Commande de procédés - Solutions, Test Mai 2011

Problème 1 - Solution

Soit la cuve bien mélangée équipée d'un manteau donnée à la figure 1. On souhaite réguler la température T et le niveau h dans la cuve en manipulant l'ouverture de la vanne de sortie (α - entre 0 et 1) et le débit de liquide calorifique q_m qui circule dans le manteau. Le débit q_s est proportionnel à h, $q_s = kh$. On peut considérer les grandeurs T_e, q_e et $T_{m,e}$ comme constantes. La relation entre la hauteur h et le volume V peut s'écrire $V(h) = A_0(h + e^{-h} - 1)$ avec A_0 l'aire de la partie cylindrique.

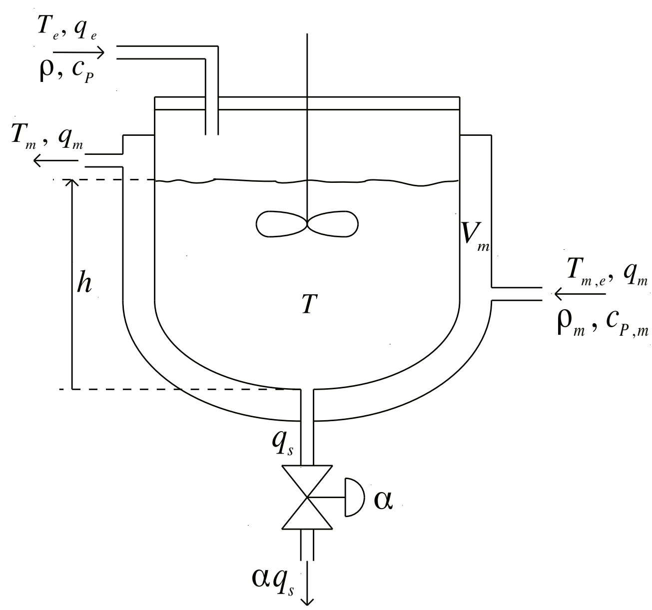


FIGURE 1 – Cuve avec manteau

a) Notre ami le contrôleur nous demande de modéliser ce système pour lui. Introduire les hypothèses nécessaires et développer un modèle dynamique.

Solution

On introduit les hypothèses suivantes :

1. Les masses volumiques ρ, ρ_m et les capacités thermiques massiques $c_P, c_{P,m}$ sont constantes.

2. La cuve et le manteau sont des compartiments homogènes.
3. Il n'y a pas de pertes thermiques vers l'extérieur.
4. Le transfert de chaleur entre le manteau et le gaz dans la cuve est négligeable.
5. Le volume de la région entre la cuve et la vanne est négligeable par rapport au volume de la cuve.

Pour modéliser le système, on écrit un bilan de masse et deux bilans thermiques. On introduit h_c et A_c comme le coefficient de transfert thermique et l'aire cuve-manteau, respectivement.

Bilan de masse pour la cuve

$$\rho \frac{dV}{dt} = \rho q_e - \rho\, \alpha k h$$

Avec

$$\frac{dV}{dh}\frac{dh}{dt} = q_e - \alpha k h$$

$$\frac{dV}{dh} = A_0(1 - e^{-h})$$

le bilan massique devient :

$$A_0(1 - e^{-h})\frac{dh}{dt} = q_e - \alpha k h$$

Bilan thermique pour la cuve

$$\rho c_P \frac{d(VT)}{dt} = \rho c_P q_e T_e - \rho c_P \alpha k h T + h_c A_c (T_m - T)$$

$$\rho c_P \left(T\frac{dV}{dt} + V\frac{dT}{dt} \right) = \rho c_P q_e T_e - \rho c_P \alpha k h T + h_c A_c (T_m - T)$$

$$\rho c_P \left[T\left(q_e - \alpha k h\right) + A_0(h + e^{-h} - 1)\frac{dT}{dt} \right] = \rho c_P q_e T_e - \rho c_P \alpha k h T + h_c A_c (T_m - T)$$

$$A_0(h + e^{-h} - 1)\frac{dT}{dt} = q_e(T_e - T) + \frac{h_c A_c}{\rho\, c_P}(T_m - T)$$

Bilan thermique pour le manteau

$$\rho_m c_{P,m} V_m \frac{dT_m}{dt} = \rho_m c_{P,m} q_m (T_{m,e} - T_m) + h_c A_c (T - T_m)$$

$$V_m \frac{dT_m}{dt} = q_m(T_{m,e} - T_m) + \frac{h_c A_c}{\rho_m c_{P,m}}(T - T_m)$$

b) Proposer une façon de maintenir h à la valeur constante h^*.

Solution

Pour $h = h^*$ constant, le premier bilan se réduit à :

$$0 = q_e - \alpha k h^*$$

ce qui donne :

$$\alpha = \frac{q_e}{k h^*}$$

On peut donc maintenir $h = h^*$ en choisissant cette valeur de α. Cependant, ce n'est que possible pour les cas où $q_e \leq k h^*$, car α ne peut pas être supérieur à 1 (vanne saturée).

c) Pour $h = h^*$, le modèle correspondant est-il linéaire ? Justifier.

Solution

Pour $h = h^*$, le modèle dynamique se réduit à :

$$A_0(h^* + e^{-h^*} - 1)\frac{dT}{dt} = q_e(T_e - T) + \frac{h_c A_c}{\rho c_P}(T_m - T)$$

$$V_m \frac{dT_m}{dt} = q_m(T_{m,e} - T_m) + \frac{h_c A_c}{\rho_m c_{P,m}}(T - T_m)$$

avec :

$$h^* = \frac{q_e}{\alpha k}$$

Le modèle simplifié comporte les états T et T_m et l'entrée q_m (quant à l'entrée α, elle est fixée pour maintenir h constant à la valeur h^*). Ce modèle est non linéaire à cause du terme bilinéaire $q_m T_m$.

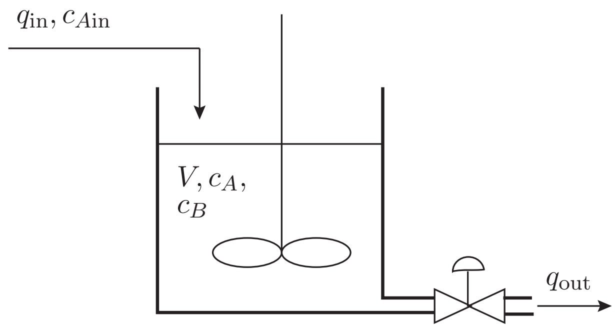


Figure 2 – Réacteur continu

Problème 2 - Solution

Soit la réaction chimique isotherme $2A \to B$ ayant lieu dans le réacteur continu de la figure 2. La réaction est caractérisée par la vitesse de réaction $r = kc_A^2$, avec $k = 1$ l/(mol min). On considère que les débits volumiques q_{in} et q_{out} sont les variables d'entrée (manipulables), que la concentration c_B est la variable de sortie et que $c_{A\text{in}} = 1 \times 10^{-2}$ mol/l.

(a) Ecrire les équations dynamiques pour ce système.

Solution

En écrivant les bilans molaires et le bilan de masse (en supposant la masse volumique constante), on obtient

$$\frac{d}{dt}(Vc_A) = q_{\text{in}}c_{A\text{in}} - q_{\text{out}}c_A - 2Vkc_A^2, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}(Vc_B) = -q_{\text{out}}c_B + kVc_A^2, \tag{2}$$

$$\dot{V} = q_{\text{in}} - q_{\text{out}}. \tag{3}$$

En utilisant la règle des produits, (1) devient

$$\dot{V}c_A + V\dot{c}_A = q_{\text{in}}c_{A\text{in}} - q_{\text{out}}c_A - 2kVc_A^2,$$

En éliminant $\dot{V}$ à l'aide de l'équation (3), on obtient

$$q_{\text{in}}c_A - q_{\text{out}}c_A + V\dot{c}_A = q_{\text{in}}c_{A\text{in}} - q_{\text{out}}c_A - 2Vkc_A^2$$

$$\Rightarrow \quad \dot{c}_A = (c_{A\text{in}} - c_A)\frac{q_{\text{in}}}{V} - 2kc_A^2, \tag{4}$$

et de la même façon :

$$\dot{c}_B = -c_B\frac{q_{\text{in}}}{V} + kc_A^2. \tag{5}$$

(b) Linéariser le système autour du point d'équilibre correspondant à $\bar{q}_{\text{in}} = 10^{-2}$ l/min et $\bar{V} = 1$ l.

Solution

Calculons d'abord les concentrations au point d'équilibre. A ce point les états ne changent pas avec le temps, donc $\dot{c}_A = \dot{c}_B = 0$. Les équations (3),(4) et (5) deviennent

$$\begin{aligned} \bar{q}_{\text{out}} &= \bar{q}_{\text{in}} = 10^{-2}. && (6)\\ 0 &= (10^{-2} - \bar{c}_A)10^{-2} - 2\bar{c}_A^2, && (7)\\ 0 &= -\bar{c}_B 10^{-2} + \bar{c}_A^2. && (8) \end{aligned}$$

En résolvant l'équation quadratique (7), on obtient $\bar{c}_A = 0.5 \times 10^{-2}$. En substituant ce résultat dans l'équation (8), $\bar{c}_B = 0.25 \times 10^{-2}$.

Procédons maintenant à la linéarisation. En prenant $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} c_A & c_B & V \end{bmatrix}^T$ comme vecteur d'état, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} q_{\text{in}} & q_{\text{out}} \end{bmatrix}^T$ comme vecteur d'entrée et $y = c_B$ comme sortie, notre système dynamique peut être mise sous la forme :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} (c_{A\text{in}} - c_A)\frac{q_{\text{in}}}{V} - 2kc_A^2 \\ -c_B\frac{q_{\text{in}}}{V} + kc_A^2 \\ q_{\text{in}} - q_{\text{out}} \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$y = g(\mathbf{x}) = c_B \tag{10}$$

On calcule les dérivés partielles de $\mathbf{f}$ et g :

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -(\frac{q_{\text{in}}}{V} + 4kc_A) & 0 & -\frac{q_{\text{in}}}{V^2}(c_{A\text{in}} - c_A) \\ 2kc_A & -\frac{q_{\text{in}}}{V} & \frac{q_{\text{in}}}{V^2}c_B \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \frac{c_{A\text{in}} - c_A}{V} & 0 \\ -\frac{c_B}{V} & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \tag{12}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{13}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

En substituant les valeurs au point d'équilibre, on obtient

$$A = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}},\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}} = 10^{-2} \times \begin{bmatrix} -3 & 0 & -0.5\times 10^{-2} \\ 1 & -1 & 0.25\times 10^{-2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{15}$$

$$B = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}},\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} 0.5\times 10^{-2} & 0 \\ -0.25\times 10^{-2} & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \tag{16}$$

$$C = \left.\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}},\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{17}$$

$$D = \left.\frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}},\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{18}$$

$$\tag{19}$$

Le modèle linéaire est ainsi :

$$\delta\dot{\mathbf{x}} = A\delta\mathbf{x} + B\delta\mathbf{u}, \qquad \delta y = C\delta\mathbf{x} \tag{20}$$

Problème 3 - Solution

Soit le système dynamique suivant :

$$G(s) = \frac{1}{1+s}$$

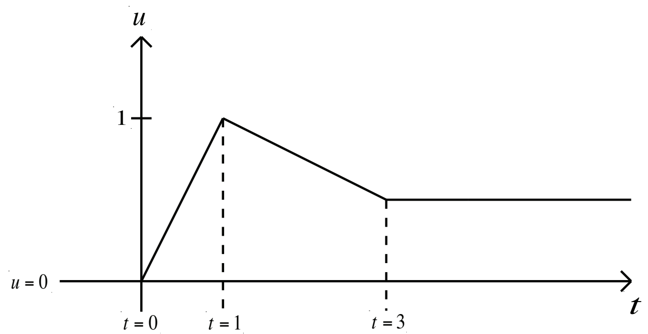
a) Calculer la réponse temporelle de $G(s)$ à l'entrée :

$$u(t) = \begin{cases} t & 0 \le t < 1 \\ -\frac{1}{4}t + \frac{5}{4} & 1 \le t < 3 \\ \frac{1}{2} & t \ge 3 \end{cases}$$

Solution

L'entrée est la suivante :
On peut résoudre le problème de manière graphique en analysant séparément les trois intervalles :

1. On commence par une rampe de pente de 1.
2. A $t = 1$, cette rampe est annulée et remplacée par une autre de pente $-\frac{1}{4}$.



3. A $t=3$, cette dernière est annulée et l'entrée reste constante.

Ces trois étapes peuvent être représentées par la fonction Laplace :

$$u(s)=\frac{1}{s^2}(1-e^{-s})-\frac{1}{4}\frac{1}{s^2}(e^{-s}-e^{-3s})+0(e^{-3s})$$

ou :

$$u(s)=\frac{1}{s^2}(1-\frac{5}{4}e^{-s}+\frac{1}{4}e^{-3s})$$

Pour calculer la réponse, on commence par calculer la réponse à une rampe :

$$y_r(s)=\frac{1}{1+s}\frac{1}{s^2}$$

$$\frac{1}{1+s}\frac{1}{s^2}=\frac{A}{1+s}+\frac{B}{s}+\frac{C}{s^2}$$

$$1=As^2+Bs(s+1)+C(s+1)$$

d'où on tire :

$$A=1,\ B=-1,\ C=1$$

Ainsi :

$$y_r(s)=\frac{1}{1+s}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}$$

ce qui donne dans le domaine temporel :

$$y_r(t)=e^{-t}-1+t$$

La réponse cherchée est donnée par :

$$y(s) = G(s)u(s) = y_r(s)(1 - \frac{5}{4}e^{-s} + \frac{1}{4}e^{-3s})$$

$$y(t) = y_r(t) - \frac{5}{4}\varepsilon(t-1)y_r(t-1) + \frac{1}{4}\varepsilon(t-3)y_r(t-3)$$

$$y(t) = e^{-t} - 1 + t - \frac{5}{4}\varepsilon(t-1)(e^{-(t-1)} - 1 + t - 1) + \frac{1}{4}\varepsilon(t-3)(e^{-(t-3)} - 1 + t - 3)$$

$$y(t) = e^{-t} - 1 + t - \frac{5}{4}\varepsilon(t-1)(e^{-(t-1)} - 2 + t) + \frac{1}{4}\varepsilon(t-3)(e^{-(t-3)} - 4 + t)$$

b) Quelle est la valeur finale de cette réponse ?

Solution

On prend la limite de la réponse temporelle pour calculer la valeur finale :

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} \left[e^{-t} - 1 + t - \frac{5}{4}(e^{-(t-1)} - 2 + t) + \frac{1}{4}(e^{-(t-3)} - 4 + t)\right] = 0.5$$

Problème 4 - Solution

(a) On a modélisé les deux cuves cylindriques de la figure 3 et obtenu les fonctions de transfert suivantes :

$$\frac{Q_1(s)}{Q_{\text{in}}(s)} = \frac{0.5}{0.25s+1}, \quad \frac{Q_{\text{out}}(s)}{Q_1(s)} = \frac{0.6}{s+1}. \tag{21}$$

Calculer la fonction de transfert $\frac{Q_{\text{out}}(s)}{Q_{\text{in}}(s)}$. Le système de deux cuves ainsi modélisé est-il linéaire ?

Solution

En prenant le produit des deux fonctions de transfert, on obtient

$$\frac{Q_{\text{out}}(s)}{Q_{\text{in}}(s)} = \frac{0.3}{(s+1)(0.25s+1)}. \tag{22}$$

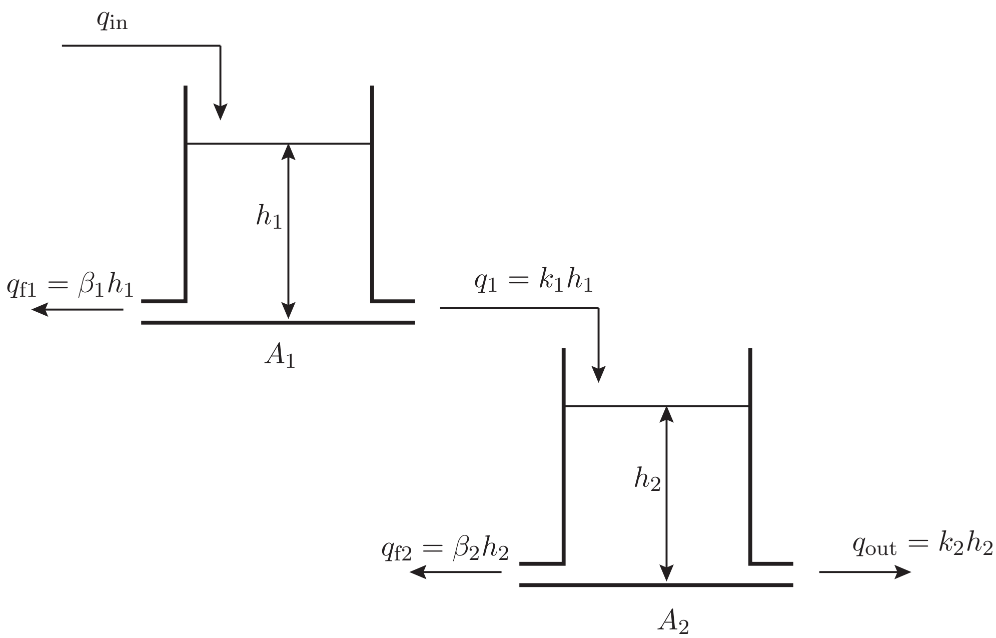


FIGURE 3 – Système de deux cuves cylindriques

Les fonctions de transfert modélisent des relations linéaires entre une entrée et une sortie, et donc ne s'appliquent qu'à des systèmes linéaires. Un système qu'on peut décrire avec une fonction de transfert est forcément linéaire.

(b) Evaluer graphiquement (sans calcul) le gain statique, la constante de temps dominante et le coefficient d'amortissement des systèmes correspondant aux trois réponses indicielles de la figure 4.

Solution

Les trois fonctions de transfert utilisés pour générer ces réponses sont :

$$G_1(s) = \frac{0.3}{0.25s + 1}. \tag{23}$$

C'est un système du premier ordre, le concept d'amortissement ne s'applique pas, $\tau = 0.25s, K = 0.3$.

$$G_2(s) = \frac{0.3}{(s + 1)(0.25s + 1)}. \tag{24}$$

Les deux pôles sont distincts, on utilise la notion de constante de temps dominante, $\tau_{dominant} = 1s, K = 0.3, \zeta = 1.25$ (cas sur-amorti). Par une

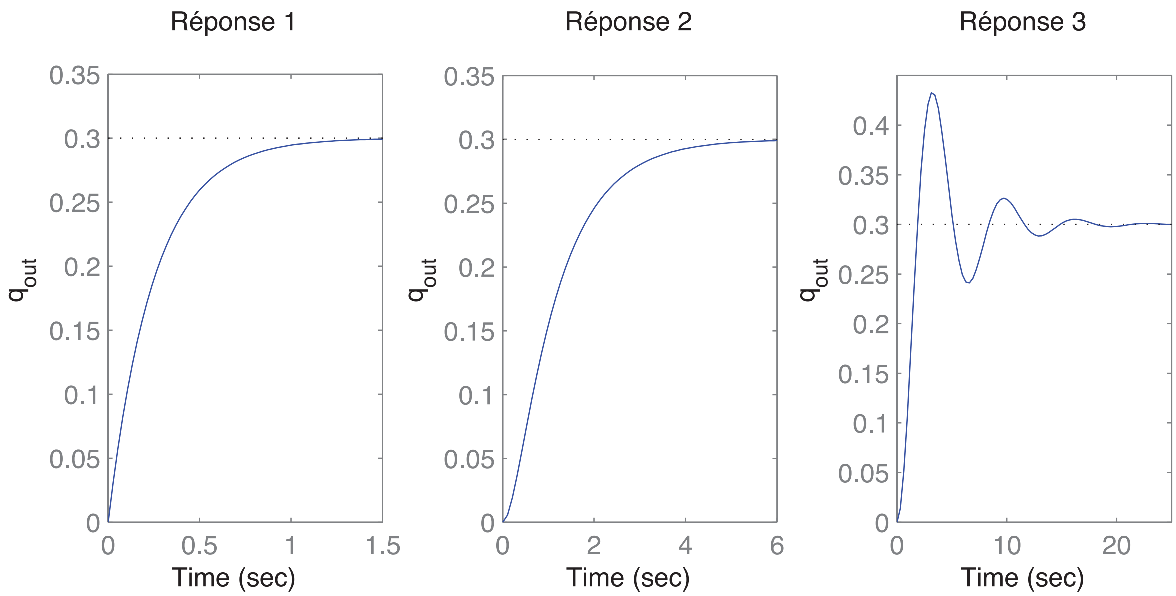


FIGURE 4 – Réponses indicielles

analyse graphique on voit que ce n'est pas un système de premier ordre car il y a une légère inflexion dans la pente au début de la réponse. Il n'y a pas d'oscillations donc les pôles sont sur-amorti ($\zeta > 1$). Pour trouver la constante de temps dominante on regarde le temps a laquelle la réponse atteignit $0.63 \times 0.3 = 0.18$, on peut voire que c'est environ $1s$.

$$G_3(s) = \frac{0.3}{s^2 + 2(0.25)s + 1}. \tag{25}$$

Les deux pôles sont complexes, on utilise la notion de constante de temps équivalente, $\tau = 1s, K = 0.3, \zeta = 0.25$ (cas sous-amorti). Par une analyse graphique les oscillations nous indiquent qu'il s'agit d'un système avec des pôles complexes ($\zeta < 1$). On pourrait déterminer ζ et τ exactement en mesurant le temps et l'amplitude du premier maximum mais il faudrait résoudre des équations pour le faire. On peut utiliser le fait que la constante de temps équivalente satisfait $\tau < \pi t_p$, avec t_p le temps a laquelle on voit le premier maximum, et quand ζ tend vers 0 cette relation tend vers l'égalité. Alors vu que $t_p \simeq 3$ on peut dire que

$\tau \simeq 1$.

(c) Laquelle des trois réponses correspond à la fonction de transfert calculée au point (a) ?

Solution

La réponse 2.