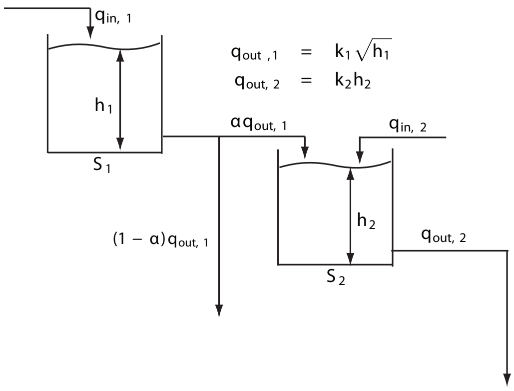


a) Modéliser ce système dynamique et identifier les variables caractéristiques (variables indépendantes, variables dépendantes, paramètres).

b) Proposer un schéma de commande par rétroaction pour réguler la température dans le réacteur et indiquer la grandeur de commande et la grandeur commandée.

Problème 2 (Linéarisation) [1.5 points]

On considère le système de deux réservoirs en série. Chaque réservoir comporte une alimentation propre, $q_{in,1}$ et $q_{in,2}$. En outre, uniquement une partie de la sortie du réservoir 1 entre dans le réservoir 2 :



Les débits volumétriques de sortie sont donnés par $q_{out,1} = k_1\sqrt{h_1}$ et $q_{out,2} = k_2h_2$, où k_1 et k_2 sont des constantes de proportionalité. Les valeurs de k_1, k_2 sont respectivement 0.3 $m^{2.5}s^{-1}$ et 0.75 m^2s^{-1}, celles de S_1 et S_2 respectivement de 2.5 m^2 et 3 m^2.

1. Modéliser ce système en indiquant les hypothèses qui sont faites.
2. Pour $\alpha = 0.5$, linéariser le système autour du point d'équilibre correspondant à $\bar{q}_{in,1} = 0.5$ m^3s^{-1} et $\bar{q}_{in,2} = 0.25$ m^3s^{-1}.

Problème 3 (Laplace) [1.5 points]

a) Calculer la transformée de Laplace de :

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 \leq t < 2 \\ 2 & t \geq 2 \end{cases}$$

b) Calculer la fonction de transfert $G(s) = Y(s)/U(s)$ correspondant à la relation dynamique :

$$\ddot{y}(t) + 4y(t) = u(t-2), \qquad y(0) = \dot{y}(0) = 0.$$

c) Calculer la réponse $y(t)$ pour l'entrée $u(t)$ donnée en (a).

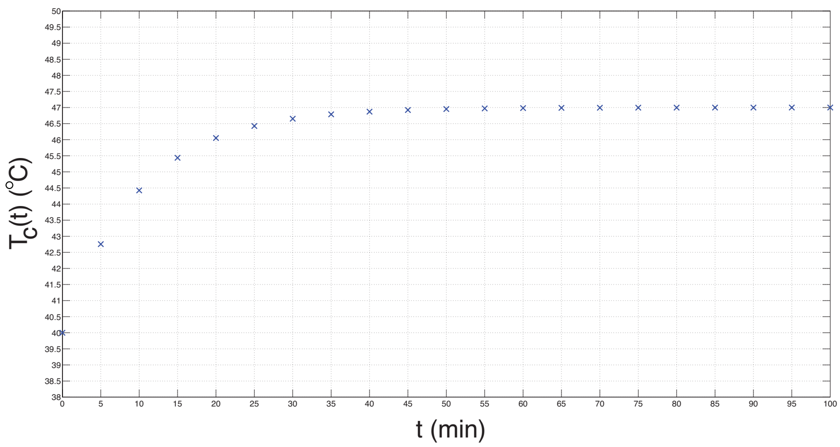
Problème 4 (Systèmes linéaires) [1 point]

On étudie la régulation de la température d'une cuve chauffée par un manteau. Dit simplement, pour augmenter la température de la cuve, T_c, on augmente la température du manteau, T_m, et inversément si on veut la diminuer. On suppose qu'on peut toujours mesurer T_c exactement (sans bruit de mesure).

a) On souhaite obtenir un modèle linéaire en analysant les données expérimentales suivantes résultant de la perturbation :

$$T_m(t) = \begin{cases} 50°C & t < 0 \\ 60°C & t \geq 0 \end{cases}$$

à partir d'un état stationnaire.



Proposer un modèle linéaire de premier ordre, c'est-à-dire déterminer le gain K et la constante de temps τ qui sont en accord avec ces données.

b) En supposant que le système est vraiment linéaire, quelle sera la valeur finale de T_c pour le saut :

$$T_m(t) = \begin{cases} 50°C & t < 0 \\ 55°C & t \geq 0 \end{cases} ?$$

c) On souhaite concevoir un régulateur pour suivre la trajectoire suivante :

$$T_{c,ref}(t) = \begin{cases} 50°C & 0 \leq t < 30\,\mathrm{min} \\ 45°C & t \geq 30\,\mathrm{min} \end{cases}$$

Est-ce un problème d'asservissement ou de régulation ? Est-ce qu'un régulateur PI sera suffisant pour suivre la trajectoire sans statisme ? Justifier vos réponses.

d) En appliquant plusieurs sauts différents sur le vrai système, on constate le comportement suivant :

saut en $T_m(°C)$	$T_c(0)(°C)$	$T_c(\infty)(°C)$
$50 \rightarrow 52$	40	40.5
$50 \rightarrow 54$	40	42
$50 \rightarrow 56$	40	44.3
$50 \rightarrow 58$	40	45.6
$50 \rightarrow 60$	40	47
$50 \rightarrow 62$	40	48
$50 \rightarrow 64$	40	49
$50 \rightarrow 66$	40	50

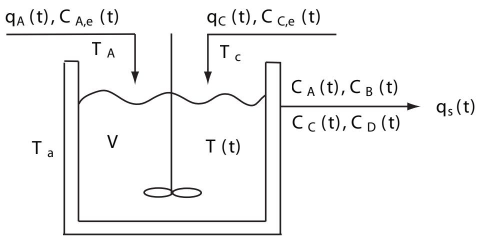
Les résultats sont-ils en accord avec le modèle obtenu en (a) ? Si non, proposer une raison pourquoi ils ne le sont pas.

Problème 1 - Solution

On considère les deux réactions :

$$\begin{array}{lllllll} R1: & A & \rightarrow & B & & & r_1 = k_1 C_A \\ R2: & B & + & C & \rightarrow & D & r_2 = k_2 C_B C_C \end{array}$$

ayant lieu dans un réacteur continu non isotherme de volume constant. La première réaction est exothermique avec une enthalpie de réaction ΔH_1, tandis que la chaleur produite par la seconde réaction est négligeable. Il y a échange de chaleur avec l'extérieur qui se trouve à la température T_a. Les températures T_A et T_C des débits d'alimentation peuvent être considérées constantes. On suppose les densités et les chaleurs spécifiques de tous les débits identiques et constantes.



a) Modéliser ce système dynamique et identifier les variables caractéristiques (variables indépendantes, variables dépendantes, paramètres)

b) Proposer un schéma de commande par rétroaction pour réguler la température dans le réacteur et indiquer la grandeur de commande et la grandeur commandée.

Solution :

Modélisation du système dynamique :

Bilan de masse :

$$\begin{aligned}
\frac{d(\rho V)}{dt} &= \rho\, q_A(t) + \rho\, q_C(t) - \rho\, q_s(t) \\
0 &= q_A(t) + q_C(t) - q_s(t) \\
q_s(t) &= q_A(t) + q_C(t)
\end{aligned}$$

Bilan molaire pour le composant A :

$$\begin{aligned}
V \frac{dC_A(t)}{dt} &= q_A(t)\, C_{A,e}(t) - q_s(t)\, C_A(t) - V\, r_1(t) \\
\frac{dC_A(t)}{dt} &= \frac{q_A(t)}{V}[C_{A,e}(t) - C_A(t)] - \frac{q_C(t)}{V} C_A(t) - k_1 C_A(t)
\end{aligned}$$

Bilan molaire pour le composant B :

$$\begin{aligned}
V \frac{dC_B(t)}{dt} &= -q_s(t)\, C_B(t) + V\, r_1(t) - V\, r_2(t) \\
\frac{dC_B(t)}{dt} &= k_1 C_A(t) - k_2 C_B(t) C_C(t) - \frac{C_B(t)}{V}\, [q_A(t) + q_C(t)]
\end{aligned}$$

Bilan molaire pour le composant C :

$$\begin{aligned}
V \frac{dC_C(t)}{dt} &= q_C(t)\, C_{C,e}(t) - q_s(t)\, C_C(t) - V\, r_2(t) \\
\frac{dC_C(t)}{dt} &= \frac{q_C(t)}{V}\, [C_{C,e}(t) - C_C(t)] - \frac{q_A(t)}{V}\, C_C(t) - k_2 C_B(t) C_C(t)
\end{aligned}$$

Bilan molaire pour le composant D :

$$\begin{aligned}
V \frac{dC_D(t)}{dt} &= -q_s(t)\, C_D(t) + V\, r_2(t) \\
\frac{dC_D(t)}{dt} &= k_2 C_B(t) C_C(t) - C_D(t)[q_A(t) + q_C(t)]
\end{aligned}$$

Bilan d'énergie :

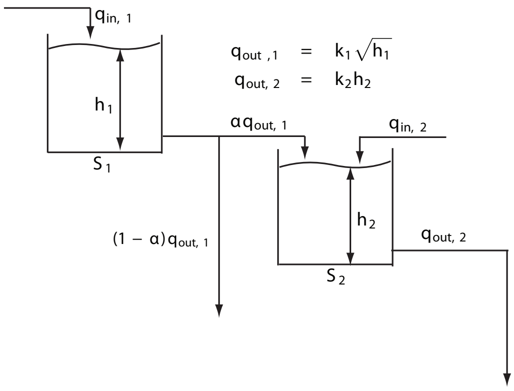
$$\begin{aligned}
\rho c_p V \left(\frac{dT(t)}{dt}\right) &= (-\Delta H_1) V r_1 + UA[T_a - T(t)] + \rho q_A(t) c_p [T_A(t) - T(t)] + \rho q_C(t) c_p [T_C(t) - T(t)] \\
\frac{dT(t)}{dt} = &= \frac{(-\Delta H_1)}{\rho c_p} k_1 C_A(t) + \frac{UA}{\rho c_p V}[T_a - T(t)] + \frac{q_A(t)}{V}[T_A - T(t)] + \frac{q_C(t)}{V}[T_C - T(t)]
\end{aligned}$$

Grandeurs caractéristiques :

1. paramètres constants : ΔH_1, c_p, ρ, k_1, k_2, U
2. grandeurs constantes : T_a, T_A, T_C, V, A
3. variables indépendantes : $q_A(t)$, $q_C(t)$, $C_{A,e}(t)$, $C_{C,e}(t)$
4. variables d'état : $C_A(t)$, $C_B(t)$, $C_C(t)$, $C_D(t)$, $T(t)$.

Problème 2 - Solution

On considère le système de deux réservoirs en série. Chaque réservoir comporte une alimentation propre, $q_{in,1}$ et $q_{in,2}$. En outre, uniquement une partie de la sortie du réservoir 1 entre dans le réservoir 2 :



Les débits volumétriques de sortie sont donnés par $q_{out,1} = k_1\sqrt{h_1}$ et $q_{out,2} = k_2h_2$, où k_1 et k_2 sont des constantes de proportionalité. Les valeurs de k_1, k_2 sont respectivement 0.3 $m^{2.5}s^{-1}$ et 0.75 m^2s^{-1}, celles de S_1 et S_2 respectivement de 2.5 m^2 et 3 m^2.

1. Modéliser ce système en indiquant les hypothèses qui sont faites.
2. Pour $\alpha = 0.5$, linéariser le système autour du point d'équilibre correspondant à $\bar{q}_{in,1} = 0.5\ m^3s^{-1}$ et $\bar{q}_{in,2} = 0.25\ m^3s^{-1}$.

Solution : Supposons ρ constant.

Bilan massique réservoir 1 :

$$\begin{aligned}\rho S_1 \frac{dh_1(t)}{dt} &= \rho q_{in,1}(t) - \rho q_{out,1}(t)\\ \frac{dh_1(t)}{dt} &= \frac{1}{S_1}\left[q_{in,1}(t) - k_1\sqrt{h_1(t)}\right]\end{aligned}$$

Bilan massique réservoir 2 :

$$\begin{aligned}\rho S_2 \frac{dh_2(t)}{dt} &= \rho q_{in,2}(t) + \rho\alpha q_{out,1}(t) - \rho q_{out,2}(t)\\ \frac{dh_2(t)}{dt} &= \frac{1}{S_2}\left[q_{in,2}(t) + \alpha k_1\sqrt{h_1(t)} - k_2h_2(t)\right]\end{aligned}$$

Pour linéariser le système au point d'équilibre :

$$\begin{aligned} f_1\left(q_{in,1}(t), h_1(t)\right) &= \frac{1}{S_1}\left[q_{in,1}(t) - k_1\sqrt{h_1(t)}\right] \\ f_2\left(q_{in,2}(t), h_1(t), h_2(t)\right) &= \frac{1}{S_2}\left[q_{in,2}(t) + \alpha k_1\sqrt{h_1(t)} - k_2 h_2(t)\right] \end{aligned}$$

Au point de fonctionnement stationnaire correspondant à $\bar{q}_{in,1}$ et $\bar{q}_{in,2}$, les variables $\bar{h}_1$ et $\bar{h}_2$ satisfont les relations :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2.5}\left[\bar{q}_{in,1} - 0.3\sqrt{\bar{h}_1}\right] \\ 0 &= \frac{1}{3}\left[\bar{q}_{in,2} + 0.15\sqrt{\bar{h}_1} - 0.75\bar{h}_2(t)\right] \end{aligned}$$

La solution de ce système d'équations non linéaires pour $\bar{q}_{in,1} = 0.5\ m^2 s^{-1}$ et $\bar{q}_{in,2} =\ 0.25 m^2 s^{-1}$ donne $\bar{h}_1 = 2.78$ m et $\bar{h}_2 = 0.67$ m.
On obtient les matrices A et B pour le point d'équilibre :

$$\begin{aligned} a_{11} = \left.\frac{\partial f_1}{\partial h_1}\right| eq &= -\frac{k_1}{S_1}\left[\frac{1}{2\sqrt{\bar{h}_1}}\right] = -0.036 \\ a_{12} = \left.\frac{\partial f_1}{\partial h_2}\right| eq &= 0 \\ a_{21} = \left.\frac{\partial f_2}{\partial h_1}\right| eq &= \frac{\alpha\, k_1}{S_2}\left[\frac{1}{2\sqrt{\bar{h}_1}}\right] = 0.015 \\ a_{22} = \left.\frac{\partial f_2}{\partial h_2}\right| eq &= \frac{1}{3}\left[-0.75\right] = -0.25 \\ b_{11} = \left.\frac{\partial f_1}{\partial q_{in,1}}\right| eq &= \frac{1}{2.5} = 0.400 \\ b_{12} = \left.\frac{\partial f_1}{\partial q_{in,2}}\right| eq &= 0 \\ b_{21} = \left.\frac{\partial f_2}{\partial q_{in,1}}\right| eq &= 0 \\ b_{22} = \left.\frac{\partial f_2}{\partial q_{in,2}}\right| eq &= \frac{1}{3} = 0.333 \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{h}_1 \\ \delta\dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.036 & 0 \\ 0.015 & -0.25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta h_1 \\ \delta h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.400 & 0 \\ 0 & 0.333 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta q_{in,1} \\ \delta q_{in,2} \end{bmatrix}$$

Problème 3 - Solution

a) Calculer la transformée de Laplace de :

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 \leq t < 2 \\ 2 & t \geq 2 \end{cases}$$

b) Calculer la fonction de transfert $G(s) = Y(s)/U(s)$ correspondant à la relation dynamique :

$$\ddot{y}(t) + 4y(t) = u(t-2), \qquad y(0) = \dot{y}(0) = 0.$$

c) Calculer la réponse $y(t)$ pour l'entrée $u(t)$ donnée en (a).

Solution

a) On utilise la définition de la transformée de Laplace (p. 63) :

$$U(s) = \int_0^2 te^{-st}dt + \int_2^\infty 2e^{-st}dt$$

On évalue la première partie par l'intégration par parties :

$$u = t, du = dt, dv = e^{-st}dt, v = -\frac{1}{s}e^{-st}$$

$$\int_0^2 te^{-st}dt = uv]_0^2 - \int_0^2 vdu = -\frac{t}{s}e^{-st}\Big]_0^2 + \int_0^2 \frac{1}{s}e^{-st}dt = \frac{1}{s^2}(1-e^{-2s}) - \frac{2}{s}e^{-2s}$$

et la deuxième :

$$\int_2^\infty 2e^{-st}dt = \frac{2}{s}e^{-2s}$$

ce qui donne :

$$U(s) = \frac{1}{s^2}(1 - e^{-2s})$$

b) Pour calculer la fonction de transfert, on transforme d'abord le système dans le domaine de Laplace :

$$\ddot{y}(t) \to s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) = s^2Y(s)$$

$$y(t) \rightarrow Y(s)$$

$$u(t-2) \rightarrow U(s)e^{-2s}$$

ce qui donne :

$$s^2 Y(s) + 4Y(s) = U(s)e^{-2s}$$

et :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2+4}e^{-2s}$$

c) On évalue $Y(s) = G(s)U(s)$, ce qui donne :

$$Y(s) = \left(\frac{1}{s^2+4}e^{-2s}\right)\left(\frac{1}{s^2}(1-e^{-2s})\right) = \frac{1}{s^2(s^2+4)}e^{-2s} - \frac{1}{s^2(s^2+4)}e^{-4s}$$

On calcule la transformée temporelle de $\frac{1}{s^2(s^2+4)}$ en décomposant en éléments simples :

$$\frac{1}{s^2(s^2+4)} = \frac{As+B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+4} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+4}$$

et on résout pour A, B, C et D :

$$\begin{aligned} 1 &= (As+B)(s^2+4) + (Cs+D)s^2 = (A+C)s^3 + (B+D)s^2 + 4As + 4B \\ \rightarrow & \quad A = 0,\ B = \frac{1}{4},\ C = 0,\ D = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\frac{1}{s^2(s^2+4)} = \frac{1}{4}\frac{1}{s^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{s^2+4}$$

En utilisant le dictionnaire (p. 69), on a :

$$\frac{1}{4}\frac{1}{s^2} \rightarrow \frac{1}{4}t$$

$$\frac{1}{4}\frac{1}{s^2+4} = \frac{1}{4}\frac{1}{2}\frac{2}{s^2+2^2} \rightarrow \frac{1}{8}\sin(2t)$$

ce qui donne :

$$\frac{1}{s^2(s^2+4)} \rightarrow \frac{1}{4}t - \frac{1}{8}\sin(2t)$$

Avec la grammaire (p. 74, Règle V), on peut maintenant calculer les réponses avec les retards pris en compte :

$$\frac{1}{s^2(s^2+4)}e^{-2s} \to \frac{1}{4}\varepsilon(t-2)(t-2) - \frac{1}{8}\varepsilon(t-2)\sin(2t-4)$$

$$\frac{1}{s^2(s^2+4)}e^{-4s} \to \frac{1}{4}\varepsilon(t-4)(t-4) - \frac{1}{8}\varepsilon(t-4)\sin(2t-8)$$

et finalement :

$$y(t) = \frac{1}{4}\varepsilon(t-2)(t-2) - \frac{1}{4}\varepsilon(t-4)(t-4) - \frac{1}{8}\varepsilon(t-2)\sin(2t-4) + \frac{1}{8}\varepsilon(t-4)\sin(2t-8)$$

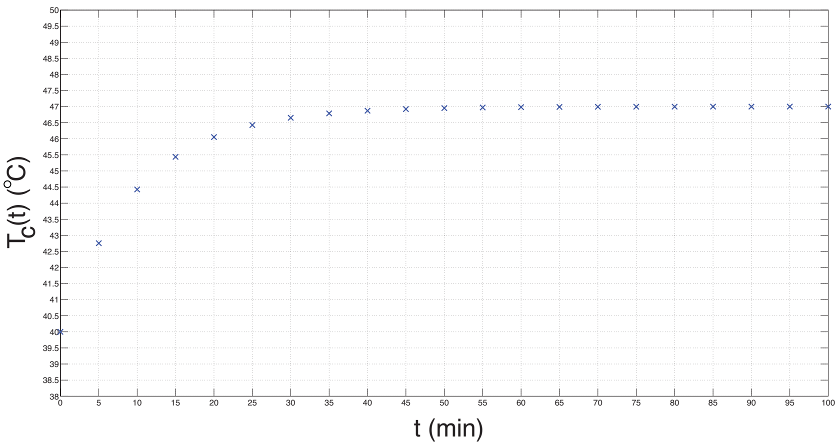
Problème 4 - Solution

On étudie la régulation de la température d'une cuve chauffée par un manteau. Dit simplement, pour augmenter la température de la cuve, T_c, on augmente la température du manteau, T_m, et inversément si on veut la diminuer. On suppose qu'on peut toujours mesurer T_c exactement (sans bruit de mesure).

a) On souhaite obtenir un modèle linéaire en analysant les données expérimentales suivantes résultant de la perturbation :

$$T_m(t) = \begin{cases} 50°C & t < 0 \\ 60°C & t \geq 0 \end{cases}$$

à partir d'un état stationnaire.



Proposer un modèle linéaire de premier ordre, c'est-à-dire déterminer le gain K et la constante de temps τ qui sont en accord avec ces données.

b) En supposant que le système est vraiment linéaire, quelle sera la valeur finale de T_c pour le saut :

$$T_m(t) = \begin{cases} 50°C & t < 0 \\ 55°C & t \geq 0 \end{cases} \; ?$$

c) On souhaite concevoir un régulateur pour suivre la trajectoire suivante :

$$T_{c,ref}(t) = \begin{cases} 50°C & 0 \leq t < 30\,\text{min} \\ 45°C & t \geq 30\,\text{min} \end{cases}$$

Est-ce un problème d'asservissement ou de régulation ? Est-ce qu'un régulateur PI sera suffisant pour suivre la trajectoire sans statisme ? Justifier vos réponses.

d) En appliquant plusieurs sauts différents sur le vrai système, on constate le comportement suivant :

saut en $T_m(°C)$	$T_c(0)(°C)$	$T_c(\infty)(°C)$
$50 \rightarrow 52$	40	40.5
$50 \rightarrow 54$	40	42
$50 \rightarrow 56$	40	44.3
$50 \rightarrow 58$	40	45.6
$50 \rightarrow 60$	40	47
$50 \rightarrow 62$	40	48
$50 \rightarrow 64$	40	49
$50 \rightarrow 66$	40	50

Les résultats sont-ils en accord avec le modèle obtenu en (a) ? Si non, proposer une raison pourquoi ils ne le sont pas.

Solution

a) On commence par calculer le gain K, ce qui est simplement :

$$K = \frac{T_c(\infty) - T_c(0)}{T_m(\infty) - T_m(0)} = \frac{47 - 40}{60 - 50} = 0.7$$

pour un saut appliqué à $t = 0$ min.

Il existe plusieurs façons pour calculer la constante de temps (p. 114). Ici, on la calcule analytiquement, en prenant un instant de temps où la valeur de $T_c(t)$ ne s'est pas encore approchée de sa valeur finale (tous les instants $5 \leq t \leq 35$ pourraient être utilisés, par exemple, mais ici on prend $t = 10$ min) :

$$44.4 = 40 + (0.7)(10)(1 - e^{-\frac{10}{\tau}})$$

que l'on résout pour avoir $\tau \approx 10$ min.

Une façon simple consiste à évaluer τ graphiquement en construisant la tangente à la réponse à l'origine. Cette tangente coupera l'asymptote horizontale à un temps égal à τ.

b) Comme on suppose le système linéaire, le gain K ne change pas, et si un saut de 10°C en T_m a donné une augmentation de 7°C en T_c, un saut de 5°C en T_m devrait augmenter T_c de 3.5°C, ce qui donne une valeur finale de 43.5°C.

c) La trajectoire qu'il faut suivre ne comprend que des sauts. Il faut donc un seul intégrateur pour éviter le problème du statisme (ce qui est donné par un régulateur PI, p. 166). Le problème de commande pour l'horizon entier de t est celui d'asservissement comme la valeur de la consigne n'est pas constante et change par rapport à t. Cependant, on peut également dire que c'est un problème de régulation entre $t = 0$ et $t = 30$ min, et encore pour $t \geq 30$ min.

d) Les résultats ne sont pas en accord avec le modèle linéaire obtenu comme le gain statique est toujours différent (on peut voir, par exemple, que la première ligne donne un gain égal à 0.25 et non pas 0.7). Le fait que le gain change implique que la vraie relation entre T_c et T_m est *non linéaire*.