Systèmes dynamiques —— Contrôle continu, Mai 2010

Nom:

Prénom:

Ex.	1	2	3	4	Total

Exercice 1 (Modélisation, Modèle d'état, Linéarisation) (2 points)

Le fonctionnement d'un microphone électroacoustique repose sur la variation de la capacité d'un condensateur formé d'une électrode mobile soumise à la pression acoustique et d'une contre-électrode fixe.

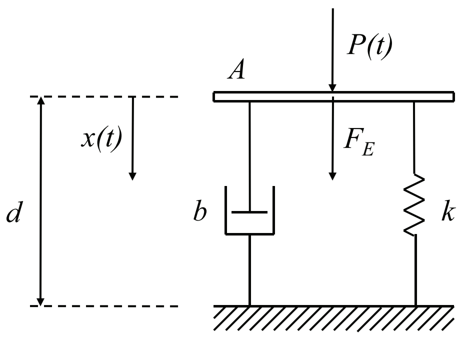


Fig. 1

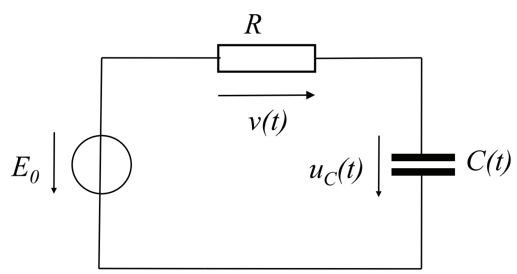


Fig.2

Du point de vue mécanique (Fig.1), l'électrode mobile est une membrane possédant une masse m, une rigidité k, et un facteur de dissipation b (frottement visqueux). Elle est soumise à la pression acoustique $P(t)$ et à une force électrostatique F_E constante. $x(t)$ correspond au déplacement de l'électrode et A à l'aire des électrodes.

Du point de vue électrique (Fig.2), on branche le condensateur variable de capacité

$$C(t) = \frac{\varepsilon_0 A}{d - x(t)} \quad , \quad \varepsilon_0\text{: permittivité du vide}$$

dans un circuit électrique RC polarisé par une source de tension constante E_0.

Le système "microphone acoustique" a comme entrée la pression acoustique $P(t)$ et comme sortie la tension v(t).

a. Ecrire l'équation dynamique du modèle mécanique.

b. Montrer à partir de la relation

$$\mathrm{v}(t) = R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{C(t)u_c(t)\}$$

que l'équation dynamique du modèle électrique est:

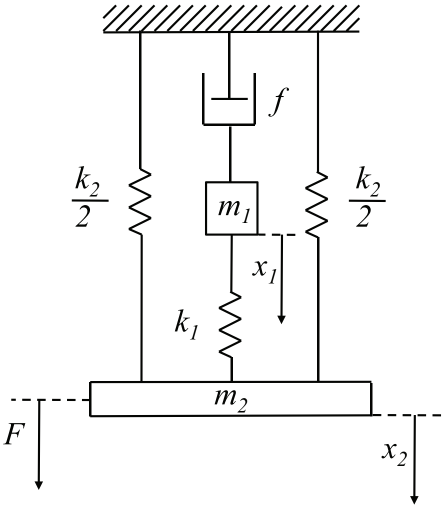
$$\dot{\mathrm{v}}(t) = \frac{x(t) - d}{\varepsilon_0 AR}\,\mathrm{v}(t) + \frac{E_0 - \mathrm{v}(t)}{d - x(t)}\,\dot{x}(t)$$

c. Ecrire un modèle d'état du système.

d. Calculer le point de fonctionnement correspondant à $P(t) = 0$ et $\mathrm{v(t)} = 0$, et linéariser le système autour de celui-ci.

Exercice 2 (Modélisation, fonction de transfert, système analogue) (1 point)

Une force extérieure $F(t)$ est exercée sur la masse m_2 d'un système mécanique. Sur la figure, les déplacements x_1 et x_2 sont mesurés à partir de leur position d'équilibre.



a. Ecrire les équations dynamiques du système.

b. Calculer la fonction de tranfert $X_2(s)/F(s)$. Quel est l'ordre du système?

c. Proposer un système électrique qui soit analogue à ce système mécanique.

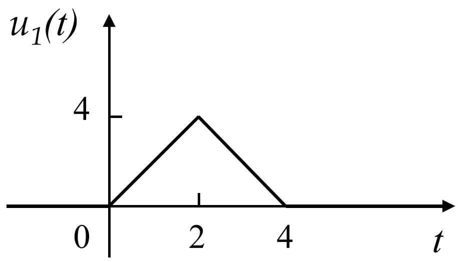
Exercice 3 (Principe de superposition, convolution) (1 point)

Un système dynamique est décrit par l'équation différentielle suivante:

$$\dot{y}(t) + 2y(t) = 2u(t) \quad , \qquad \text{avec } y(0) = 0$$

a. Calculer la réponse du système pour $u(t) = t$.

b. Ecrire l'expression temporelle du signal $u_1(t)$ representé à la figure ci-dessous. A l'aide du principe de superposition et du résultat trouvé au point a), calculer la réponse du système pour l'entrée $u_1(t)$.



c. A l'aide de l'intégrale de convolution, calculer la réponse du système pour $u(t) = 3e^{-3t}$.

Exercice 4 (Réponse impulsionnelle) (1 point)

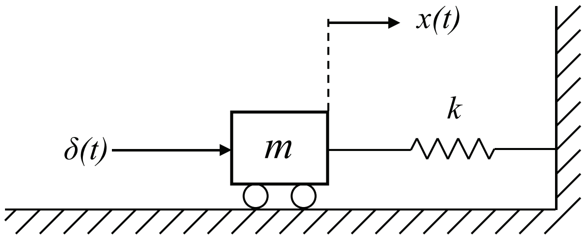


Fig.1

La masse m de la Fig.1, initialement au repos en $x(0) = 0$, est mise en mouvement par une force impulsionnelle $\delta(t)$.

a. Calculer et tracer la réponse $x(t)$.

b. Est-il possible de stopper le mouvement de la masse m, la première fois qu'elle passe par l'origine $x = 0$, à l'aide d'une autre force impulsionnelle du même type? Si oui, donner l'expression analytique de cette force.

Contrôle continu, Mai 2010 — Solutions

Exercice 1

a) Equation dynamique :

$$m\ddot{x}(t) = AP(t) - b\dot{x}(t) - kx(t) + F_E \quad (1)$$

b) $$v(t) = R\frac{d}{dt}\left\{C(t)\,u_c(t)\right\}$$

$$= R\frac{d}{dt}\left\{C(t)\left[E_0 - v(t)\right]\right\}$$

$$= \varepsilon_0 A R \frac{d}{dt}\left\{\frac{E_0 - v(t)}{d - x(t)}\right\}$$

$$= \varepsilon_0 A R \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{E_0 - v(t)}{d - x(t)}\right)\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E_0 - v(t)}{d - x(t)}\right)\cdot\frac{dv}{dt}\right\}$$

$$= \varepsilon_0 A R \left\{\frac{E_0 - v(t)}{(d - x(t))^2}\cdot\dot{x}(t) - \frac{1}{d - x(t)}\cdot\dot{v}(t)\right\}$$

Alors :

$$\frac{v(t)}{\varepsilon_0 A R} = \frac{E_0 - v(t)}{(d - x(t))^2}\cdot\dot{x}(t) - \frac{1}{d - x(t)}\cdot\dot{v}(t) \Rightarrow$$

$$\dot{v}(t) = \frac{x(t) - d}{\varepsilon_0 A R}\cdot v(t) + \frac{E_0 - v(t)}{d - x(t)}\cdot\dot{x}(t) \quad \text{c.q.f.d.}$$

c) Modèle d'état :

entrée : $u(t) = P(t)$

sortie : $y(t) = v(t)$

états : $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = \dot{x}(t)$, $x_3(t) = v(t)$

$$x_1(t) = x(t) \longrightarrow \quad \dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$x_2(t) = \dot{x}(t) \longrightarrow \quad \dot{x}_2(t) = \frac{1}{m}\left(A\,u(t) - b\,x_2(t) - k\,x_1(t) + F_E\right)$$

$$x_3(t) = v(t) \longrightarrow \quad \dot{x}_3(t) = \frac{x_1(t) - d}{\varepsilon_0 A R} \cdot x_3(t) + \frac{E_0 - x_3(t)}{d - x_1(t)} \cdot x_2(t)$$

$$y(t) = x_3(t)$$

d) Point de fonctionnement :

$$\bar{P} = \bar{V} = 0$$

$$① \longrightarrow \quad 0 = -k\bar{x} + F_E \Rightarrow \bar{x} = F_E/k$$

point de fonctionnement : $\bar{x}_1 = F_E/k$, $\bar{x}_2 = \bar{x}_3 = 0$, $\bar{u} = 0$

Modèle d'état linéaire :

$$\delta \dot{x}(t) = A\,\delta x(t) + B\,\delta u(t)$$

$$\delta y(t) = C\,\delta x(t) + D\,\delta u(t)$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -k/m & -b/m & 0 \\ 0 & \dfrac{E_0}{d - F_E/k} & \dfrac{F_E/k - d}{\varepsilon_0 A R} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ A/m \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 2

a) Les équations dynamiques du système sont :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -f \dot{x}_1 - k_1 (x_1 - x_2) \\ m_2 \ddot{x}_2 = F - k_1 (x_2 - x_1) - k_2 x_2 \end{cases}$$

b) En effectuant la transformation de Laplace de ces deux équations et en supposant que les conditions initiales sont nulles, nous avons :

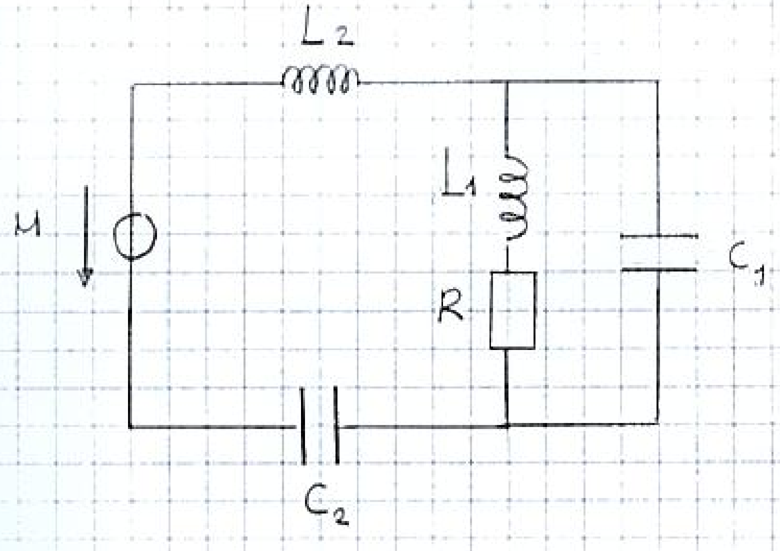
$$\begin{cases} m_1 s^2 X_1(s) = -f s X_1(s) - k_1 X_1(s) + k_1 X_2(s) \\ m_2 s^2 X_2(s) = F(s) - k_1 X_2(s) + k_1 X_1(s) - k_2 X_2(s) \end{cases}$$

En éliminant $X_1(s)$ de ces deux équations, nous obtenons la fonction de transfert $X_2(s)/F(s)$:

$$\frac{X_2(s)}{F(s)} = \frac{m_1 s^2 + f s + k_1}{m_1 m_2 s^4 + m_2 f s^3 + (m_2 k_1 + m_1 k_1 + m_1 k_2) s^2 + (k_1 + k_2) f s + k_1^2}$$

Il s'agit d'un système d'ordre 4

c)



mécanique	↔ électrique
m_2	L_2
$1/k_2$	C_2
m_1	L_1
f	R
$1/k_1$	C_1

Exercice 3

$$\dot{y}(t) + 2y(t) = 2u(t)$$

La transformation de Laplace donne :

$$Y(s) = \frac{2}{s+2} U(s) \implies G(s) = \frac{2}{s+2}$$

a) Soit $u(t) = t$

$$Y(s) = \frac{2}{s+2} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{-1/2}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1/2}{s+2}$$

$\mathcal{L}^{-1}$

$$y(t) = -0.5\, \varepsilon(t) + t\, \varepsilon(t) + 0.5\, \varepsilon(t)\, e^{-2t}$$

b) $u_1(t) = 2t\, \varepsilon(t) - 4(t-2)\, \varepsilon(t-2) + 2(t-4)\, \varepsilon(t-4)$

Donc à l'aide du principe de superposition :

$$\begin{aligned} y_1(t) = & -\varepsilon(t) + 2t\, \varepsilon(t) + \varepsilon(t)\, e^{-2t} + \\ & 2\,\varepsilon(t-2) - 4(t-2)\,\varepsilon(t-2) - 2\,\varepsilon(t-2)\, e^{-2(t-2)} - \\ & \varepsilon(t-4) + 2(t-4)\,\varepsilon(t-4) + \varepsilon(t-4)\, e^{-2(t-4)} \end{aligned}$$

c) $y(t) = g(t) * u(t)$

où $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = 2e^{-2t}$ pour $t \geq 0$

Donc :

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t 2e^{-2\tau} \cdot 3e^{-3(t-\tau)}\, d\tau \\ &= 6e^{-3t} \int_0^t e^{\tau}\, d\tau \\ &= 6\left(e^{-2t} - e^{-3t}\right) \end{aligned}$$

Exercice 4

a) Equation dynamique :

$$m\,\ddot{x}(t) = \delta(t) - k\,x(t)$$

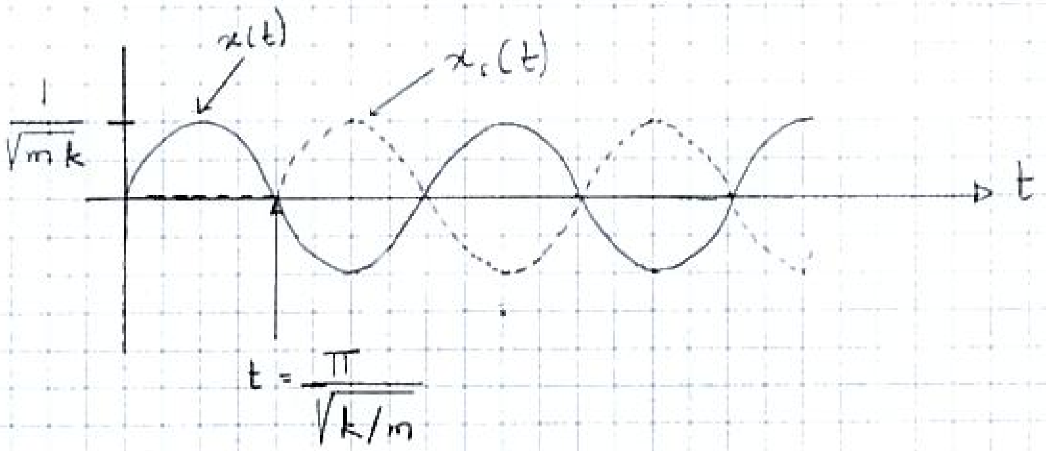
Par transformation de Laplace nous obtenons :

$$m\,s^2 X(s) = 1 - k\,X(s) \implies$$

$$X(s) = \frac{1}{ms^2+k} = \frac{1}{k}\cdot\frac{k/m}{s^2+k/m} = \frac{1}{\sqrt{mk}}\cdot\frac{\sqrt{k/m}}{s^2+k/m}$$

$$\mathcal{L}^{-1}$$

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{mk}}\cdot\varepsilon(t)\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$$



b) Pour stopper la masse m au bout d'une demi-période de son mouvement oscillatoire, il faudrait superposer au signal $x(t)$ le signal $x_s(t)$. Donc il faudrait exciter le système par une impulsion retardée de $\tau = \pi/\sqrt{k/m}$ secondes.

Expession analytique de l'excitation : $\varepsilon(t-\tau)\,\delta(t-\tau)$