Commande de procédés, Test Mai 2010

Nom:

Prénom:

Ex.	1	2	3	4	Total
1					

Exercice # 1 (Modélisation) Soit la réaction chimique endotherme $A + B \rightarrow C$ ayant lieu dans le réacteur gaz-liquide de la figure 1 équipé d'un corps de chauffe. Le composant A transfère du gaz vers le liquide avec le flux $N_A(t) = k_g\, p_A(t)$ où k_g (kmol s^{-1} atm^{-1}) est le coefficient de transfert de masse et p_A (atm) la pression partielle du gaz A. La variation de volume du liquide due au transfert de masse du composant A est négligeable. La phase liquide est alimentée par un débit volumique variable $q_{le}(t)$ (m^3 s^{-1}) de concentration c_{Be} (kmol m^{-3}) et température T_{Be} (K) constantes. De même, la phase gazeuse est alimentée par un débit volumique variable $q_{ge}(t)$ de concentration c_{Ae} constante. Les débits de sortie correspondants, q_{ls} et q_{gs}, sont maintenus constants par une pompe. La température du gaz T_g varie peu et peut être considérée comme constante. Les volumes du réacteur, de la phase gazeuse et de la phase liquide sont respectivement V_r, V_g, et V_l (m^3). La puissance de chauffe est $P(t)$ (kW).

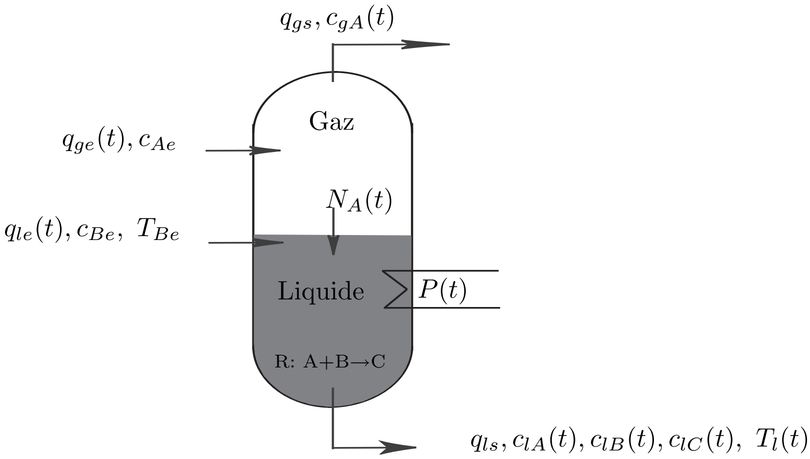


Figure 1: Réacteur gaz-liquide.

La réaction chimique est caractérisée par l'enthalpie de réaction $\Delta H > 0$ (kJ kmol^{-1}) et la vitesse de réaction $r(t)$ (kmol s^{-1} m^{-3}):

$$r(t) = k_0\ exp\Big(\frac{-E}{RT_l(t)}\Big) c_{lA}(t)\, c_{lB}(t),$$

où $T_l(t)$ représente la température de la phase liquide.

a. Indiquer les suppositions et modéliser ce système dynamique. (Point 1.5)

b. Identifier les variables d'entrée, les variables d'état ainsi que les grandeurs constantes. (Point 0.5)

Solution # 1

(a) Les suppositions: (i) Les phases gazeuse et liquide sont homogènes, (ii) les pertes thermiques sont négligeables, (iii) c_p et ρ_l sont constants.

Modélisation du système dynamique

La phase liquide:

Bilan de masse:

$$\begin{aligned}\frac{d(\rho_l V_l(t))}{dt} &= \rho_l\, q_{le}(t) - \rho_l\, q_{ls} \\ \frac{dV_l(t)}{dt} &= q_{le}(t) - q_{ls} \qquad (1)\end{aligned}$$

Bilan molaire pour le composant A:

$$\begin{aligned}\frac{d(c_{lA}(t)V_l(t))}{dt} &= V_l(t)\frac{dc_{lA}(t)}{dt} + \frac{dV_l(t)}{dt}c_{lA}(t = -V_l(t)\, r(t) + N_A(t) - q_{ls}c_{lA}(t) \\ V_l(t)\frac{dc_{lA}(t)}{dt} &= -V_l\, k_0\ exp\Big(\frac{-E}{RT_l(t)}\Big)c_{lA}(t)\, c_{lB}(t) + N_A(t) - q_{ls}c_{lA}(t) - (q_{le}(t) - q_{ls})c_{lA} \\ \frac{dc_{lA}(t)}{dt} &= -k_0\ exp\Big(\frac{-E}{RT_l(t)}\Big)c_{lA}(t)\, c_{lB}(t) + \frac{N_A(t)}{V_l(t)} - \frac{q_{le}(t)}{V_l(t)}c_{lA}(t) \qquad (2)\end{aligned}$$

Bilan molaire pour le composant B:

$$\begin{aligned}\frac{d(c_{lB}(t)V_l(t))}{dt} &= V_l(t)\frac{dc_{lB}(t)}{dt} + \frac{dV_l(t)}{dt}c_{lB}(t) = -V_l(t)\, r(t) + q_{le}(t)c_{Be} - q_{ls}c_{lB}(t) \\ \frac{dc_{lB}(t)}{dt} &= -k_0\ exp\Big(\frac{-E}{RT_l(t)}\Big)c_{lA}(t)\, c_{lB}(t) + \frac{q_{le}(t)}{V_l(t)}(c_{Be} - c_{lB}(t)) \qquad (3)\end{aligned}$$

Bilan molaire pour le composant C:

$$\begin{aligned}\frac{d(c_{lC}(t)V_l(t))}{dt} &= V_l(t)\frac{dc_{lC}(t)}{dt} + \frac{dV_l(t)}{dt}c_{lC}(t) = V_l(t)\, r(t) - q_{ls}c_{lC}(t) \\ \frac{dc_{lC}(t)}{dt} &= k_0\ exp\Big(\frac{-E}{RT_l(t)}\Big)c_{lA}(t)\, c_{lB}(t) - \frac{q_{le}(t)}{V_l(t)}c_{lC}(t) \qquad (4)\end{aligned}$$

Bilan d'énergie:

$$\begin{aligned}\frac{d(\rho_l c_p T_l(t)V_l(t))}{dt} &= \rho_l c_p\Big(V_l(t)\frac{dT_l(t)}{dt} + \frac{dV_l(t)}{dt}T_l(t)\Big) \\ &= (-\Delta H)V_l(t)\, r(t) + \rho_l c_p q_{le}(t)T_{Be} - \rho_l\, c_p\, q_{ls}T_l(t) + P(t) \\ \frac{dT_l(t)}{dt} &= \frac{(-\Delta H)\, k_0}{\rho_l\, c_p}\ exp\Big(\frac{-E}{RT_l(t)}\Big)c_{lA}(t)\, c_{lB}(t) + \frac{q_{le}(t)}{V_l(t)}(T_{Be} - T_l(t)) + \frac{P(t)}{\rho_l\, c_p V_l(t)} \qquad (5)\end{aligned}$$

La phase gazeuse:

Dans la phase gazeuse, $V_g(t) = V_r - V_l(t)$ et $\frac{dV_g(t)}{dt} = -\frac{dV_l(t)}{dt}$.

Bilan molaire pour le composant A:

$$\begin{aligned}
\frac{d(c_{gA}(t)V_g(t))}{dt} &= V_g(t)\frac{dc_{gA}(t)}{dt} + \frac{dV_g(t)}{dt}c_{gA}(t) = q_{ge}(t)c_{Ae} - N_A(t) - q_{gs}c_{gA}(t) \\
\frac{dc_{gA}(t)}{dt} &= \frac{q_{ge}(t)}{V_g(t)}c_{Ae} - \frac{N_A(t)}{V_g(t)} + (q_{le}(t) - q_{ls} - q_{gs})\frac{c_{gA}(t)}{V_g(t)} \qquad (6)
\end{aligned}$$

Le flux $N_A(t)$ peut s'écrire comme suit avec la loi des gaz parfaits:

$$N_A(t) = k_g\, p_A(t) = k_g\, c_{gA}(t)\, R\, T_g. \qquad (7)$$

(b) Grandeurs caractéristiques:

- paramètres constants: R, k_0, E, ΔH, V_r, c_p, ρ_l, k_g
- variables constantes: T_g, q_{gs}, q_{ls}, c_{Ae}, c_{Be}, T_{Be}
- variables d'entrée: $q_{le}(t)$, $q_{ge}(t)$, $P(t)$
- variables d'état: $c_{gA}(t)$, $V_l(t)$, $c_{lA}(t)$, $c_{lB}(t)$, $c_{lC}(t)$, $T_l(t)$

Exercice # 2 (Linéarisation) Considérons le système de deux bacs donnée à la figure 2. Les bacs sont connectés entre eux par une vanne. Les débits volumiques de sortie sont $q_{out,1} = k_1\sqrt{h_1}$ et $q_{out,2} = k_2\sqrt{h_2}$ ($\mathrm{m}^3\ \mathrm{s}^{-1}$) où h_1 et h_2 (m) représentent les niveaux du liquide dans les bacs 1 et 2. Les coefficients de proportionnalité sont $k_1 = k_2 = 0.1$. La fraction α du débit de sortie $q_{out,1}$ est retournée vers le bac 2. Le débit volumique entre les deux bacs est $q_{12} = k_{12}\sqrt{h_1 - h_2}$ avec le coefficient de proportionnalité $k_{12} = 0.05$. On dispose de l'information suivante: $\alpha = 0.35$ et la surface de section des bacs S= 2 m^2.

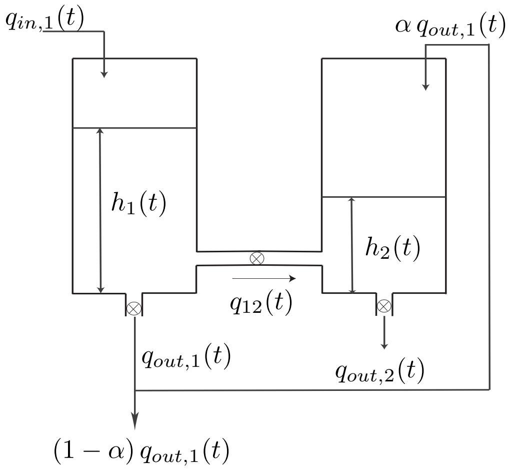


Figure 2: Schéma du système 2 bacs.

a. Indiquer les suppositions et modéliser ce système dynamique. (Point 0.5)

b. Linéariser ce système autour du point d'équilibre $\bar{h}_1 = 2.18$ m et $\bar{h}_2 = 1.08$ m correspondant à $\bar{q}_{in,1} = 0.2\ \mathrm{m}^3\,\mathrm{s}^{-1}$. (Point 0.5)

Solution # 2

(a) Supposition: ρ est constant.

Bilan massique Bac 1:

$$\begin{aligned}\rho S \frac{dh_1(t)}{dt} &= \rho q_{in,1}(t) - \rho q_{12}(t) - \rho q_{out,1}(t) \\ \frac{dh_1(t)}{dt} &= \frac{1}{S}\big(q_{in,1}(t) - k_{12}\sqrt{h_1(t) - h_2(t)} - k_1\sqrt{h_1(t)}\big) \end{aligned} \tag{8}$$

Bilan massique Bac 2:

$$\begin{aligned}\rho S \frac{dh_2(t)}{dt} &= \rho\alpha q_{out,1}(t) + \rho q_{12}(t) - \rho q_{out,2}(t) \\ \frac{dh_2(t)}{dt} &= \frac{1}{S}\big(\alpha k_1\sqrt{h_1(t)} + k_{12}\sqrt{h_1(t) - h_2(t)} - k_2\sqrt{h_2(t)}\big) \end{aligned} \tag{9}$$

(b) On désire linéariser le modèle pour le point d'équilibre $\bar{h}_1 = 2.18$ m, $\bar{h}_2 = 1.08$ m. On a ainsi:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{S}\big(q_{in,1}(t) - k_{12}\sqrt{h_1(t) - h_2(t)} - k_1\sqrt{h_1(t)}\big) \\ f_2 &= \frac{1}{S}\big(\alpha k_1\sqrt{h_1(t)} + k_{12}\sqrt{h_1(t) - h_2(t)} - k_2\sqrt{h_2(t)}\big) \end{aligned} \tag{10}$$

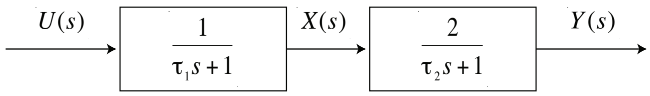
On obtient les matrices A et B pour le point d'équilibre:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\partial f_1}{\partial h_1}\bigg|_{eq} = \frac{1}{S}\Big(-\frac{k_{12}}{2\sqrt{\bar{h}_1 - \bar{h}_2}} - \frac{k_1}{2\sqrt{\bar{h}_1}}\Big) = -0.029 \\ a_{12} &= \frac{\partial f_1}{\partial h_2}\bigg|_{eq} = \frac{1}{S}\Big(\frac{k_{12}}{2\sqrt{\bar{h}_1 - \bar{h}_2}}\Big) = 0.012 \\ a_{21} &= \frac{\partial f_2}{\partial h_1}\bigg|_{eq} = \frac{1}{S}\Big(\frac{\alpha k_1}{2\sqrt{\bar{h}_1}} + \frac{k_{12}}{2\sqrt{\bar{h}_1 - \bar{h}_2}}\Big) = 0.018 \\ a_{22} &= \frac{\partial f_2}{\partial h_2}\bigg|_{eq} = \frac{1}{S}\Big(-\frac{k_{12}}{2\sqrt{\bar{h}_1 - \bar{h}_2}} - \frac{k_2}{2\sqrt{\bar{h}_2}}\Big) = -0.036 \\ b_{11} &= \frac{\partial f_1}{\partial q_{in,1}}\bigg|_{eq} = \frac{1}{S} = 0.5 \\ b_{21} &= \frac{\partial f_2}{\partial q_{in,1}}\bigg|_{eq} = 0 \end{aligned}$$

Avec les matrices A et B, on obtient l'équation dynamique suivante:

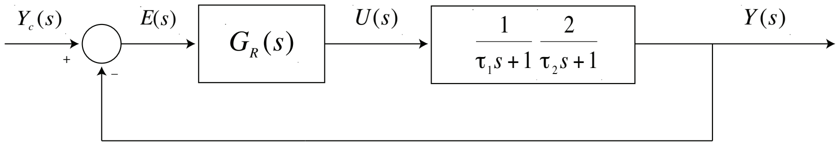
$$\begin{bmatrix}\delta\dot{h}_1 \\ \delta\dot{h}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0.029 & 0.012 \\ 0.018 & -0.036\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta h_1 \\ \delta h_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0.5 \\ 0\end{bmatrix}\delta q_{in,1} \tag{11}$$

Exercice # 3 (Régulateur P)
Soit un système modélisé par deux compartiments du premier ordre en série:



a) Pour le cas où $\tau_1 = 0.5$ et $\tau_2 = 1.5$, calculer le gain statique, la constante de temps équivalente et le coefficient d'amortissement du système. Ce système est-il sur-amorti (justifier votre réponse)? (Point 0.5)

b) Vous êtes chargé(e) de concevoir un régulateur G_R pour ce procédé, comme indiqué ci-dessous:



Votre nouveau collaborateur (qui n'a pas suivi le cours CP) vous propose d'utiliser un régulateur P avec un gain proportionnel K_R. Montrez lui pourquoi ça ne marcherait pas bien, et donnez lui la valeur de l'erreur statique en fonction de K_R pour un saut unité de la consigne. (Point 0.5)

Solution # 3

a) Le gain statique est donné par $K = K_1 K_2 = 1 \cdot 2 = 2$. La constante de temps équivalente est $\tau = \sqrt{\tau_1 \tau_2} = \sqrt{(0.5)(1.5)} = 0.866$. Pour analyser l'amortissement, on calcule $\zeta = \frac{\tau_1+\tau_2}{2\tau} = \frac{2}{2(0.866)} = 1.155$, ce qui nous indique que le système est effectivement sur-amorti.

b) La réponse en boucle fermée est donnée par:

$$Y = \frac{G_R G_P}{1 + G_R G_P} Y_c$$

avec

$$G_R = K_R$$
$$G_P = \frac{2}{(0.5s+1)(1.5s+1)} = \frac{2}{0.75s^2+2s+1}$$

ce qui donne:

$$Y = \frac{\frac{2K_R}{0.75s^2+2s+1}}{1+\frac{2K_R}{0.75s^2+2s+1}} \frac{1}{s} = \frac{2K_R}{0.75s^2+2s+1+2K_R} \frac{1}{s}.$$

Avec le théorème de la valeur finale:

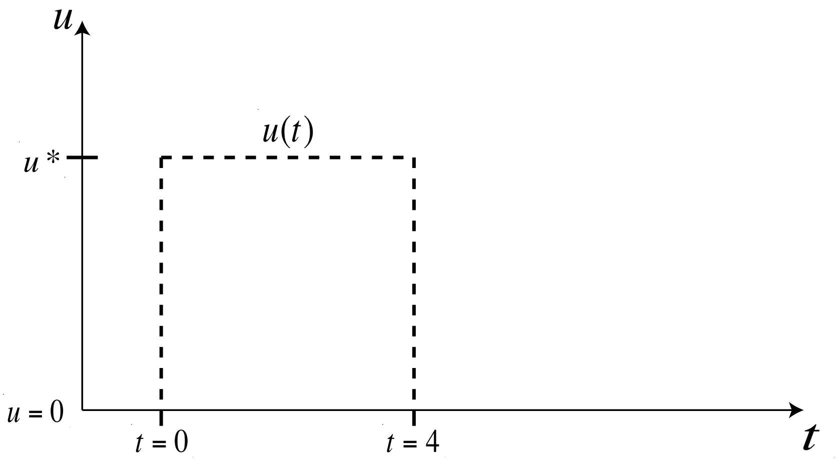
$$\lim_{s\to 0}[sY(s)] = \lim_{s\to 0}\left[s\frac{2K_R}{0.75s^2+2s+1+2K_R}\frac{1}{s}\right] = \frac{2K_R}{1+2K_R}$$

Donc, un régulateur P n'arrive pas à éliminer le statisme, lequel est défini comme $1 - \frac{2K_R}{1+2K_R} = \frac{1}{1+2K_R}$, et disparaîtra uniquement pour $K_R \to \infty$ (un choix peu réaliste).

Exercice # 4 (Réponse temporelle)

Pour un système exprimental, vous avez identifié la fonction de transfert $G(s) = \frac{0.7e^{-1.6s}}{2s+1}$.

a) Vous désirez appliquer l'entrée suivante à ce système. Donner l'expression pour $U(s)$. (Point 0.5)



b) Calculer la réponse correspondante $y(t)$. (Point 0.5)

Solution # 4

a) Un échelon de durée finie peut être exprimé comme (pour un saut u^* et durée 4 s):

$$U(s) = \frac{u^*}{s}(1 - e^{-4s})$$

b) La réponse pour la sortie peut être écrite comme le produit de $G(s)$ et $U(s)$:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{0.7e^{-1.6s}}{2s+1}\frac{u^*}{s}(1 - e^{-4s}) = 0.7u^*\frac{1}{s(2s+1)}(e^{-1.6s} - e^{-5.6s})$$

On décompose et obtient:

$$\frac{1}{s(2s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{2s+1}$$

$$1 = A(2s+1) + Bs$$

Ce qui donne $A = 1$ et $B = -2$, et:

$$Y(s) = 0.7u^*(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+0.5})(e^{-1.6s} - e^{-5.6s}) = 0.7u^*(\frac{1}{s}e^{-1.6s} - \frac{1}{s+0.5}e^{-1.6s} - \frac{1}{s}e^{-5.6s} + \frac{1}{s+0.5}e^{-5.6s})$$

En prenant la transformation de Laplace inverse de chaque terme, on obtient:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = 0.7u^*[\varepsilon(t-1.6) - e^{-\frac{t-1.6}{2}}\varepsilon(t-1.6) - \varepsilon(t-5.6) + e^{-\frac{t-5.6}{2}}\varepsilon(t-5.6)].$$