ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Projet de 8ème semestre

Commande Robuste d'un Joint Flexible

École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Section de Génie Mécanique
Laboratoire d'Automatique

Été 2006

Étudiant : Seyed-Hanif TABATABAEE
Assistants : Hamid KHATIBI, Alireza KARIMI
Professeur : Roland Longchamp

1. Introduction 3
2. Éléments de théorie 3
3. Simulation pour le joint flexible 8
3.1. Présentation du joint flexible 8
3.2. Simulation pour un seul système 10
3.2.1 Identification 10
3.2.2 Placement des pôles et conception d'un régulateur 12
3.3 Système avec incertitude paramétrique 13
3.3.1 Incertitude sur un paramètre 13
3.3.2 Incertitude sur deux paramètres 14
3.3.3 Incertitude sur quatre paramètres 15
3.4 Configurations multiples 15
3.4.1 Identification 16
3.4.2 Conception d'un régulateur 16
3.4.3 Recherche des causes de l'échec 17
3.4.4 Remèdes 20
3.4.5 Nouvelle identification 21
3.4.6 Nouvelle Simulation pour configurations multiples 25
4. Comparaison avec la méthode de placement de pôles nominale 29
4.1 Synthèse d'un régulateur RST avec la méthode de Diophantine 29
4.1.1 Régulateur avec intégrateur 29
4.1.2 Régulateur avec intégrateur et zéro en -1 32
4.2 Simulation pour la méthode de placement de pôles nominale 33
4.3 Comparaison en pratique 36
4.3.1 Pôles dominants et auxiliaires lents 37
4.3.2 Augmentation de l'ordre du régulateur 38
4.3.3 Déplacement des pôles auxiliaires à gauche 41
4.3.4 Déplacement des pôles dominants à gauche 43
4.3.5 Déplacement des pôles auxiliaires et dominants à gauche 46
4.3.6 Régulateur avec ordre très grand 48
4.3.7 Nouvelle formulation de l'optimisation convexe 49
5. Conclusion 51
Références 53

1. Introduction

Les régulateurs robustes sont conçus pour stabiliser et satisfaire les performances d'un ensemble de modèles. Ce type de régulateurs peuvent être appliqués aux systèmes non-linéaires linéarisés dans différents points de fonctionnement, aussi bien qu'aux systèmes ayant une incertitude des paramètres.

Une approche à la conception de tels régulateurs est de convertir le problème en une optimisation convexe qui peut être résolue efficacement avec les méthodes numériques.

Dans ce projet, la commande robuste d'un joint flexible est considérée. Le système contient un bras attaché à un moteur électrique à l'intermédiaire de deux ressorts identiques. Les paramètres du système peuvent être changés en changeant les points d'ancrage des ressorts. L'objectif est de concevoir un régulateur robuste via l'optimisation convexe qui stabilise le maximum de configurations du joint flexible et fournit les meilleures performances possibles.

2. Éléments de théorie

Le but de ce projet n'est pas une focalisation sur la théorie. Néanmoins, il est nécessaire d'illustrer les éléments de théorie que nous avons apprit dans ce projet, car l'idée qui est à la base de notre solution, est récente et donne de très bons résultats.

L'idée de la commande Robuste vient du fait qu'il s'agit de la régulation d'un ensemble de systèmes, qui n'est pas possible avec la méthode classique de synthèse des régulateurs RST par l'équation de Diophante.

Le problème initial est un problème non-convexe, qui est transformé en un problème convexe en acceptant un certain conservatisme (Figure 1). Le problème convexe est ensuite transformé en un ILM (Inégalité Linéaire de Matrices). Les ILM sont un sous-ensemble de problèmes convexes (Figure 2).

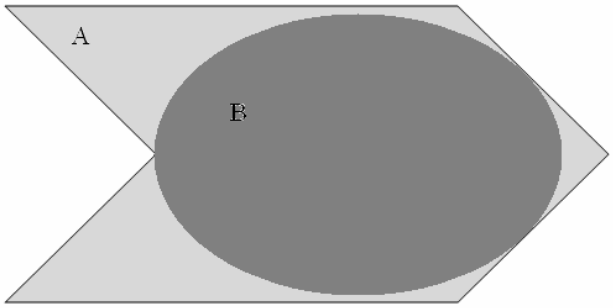

Figure 1 - L'ensemble B est obtenu à partir de l'ensemble A en acceptant un conservatisme

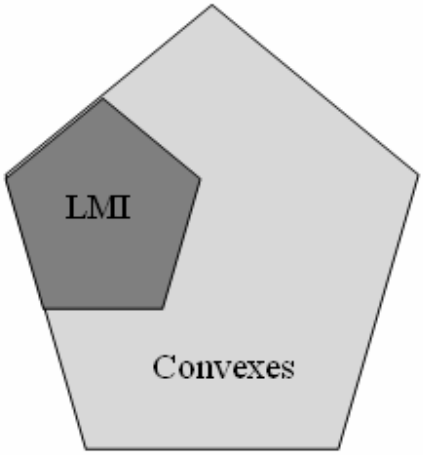

Figure 2 - Les ILM sont un sous-ensemble des problèmes convexes

Définition 1 : Une inégalité linéaire de matrices, est une inégalité dans laquelle les matrices (constantes) et les variables (qui peuvent aussi être des matrices) apparaissent linéairement.

Le point focal de la théorie à la base de notre projet, est la définition de SRP (stricte réel positivité) d'une fonction de transfert. La définition de SRP est tiré à partir de la partie réelle de la réponse harmonique d'une fonction de transfert :

Définition 2 : G(s) est réelle positive (RP) si,

$\Re e[G(s)] \geq 0, \forall \Re e[s] \geq 0$;

et strictement réelle positive (SRP) si, $\exists \varepsilon > 0$ tel que G(s $-\varepsilon$) est (RP).

[1]

Théorème 1 : Une fonction de transfert G(s) est (SRP)

$\Leftrightarrow$

1. G(s) est strictement stable (sans pôle sur l'axe imaginaire)
2. $\forall \omega \geq 0 \forall, \Re e[G(j\omega)] \geq 0$

[1]

Or, la en plus d'assurer la stabilité d'un système (comme le stipule le théorème 1), la contrainte d'être SRP est convexe. Pour vérifier ceci, regardons la définition d'une fonction convexe :

Définition 3 : Une fonction de deux variables est convexe si

$$f(\lambda x + \mu y) < \lambda f(x) + \mu f(y)$$

$$\lambda, \mu > 0, \quad \lambda + \mu = 1$$

Ceci dit, étant SRP, donc ayant sa partie réelle sur l'axe des positifs du diagramme de Nyquist, impose une phase entre $\frac{\pi}{2} et \frac{-\pi}{2}$. Il est clair que l'addition de deux phaseurs qui ont leurs phases dans l'intervalle $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ donnera toujours un phaseur qui a sa phase dans cet intervalle (l'ensemble est dit fermé par rapport à l'addition). Donc selon la définition 3, la contrainte d'être SRP est convexe.

La contrainte d'être SRP est un convexe qui peut être converti en un ILM. Pour ceci, on fait l'hypothèse que la réalisation dans l'espace d'état dans la forme canonique d'une fonction de transfert H donnée est (A, B, C, D), où les matrices A et B sont fixes et les variables d'optimisation apparaissent linéairement dans C et D. Le lemme de Kalman-Yakubovich- Popov propose la conversion en un ILM : [2]

Lemme 1 (KYP): Une fonction de transfert $H(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$ est SRP si et seulement si il existe une matrice $P = P^T > 0$ tel que :

$$\begin{bmatrix} A^T PA - P & A^T PB - C^T \\ B^T PA - C & -D - D^T + B^T PB \end{bmatrix} < 0$$

Comme le dénominateur est connu (A, B), les variables C, D, P apparaissent linéairement dans l'équation, donc nous avons un LMI.

Supposons que nous avons q systèmes $G_i = \frac{a_i}{b_i}$ (i=1,…q) et que nous voulons les stabiliser avec un régulateur $K = \frac{x}{y}$. Nous avons deux éléments en tête :

1. La condition d'être SRP en ayant une fonction de transfert avec un dénominateur fixe (connu) est un ILM (Lemme 1)
2. Le numérateur d'une fonction de transfert SRP est aussi stable.

Cela nous mène à l'idée de prendre le dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermé du système que l'on veut stabiliser $b_i y + a_i x$, et de le poser sur le numérateur d'une fonction de transfert que l'on fixe nous même le dénominateur :

$$J(z) = \frac{b_i y + a_i x}{d(z)}$$

Où a_i, b_i, x, y sont des polynômes.

Si J(z) est SPR, alors le système en boucle fermé est stable. d(z) est le dénominateur connu. Nous exploitons d(z) pour y intégrer nos pôles auxiliaires et dominants.

Comme nous voulons que le numérateur de J(z) soit le plus proche possible de son dénominateur, or nous allons essayer de faire de sorte que J(z) soit le plus proche de 1 que possible. Ceci est le problème de placement de pôles.

Mais dans beaucoup d'applications, le placement de pôles ne satisfait pas entièrement. Dans ce cas, un « shaping » de la fonction de sensibilité peut être demandé dans le domaine fréquentiel. Si K est la fonction de transfert du régulateur et G celui du système à régler, la fonction de sensibilité s'écrit comme $S = (1+KG)^{-1}$.

Finalement, le problème d'optimisation pour q systèmes se présente comme suit :

$$\textit{Minimiser } \gamma$$

$$\textit{Sujet à :}$$

$$\left\| \frac{b_i y + a_i x}{d(z)} - 1 \right\| < \gamma \qquad \textit{pour } i = 1,....,q$$

$$\left\| \frac{a_i x}{d} - S_d \right\| < \gamma \qquad \textit{pour } i = 1,....,q$$

$$\frac{b_i y + a_i x}{d(z)} \in SPR \qquad \textit{pour } i = 1,....,q$$

La première équation est celle du placement de pôle, la deuxième celle du Loop Shaping (S_d est la fonction de sensibilité désirée) et le dernier veille à ce que J(z)reste toujours SRP .

Pour le placement des pôles, le choix des pôles dominants est effectué en respectant des spécifications d'amortissements données. Les spécifications d'amortissement sont données sous forme de facteur d'amortissement ζ et de pulsation naturelle ω_n. Ces spécifications sont tirées de la réponse indicielle d'une fonction de transfert d'un système d'ordre deux sous-amorti sans zéro. La fonction de transfert les du type

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Et les pôles associés sont $p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$

Le facteur d'amortissement ζ et la pulsation naturelle ω_n sont donnés pour avoir un dépassement (Overshoot) et un temps de montée désirés, comme on peut le voir sur la figure 3 [3]:

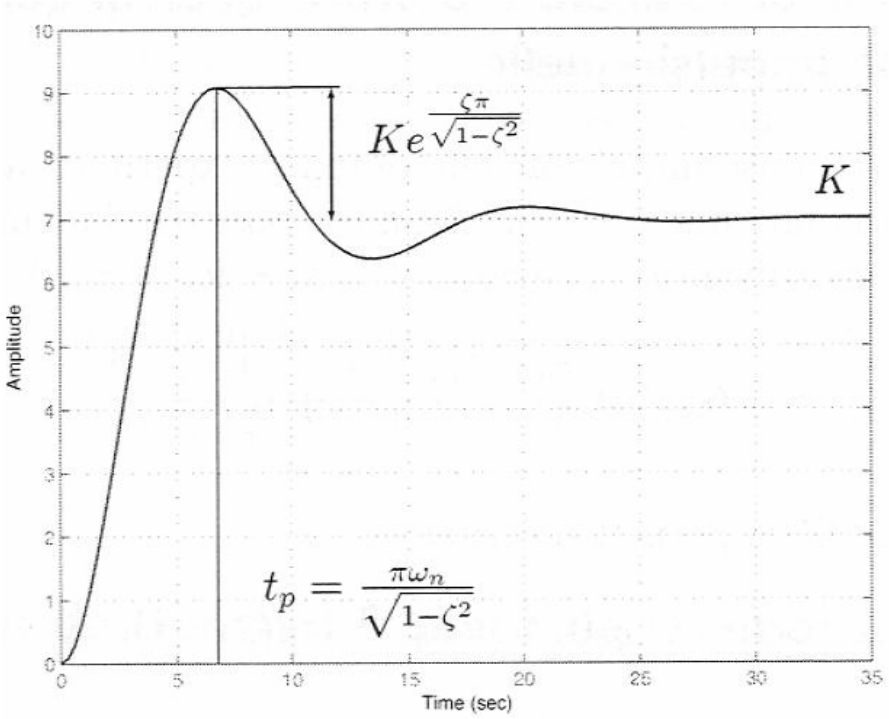

Figure 3 - Réponse indicielle d'un système sous-amorti d'ordre deux sans zéro

Les pôles sont ensuite placés dans la région en tramé dans le lieu des pôles (pour respecter simultanément les conditions de stabilités et d'amortissement) [4] :

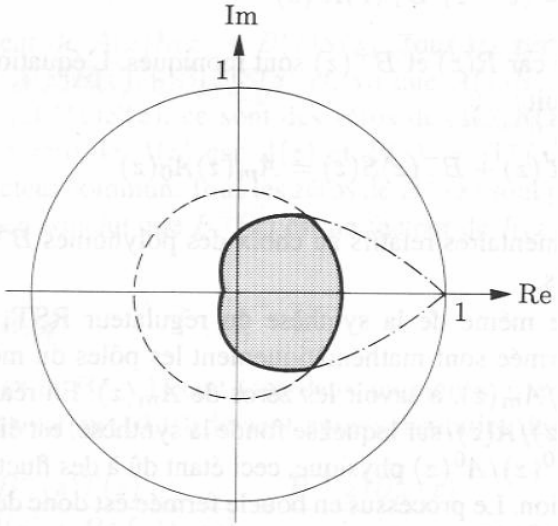

Figure 4 - Lieu des pôles dominants

3. Simulation pour le joint flexible

Nous allons dans cette partie présenter le système sur lequel nous avons travaillé. Ensuite les différents tests, ainsi que leurs résultats vont être présentés.

3.1. Présentation du joint flexible

Le système considéré est constitué d'une plate-forme posée sur une base et surmontée d'un bras à liaison flexible (Figure 5). La plate-forme est entraînée dans un mouvement de rotation par un moteur à courant continu. Le couplage entre le moteur et la plate-forme est fait de manière rigide à l'aide de roues dentées. Le bras est rattaché par son extrémité au centre de la plate-forme. L'attache est conçue de telle sorte que le bras puisse effectuer un mouvement de rotation librement. Ce mouvement de rotation est cependant commandé par deux ressorts, dont les extrémités sont attachées à la plate-forme et au bras assurant ainsi une liaison flexible entre les deux pièces.
Deux grandeurs peuvent être mesurées à l'aide de potentiomètres :

- L'angle de rotation de la plate-forme par rapport à sa base θ(t)
- L'angle de rotation du bras par rapport à l'axe de la plate-forme α(t)

Par la suite nous nous intéresserons à l'angle de positionnement du bras par rapport à la base ($\theta+\alpha$). Cette grandeur constitue donc la sortie y du système considéré.
Le système comporte une grandeur de commande u. Celle-ci consiste en une tension générée par ordinateur qui, avant d'être appliquée aux bornes du moteur à courant continu, est d'abord amplifiée par un amplificateur de puissance. Le logiciel Labview® est utilisé pour la génération de la commande. La grandeur commande est un PRBS. La période d'échantillonnage est de 0.03 s.

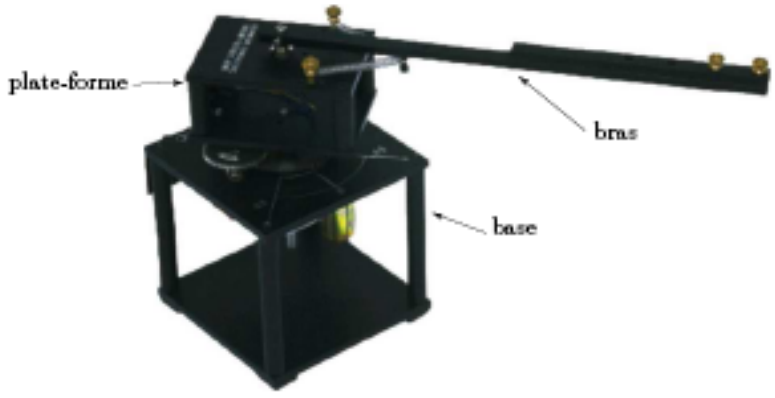

Figure 5 - Ensemble plate-forme et bras à liaison flexible

Comme il a été dit dans l'introduction, nous allons changer les points d'ancrage des ressorts, afin de générer un ensemble de systèmes. Comme on peut le voir sur la figure 6 ci-dessous, il y a trois points d'ancrage sur le bras (points 1, 2, 3) et aussi trois points d'ancrage sur la plate-forme (points A, B, C).

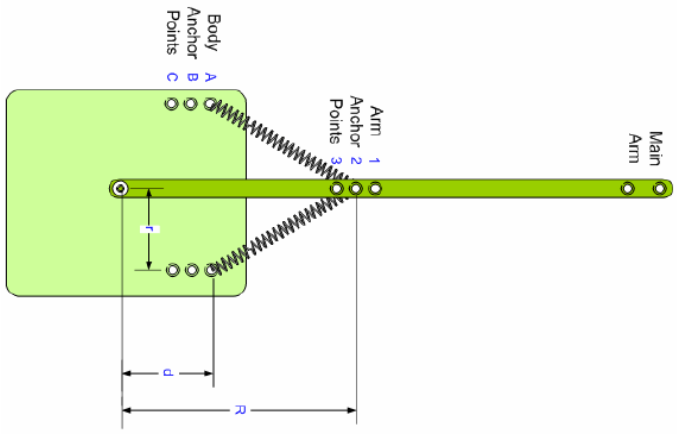

Figure 6 - Points d'ancrage pour réaliser un ensemble de systèmes

En fixant symétriquement le ressort sur les deux côtés de la plate-forme, nous obtenons donc 9 systèmes.

3.2. Simulation pour un seul système

Afin de vérifier l'efficacité de notre démarche, nous allons tout d'abord procéder à la conception d'un régulateur pour un seul système. Nous considérons donc le système 2A, (point d'ancrage sur le bras :2 , sur la plate-forme : A), faire une identification, valider l'identification, puis l'implémenter sur notre programme Matlab® pour y concevoir un régulateur.

3.2.1 Identification

Nous avons utilisé l'ID-ToolBox de Matlab® pour faire une identification paramétrique de notre système. Nous avons d'abord déterminé l'ordre de notre système. Pour ceci, nous avons regardé la « Loss function » d'un modèle ARX avec différents nombre de zéros et de pôles. Le résultat est sur la figure 7 :

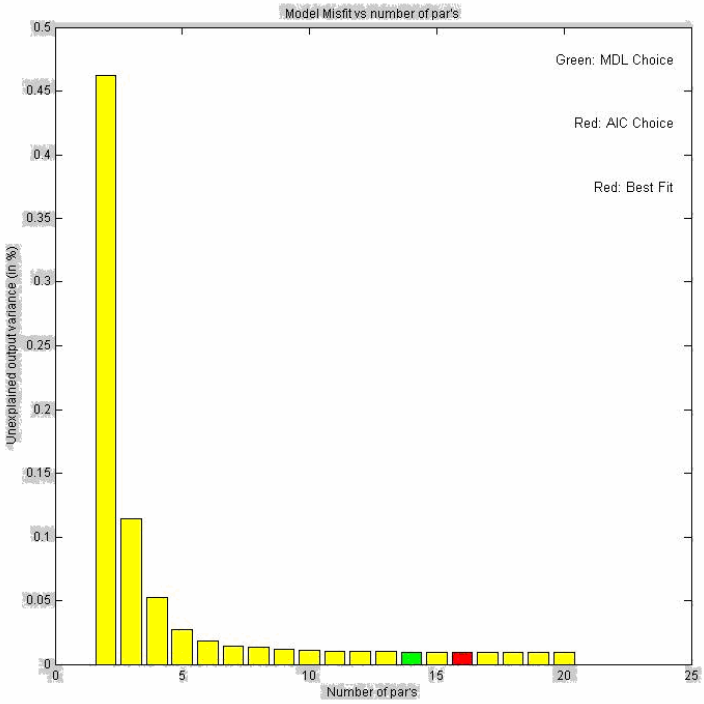

Figure 7 - Loss function pour le système 2A

Sur la base de ce résultat, nous sommes arrivés au choix suivant :
$n_a = 6$
$n_b = 8$
$n_k = 1$

Après la comparaison des différents modèles (ARX, ARMAX, OE, BJ) avec les mêmes nombres de zéros et de pôles, nous sommes arrivés à la conclusion qu'un modèle

ARMAX avec les paramètres ci-dessous satisfaisait mieux aux tests de validités (sortie mesuré, blancheur, réponse harmonique, zéros-pôles) :

$n_a = 6$

$n_b = 8$

$n_c = 6$

$n_k = 1$

Donc le système est approximé à l'ordre 8. Les tests de validité sont illustrés sur la figure 8 ci-dessous :

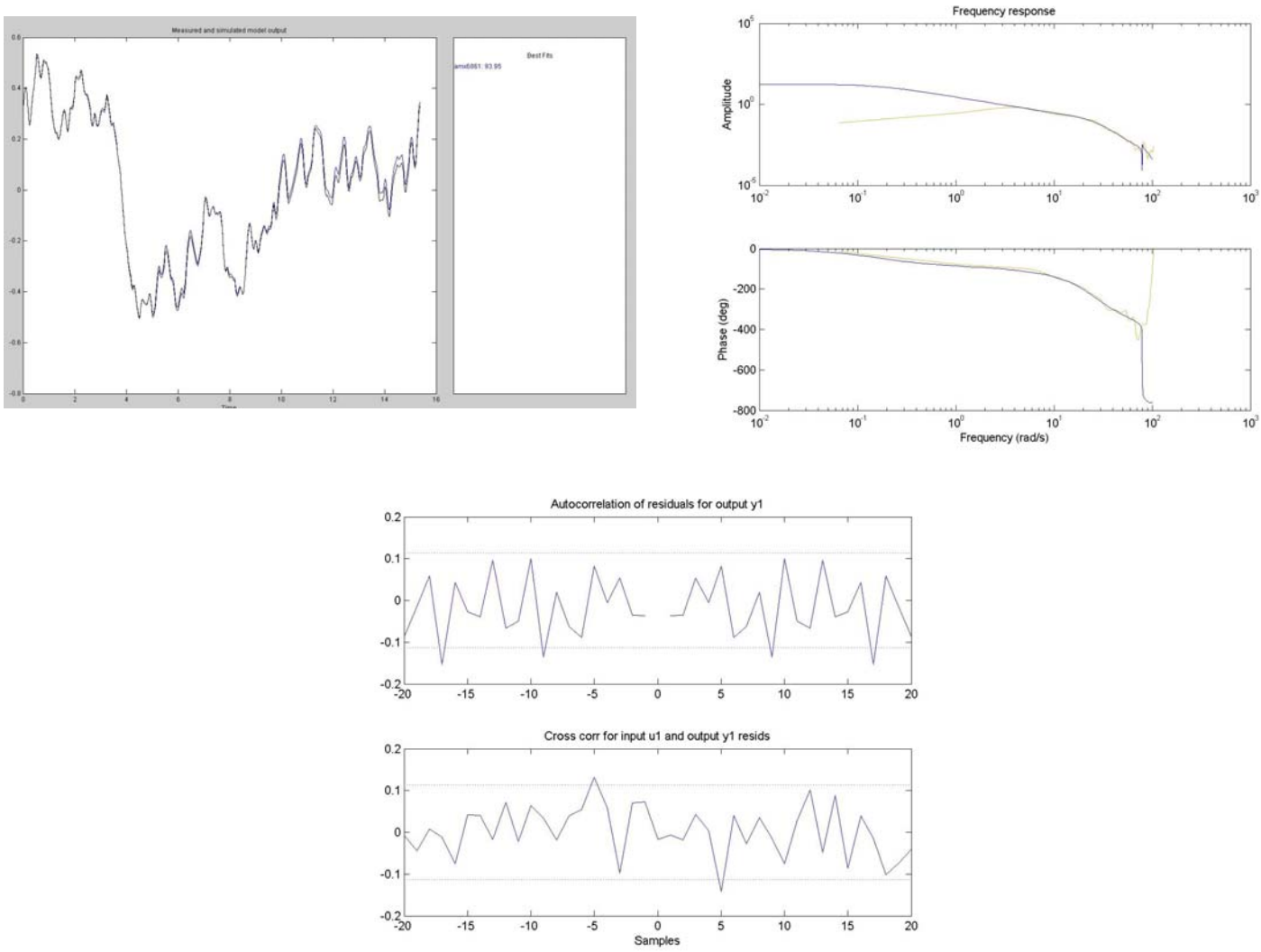

Figure 8 - Tests de sortie, de réponse harmonique et de blancheur pour un seul système

3.2.2 Placement des pôles et conception d'un régulateur

Avec un régulateur d'ordre 8 (il est à noter que l'on inclut toujours un intégrateur dans nos régulateurs) et un placement de pôles avec $\omega_n = 24$ et $\zeta = 0.8$, donc les pôles dominants et auxiliaires :

$P_{dom} = 0.525 \pm 0.233i$ (2 pôles)
$P_{aux} = 0.2$ (14 pôles)

Le résultat est sur la figure 9 :

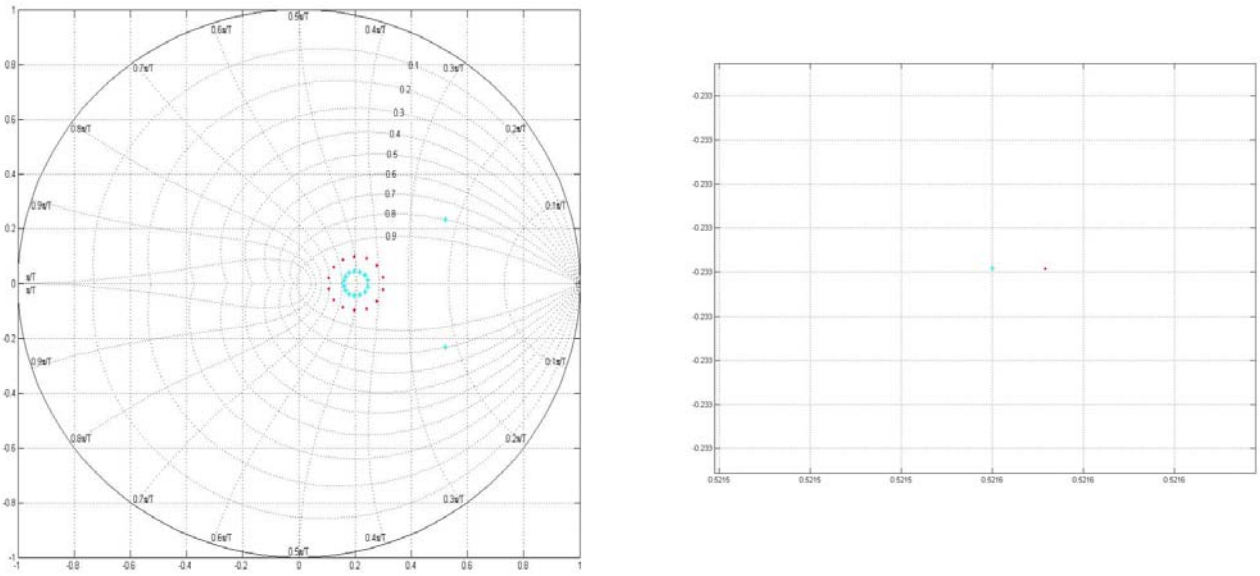

Figure 9 - Placement des pôles pour un seul système avec un régulateur d'ordre 8

Les pôles souhaités sont de couleur bleue, les pôles placés par le programme de couleur rouge. Avec le zoom, nous voyons que les pôles dominants on été très précisément placés là où on les voulait. Le fait que les pôles auxiliaires n'ont pas été placés à l'endroit qu'on souhaitait, vient des erreurs numériques. La valeur du paramètre à minimiser est :

$$\gamma = 2.9928 * 10^{-15}$$

Si maintenant on souhaite restreindre le degré de liberté du système, et que l'on veut en conséquence concevoir un régulateur d'ordre 7, le résultat est :

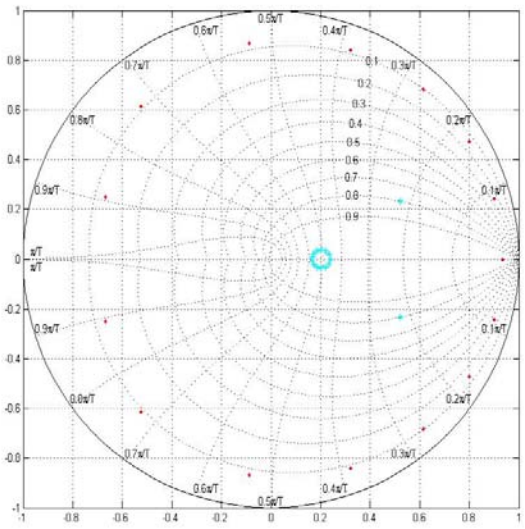

Figure 10 - Placement des pôles pour un seul système avec un régulateur d'ordre 7

Nous voyons clairement que le programme n'a pas réussi à placer ni pôles dominants ni les auxiliaires sur les endroits souhaités. Il est aussi frappant que les pôles ont été placés si loin des objectifs, avec une légère diminution de l'ordre du régulateur. Ceci va être analysé plus tard dans le rapport.

3.3 Système avec incertitude paramétrique

3.3.1 Incertitude sur un paramètre

La fonction de transfert de notre système 2A (Armax) est :

$$H(z) = \frac{0.0012\,z^7 + 0.0135\,z^6 + 0.0203\,z^5 + 0.009\,z^4 - 0.0071\,z^3 - 0.0083\,z^2 - 0.0025\,z - 0.0012}{z^8 - 1.393\,z^7 - 0.0305\,z^6 + 0.1104\,z^5 + 1.061\,z^4 - 1.065\,z^3 + 0.3184\,z^2}$$

(1)

Nous allons donner au paramètre a_1 (coefficient de z^7 dans le dénominateur) les valeurs de $a_1-\delta a_1$ et $a_1+\delta a_1$ afin d'obtenir deux fonctions de transfert donc deux systèmes différents. La valeur de δa_1 est de 0.0363. Le résultat pour un régulateur d'ordre 12 et les mêmes pôles dominants et auxiliaires qu'au §3.2 sont illustrés sur la figure 11 ci-dessous :

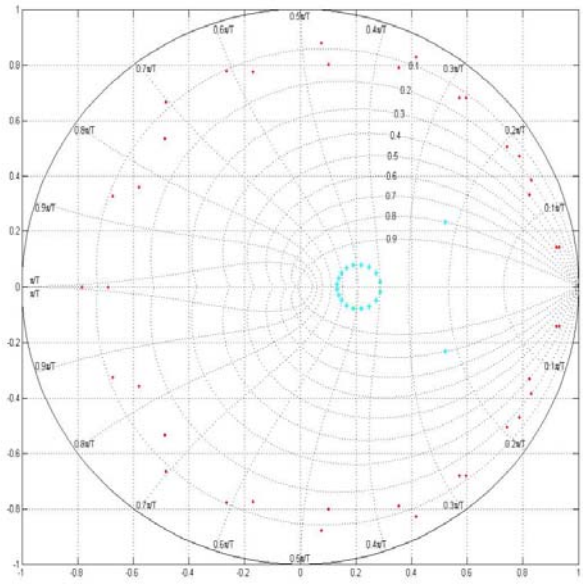

Figure 11 - Placement des pôles pour deux systèmes (incertitude sur 1 paramètre) avec un régulateur d'ordre 12

La valeur du paramètre à minimiser était de $\gamma = 0.4776$, ce qui n'est pas très satisfaisant, malgré le bon degré de liberté donné au programme pour la conception d'un régulateur.

3.3.2 Incertitude sur deux paramètres

Cette fois nous allons changer les paramètres a_1 et b_1(coefficient de z^7 dans le numérateur de (1)). La valeur de δb_1 est de $0.2156*10^{-3}$. Nous aurons cette fois 4 fonctions de transferts, donc 4 systèmes. Le résultat pour un régulateur d'ordre 12 et les mêmes pôles dominants et auxiliaires qu'au §3.2 sont illustrés sur la figure 12 ci-dessous :

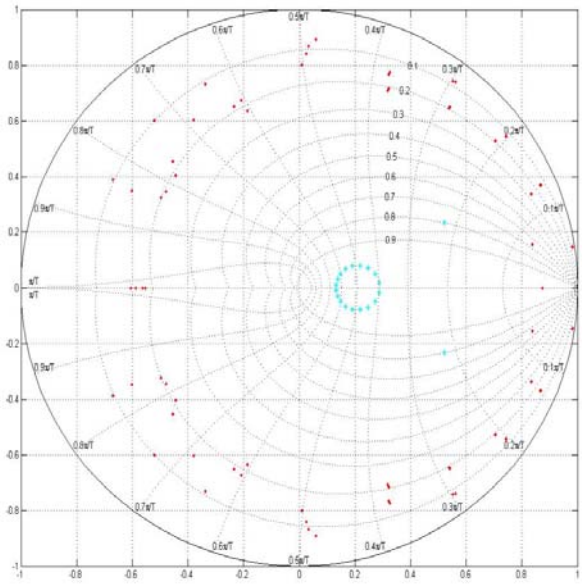

Figure 12 - Placement des pôles pour quatre systèmes (incertitude sur 2 paramètres) avec un régulateur d'ordre 12

La valeur du paramètre à minimiser était de $\gamma = 0.5488$, ce qui n'est pas satisfaisant non plus.

3.3.3 Incertitude sur quatre paramètres

Nous allons maintenant changer les coefficients a_1, b_1, a_2 (coefficient de z^6 dans le dénominateur de (1)) et b_2 (coefficient de z^6 dans le numérateur de (1)). Les valeurs de da2 et db2 sont respectivement 0.456 et $0.3376*10^{-3}$. Dans ce cas nous avons 16 systèmes.

Après de nombreux essais, nous sommes arrivés à la conclusion que le programme n'arrive pas à trouver un régulateur qui puisse stabiliser tous les 16 systèmes.

3.4 Configurations multiples

Venons en maintenant à notre problème principal, dans lequel il s'agit de changer les points d'ancrage des ressorts afin d'avoir à disposition 9 systèmes différents comme expliqué au §3.1. Pour ce faire, nous avons d'abord obtenu 9 jeux d'entrées/sorties (un pour chaque configuration) avec l'entrée étant toujours la même (PRBS), et sans changer la période d'échantillonnage. Nous avons d'abord procédé à l'identification des systèmes.

3.4.1 Identification

Pour l'obtention du nombre des paramètres (zéros et pôles), nous avons comme d'habitude regardé la Loss function d'un modèle ARX sur l'ID-ToolBox de Matlab® pour un des systèmes (en l'occurrence le 1A). Le résultat est :

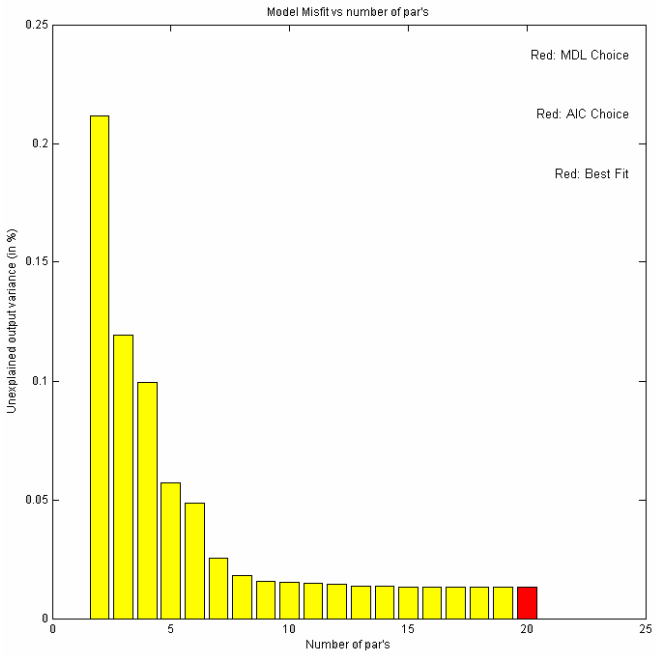

Figure 13 - Loss function pour le système 1A

Sur la base de ce résultat, nous sommes arrivés au choix suivant :
$n_a = 7$
$n_b = 7$
$n_k = 1$

Après la comparaison des différents modèles (ARX, ARMAX, OE, BJ) avec les mêmes nombres de zéros et de pôles, nous sommes arrivés à la conclusion qu'un modèle ARX sans modèle de bruit (avec les paramètres ci-dessus) satisfaisait mieux aux tests de validités (sortie mesuré, blancheur, réponse harmonique, zéros-pôles).

3.4.2 Conception d'un régulateur

Après beaucoup d'essais, avec des régulateurs d'ordres différents, le programme n'a pas pu nous fournir un régulateur qui puisse stabiliser tous les 9 systèmes.

Donc nous avons cherché à trouver quelles erreurs nous avons commis. Le paragraphe suivant montre les conclusions de notre investigation.

3.4.3 Recherche des causes de l'échec

A. ***Mauvaise acquisition des données.*** La figure ci-dessous montre la réponse harmonique dans le domaine fréquentiel (diagramme de Bode) de nos 9 systèmes.

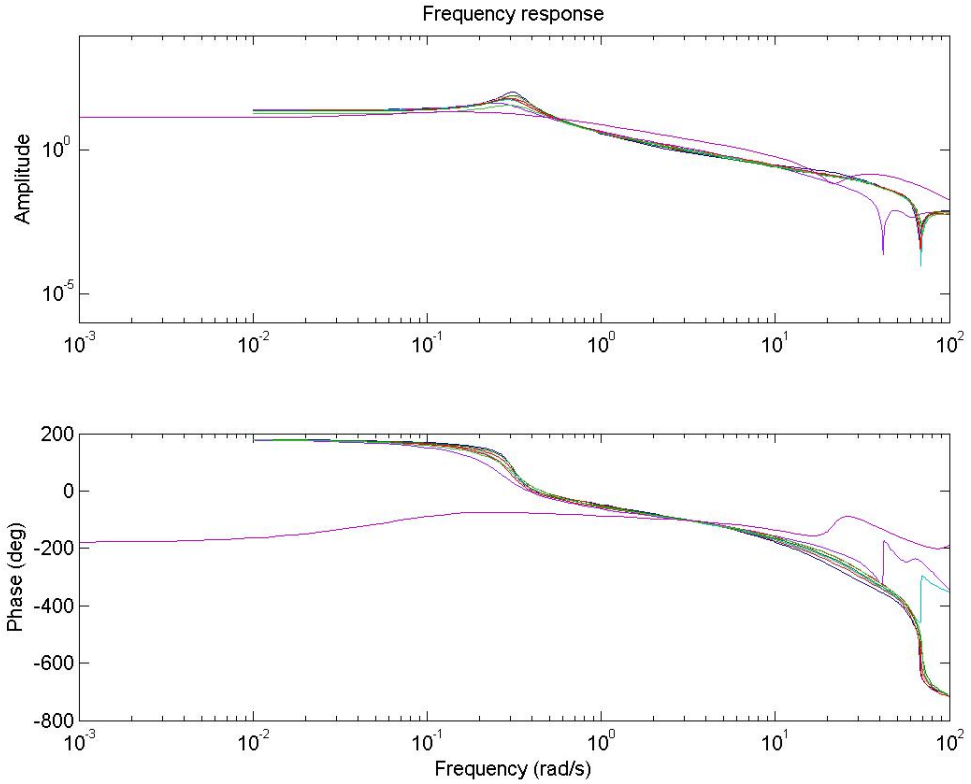

Figure 14 - Diagramme de Bode des 9 systèmes

En effet, nous voyons que deux des systèmes divergent beaucoup des autres. Ceci peut-être dû à une mauvaise manipulation lors de l'acquisition des données pour ces deux configurations. L'un de ces deux systèmes est le 1A, sur lequel nous avons fait notre choix de nombre de paramètres ! Ceci a induit des erreurs sur les autres systèmes, car nous avons gardé ce choix pour ces autres systèmes.

B. ***Pôles instables.*** Les figures ci-dessous mettent bien le problème en évidence. En fait, le système principal contient vrai semblablement un intégrateur. Mais comme l'identification contient toujours des tolérances, cet intégrateur ce transforme quelque fois en pôles conjugués complexes, et des fois en un pôle instable ! Ceci pourrait bien être une source importante d'erreur.

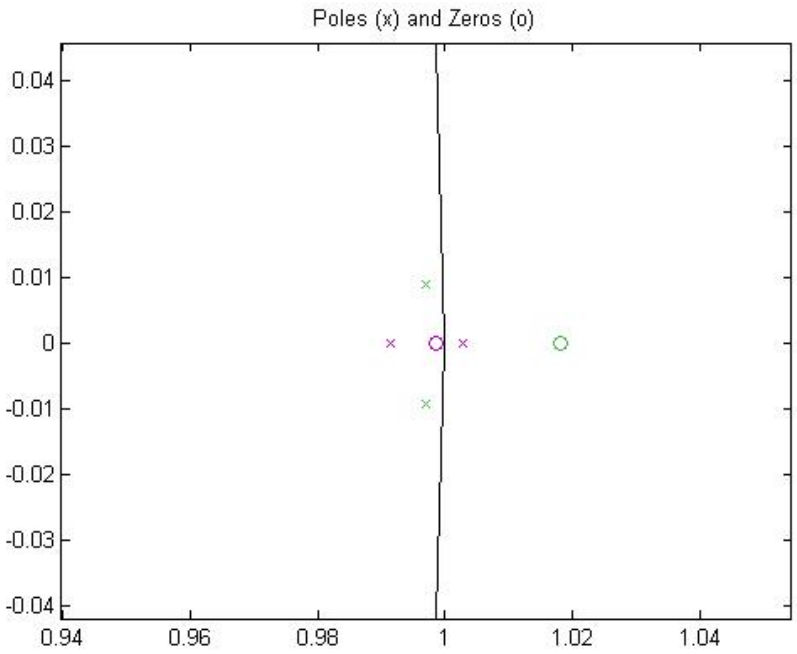

Figure 15 - Pôles proche de 1 pour les systèmes 1A et 1B

C. ***Mauvaise spécification des conditions d'amortissement.*** Une pulsation d'amortissement (pulsation naturelle) trop contraignante pourrait aboutir à un problème difficile à résoudre. En effet si on veut amortir les modes transitoires du système beaucoup plus rapidement que l'ordre de la bande passante du système (donc de la dynamique du système), ceci pourrait nous causer des problèmes.

D. ***Fonction de sensibilité.*** Si nous regardons la fonction de stabilité de l'un des systèmes (les autres sont du même ordre), nous voyons que l'amplitude atteint les 40 dB. Ceci veut dire que le système en question est très sensible aux changements de paramètres :

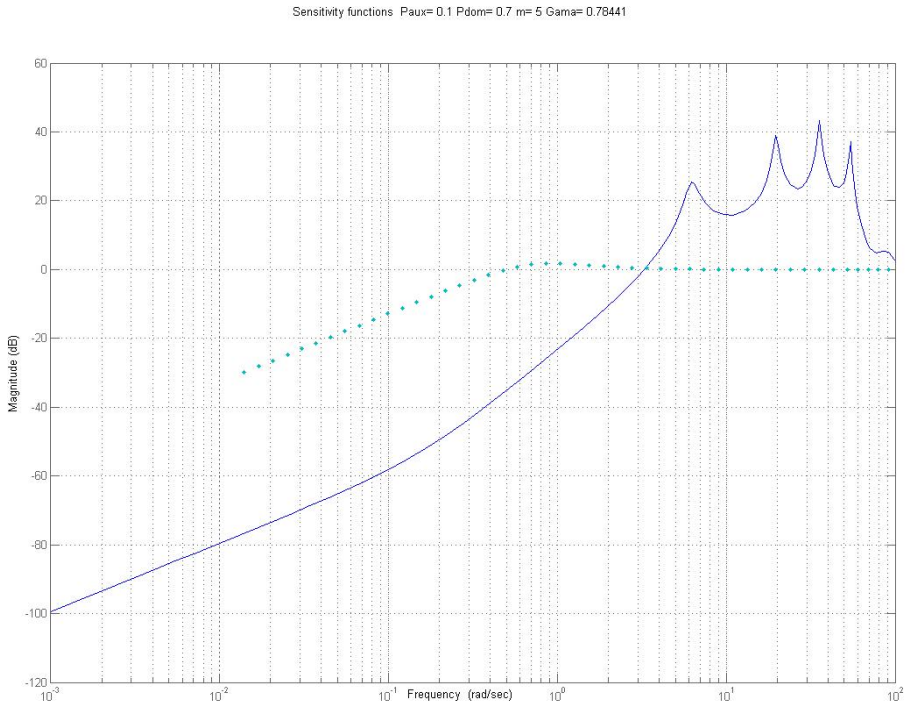

Figure 16 - Diagramme de Bode de la fonction de stabilité du système 2B

Ceci est précisément la cause du problème que nous avons rencontré dans le §3.2.2 où une légère diminution de l'ordre du régulateur nous a fait migrer les pôles du système en boucle fermé jusqu'à la limite de l'instabilité.

Il se pourrait bien que l'échec de notre essai pour concevoir un régulateur pour un système avec incertitude sur 4 paramètres (§3.3.3) soit aussi dû à ce phénomène.

E. Simplification de zéros et pôles. Le lieu des pôles ci-dessous pour l'un des systèmes met bien le problème en évidence. En fait, il y a 3 endroit sur le lieu des pôles où un pôle et un zéro sont très proches et peuvent être simplifiés. Ceci montre que le degré 7 choisi pour notre identification était trop élevé, et qu'une identification paramétrique avec un modèle d'ordre 4 aurait suffit.

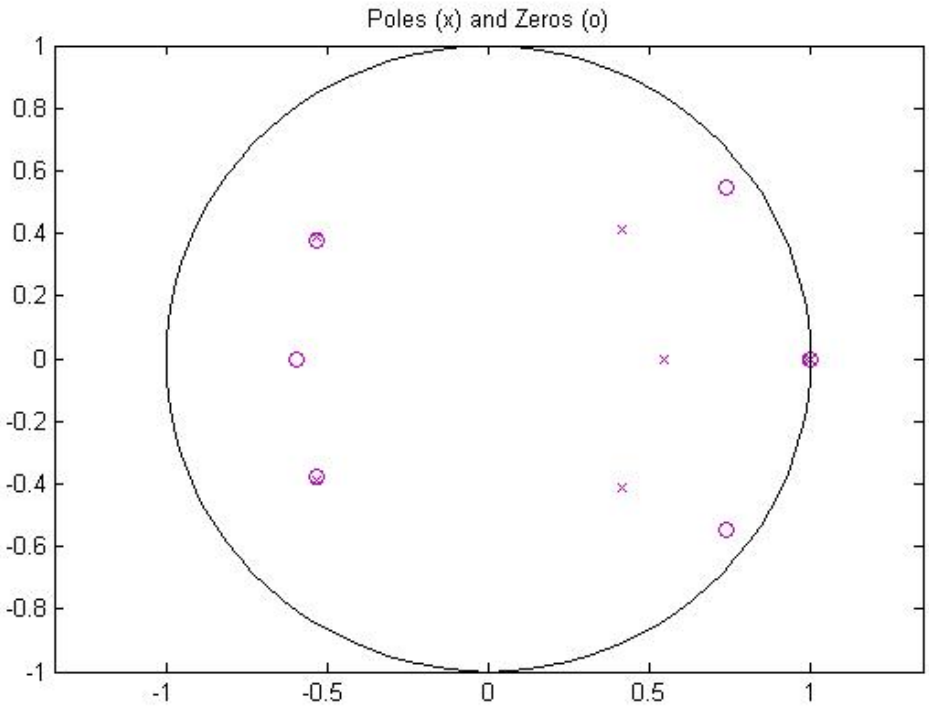

Figure 17 - Lieu des pôles du système 2B

3.4.4 Remèdes

Dans ce paragraphe, nous allons présenter les mesures que nous avons prises pour remédier aux problèmes rencontrés dans le paragraphe précédent dans l'ordre d'apparition.

A. ***Mauvaise acquisition des données.*** Le remède à ce problème est d'acquérir un nouvel ensemble de donnée avec d'avantage de précision, et refaire la démarche en cas de données inappropriées pour une configuration.

B. ***Pôles instables.*** Pour ce problème, nous avons pensé à recourir à une modélisation avec un modèle « Output Error », qui en principe, ne devrait pas donner de pôles instables

Une autre solution serait, comme nous savons maintenant que le système contient un intégrateur intrinsèquement, de faire une identification en utilisant la dérivée de la sortie, puis insérer un terme en 1/(z-1) manuellement dans le modèle identifié.

C. ***Mauvaise spécification des conditions d'amortissement.*** Comme nous pouvons le voir sur la figure 14, la bande passante du système se situe vers les 6 rad/s. Or, nous pourrons par la suite exiger une dynamique dans le même ordre (des spécifications d'amortissement pas très exigeantes). Mais nous verrons par la suite que ceci n'est pas une source de problèmes.

D. ***Fonction de sensibilité.*** Le remède à ce problème serait de faire un loop shaping. Ceci n'est possible qu'après l'identification du système (lors de la conception du régulateur).

E. ***Simplification de zéros et pôles.*** La figure 17 montre qu'il y a 3 paires de pôles et de zéros à simplifier. En coordination avec le point B, nous décidons de faire une identification paramétrique avec un modèle Output Error avec les ordres [4 4 1].

3.4.5 Nouvelle identification

Selon le point B du paragraphe 3.4.4, nous avons procédé à l'identification avec la dérivée de la sortie du système. Après avoir dérivé les sorites des 9 configurations, et après avoir enlevé la moyenne de ces signaux, nous avons identifié avec les modèles Output Error et Armax, tous deux d'ordre 4.

Le test de validation de la sortie, qui compare la sortie obtenue en faisant subir au modèle identifié avec un signal de sortie acquis depuis le système, a donné le résultat suivant :

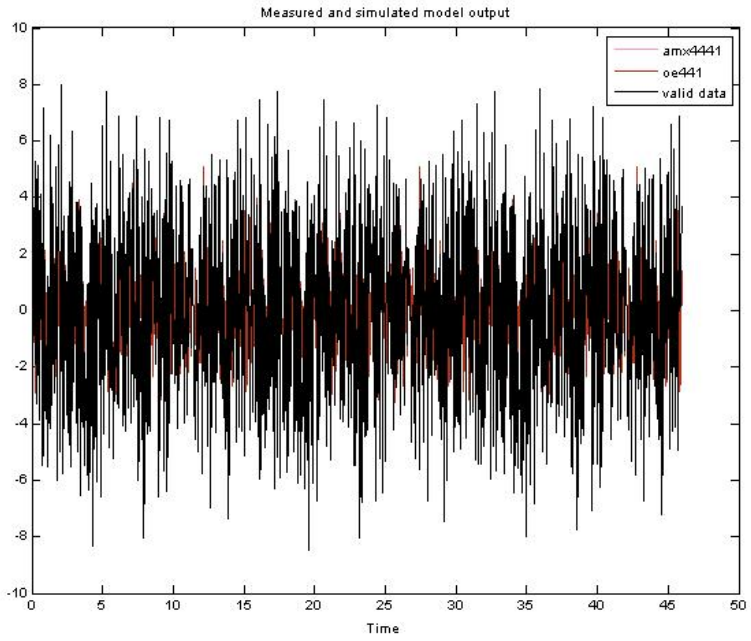

Figure 18 - Test de validation de la dérivée de la sortie

Le meilleure fit obtenu pour cette identification était de 22.6%. Ceci vient du fait que la dérivation induit beaucoup de bruit dans le signal et les résultats de l'identification deviennent erronés. La méthode est donc à oublier.

Nous avons ensuite procédé à l'identification avec la sortie normale des systèmes pour nos 9 configurations. En guise de rappel, un model output error avec les ordres n_b= 4, n_f =4 et n_k =1 a été utilisé. La moyenne de toutes les sorties a été enlevée.

La figure 19 ci-dessous montre la réponse fréquentielle (diagramme de Bode) des 9 modèles identifiés. En comparaison avec la figure 14, nous voyons que les 9 systèmes se ressemblent becaucoup, au moins d'un point de vue de réponse fréquentielle :

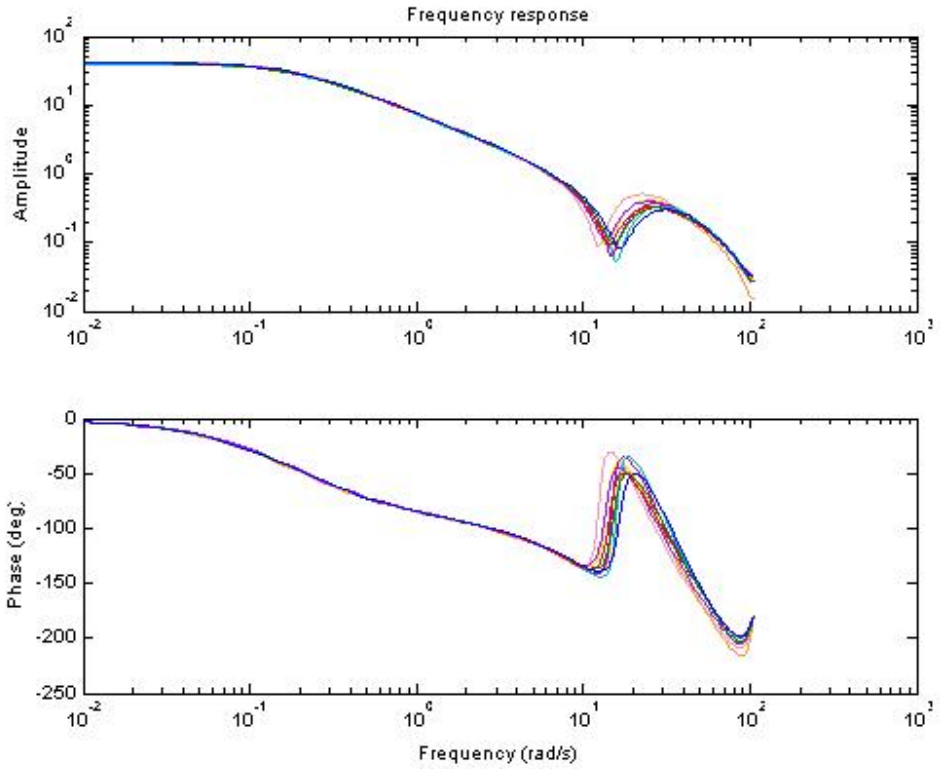

Figure 19 - Réponse fréquentielle des 9 modèles identifiés

Le lieu des pôles et des zéros sur la figure 20, montre des groupes de pôles et de zéros (et pas de pôles ou zéros dispersés). Ainsi la figure 21 montre l'intégrateur dont il en était question dans le point B du paragraphe 3.4.3. Nous voyons cette fois que tous ces « intégrateurs » ont été identifiés dans le cercle unité comme nous l'attendions.

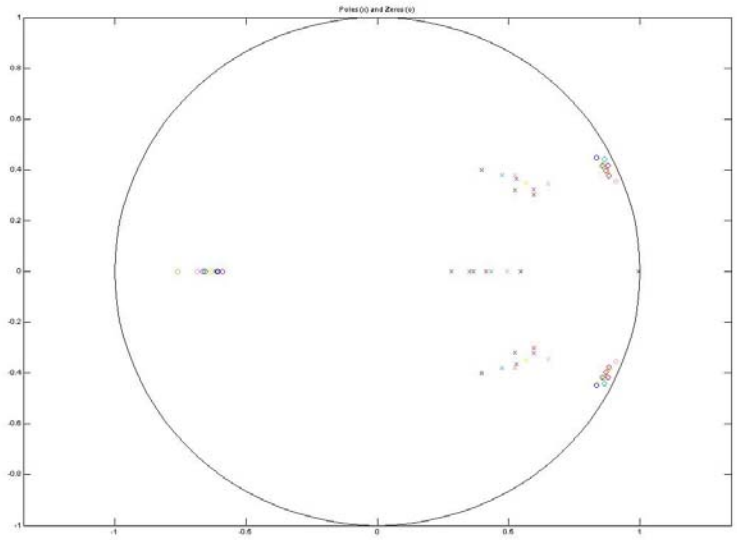

Figure 20- Lieu des pôles et de zéros des 9 modèles identifiés

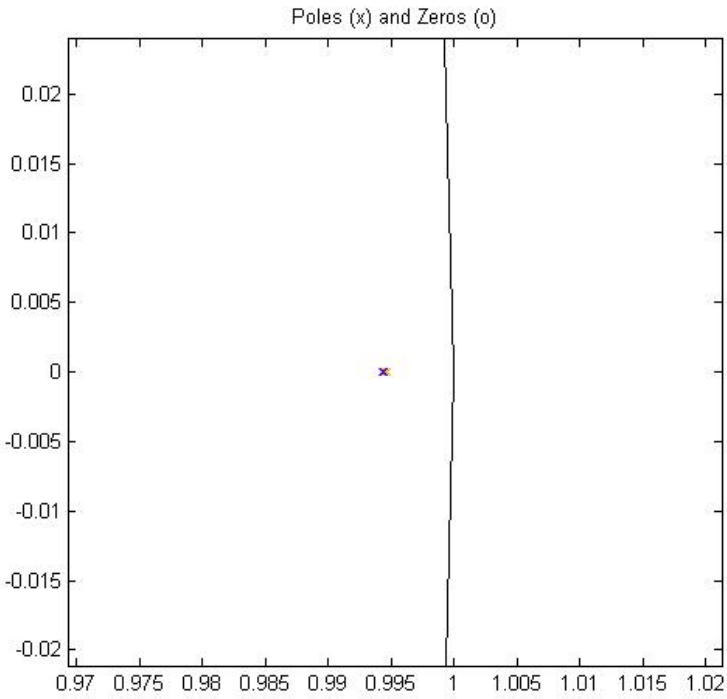

Figure 21 - Zoom sur l'intégrateur identifié des 9 systèmes

Le test de validation pour cette identification montre affiche des résultats très satisfaisants. L'exemple pour le modèle de l'un des configurations est donné sur la figure ci-dessous, dont le fit est de 91.04% :

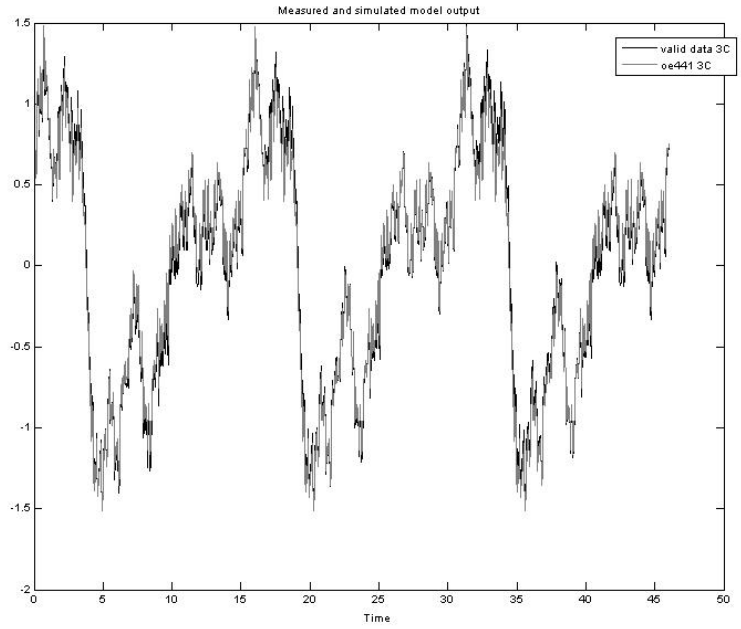

Figure 22 – Test de validation de la sortie pour un modèle identifié

3.4.6 Nouvelle Simulation pour configurations multiples

Après une indentification avec succès, nous allons procéder à une nouvelle simulation pour obtenir un régulateur qui stabiliserait nos 9 configurations. Pour ce faire, nous avons d'abord imposé des spécifications d'amortissement « clémentes » aux systèmes : $\omega_n = 10$ rad/s, $\zeta = 0.8$. Les pôles auxiliaires ont été placés à 0.2 sur l'axe réel, et l'ordre du régulateur a été choisi à 8. Les résultats sont illustrés sur les figures 23 et 24 ci-dessous. Les pôles en bleu sont les pôles désirés.

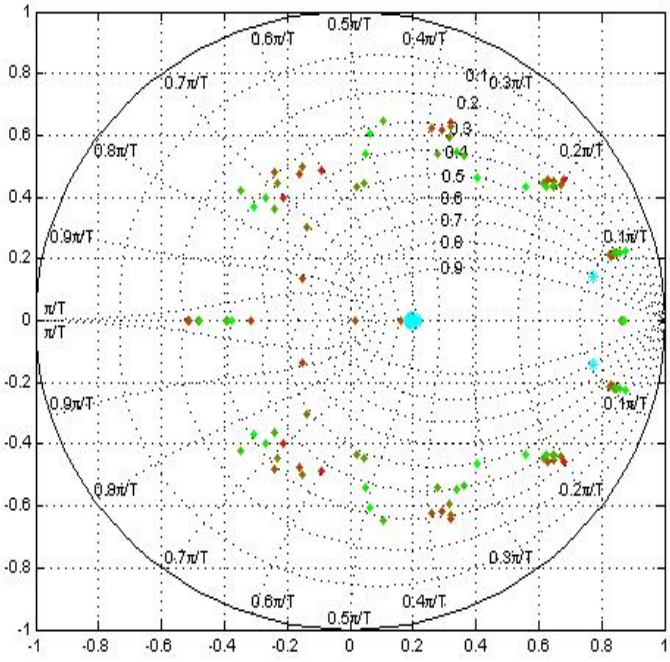

Figure 23 - Lieu des pôles pour ω_n=10 rad/s ζ = 0.8 , ordre régulateur 8

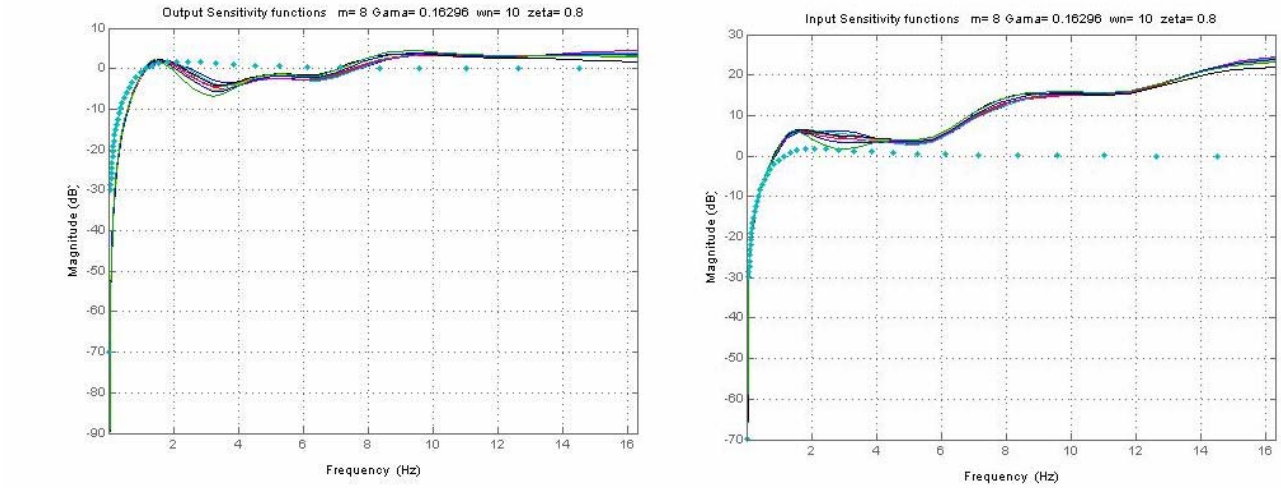

Figure 24 - Fonctions de sensibilités de sortie (gauche) et d'entrée (droite) pour ω_n=10 rad/s ζ = 0.8 , ordre régulateur 8

La fonction de sensibilité de l'entrée (K/(1+KG)) met en évidence l'effet des bruits sur l'entrée du système. Une valeur plus grande que 20 dB n'est normalement pas tolérée. L'addition d'un zéro en -1 dans le régulateur (donc multiplication par (z+1) du régulateur), permet une atténuation de cette fonction à haute fréquence :

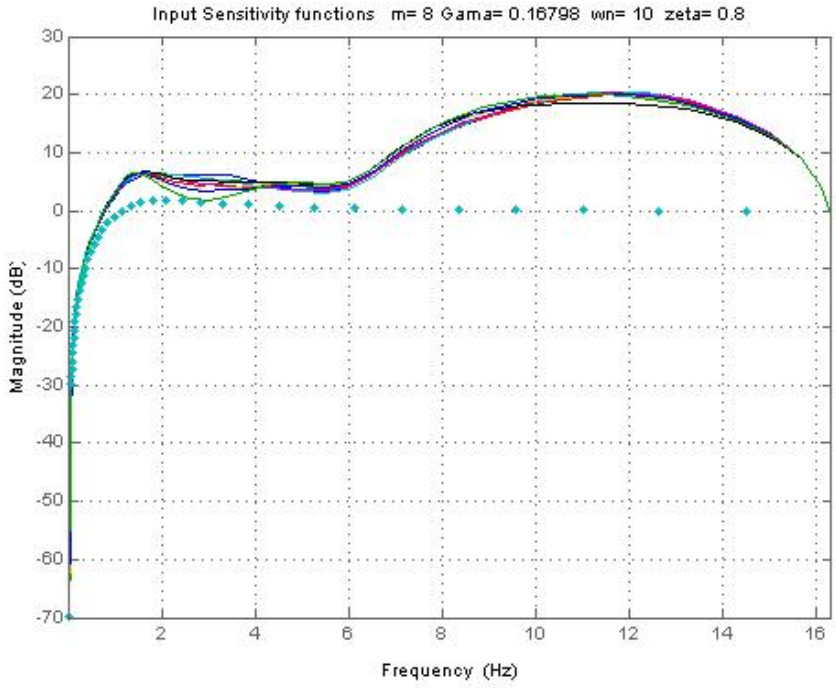

Figure 25 - L'effet de l'ajout d'un polynôme (z+1) sur la fonction de sensibilité de l'entrée

Nous allons à présent essayer de trouver un régulateur qui puisse stabiliser toutes les configurations pour des spécifications d'amortissement plus exigeantes, i.e. ω_n = 20 rad/s et ζ = 0.8. L'ordre du régulateur est maintenu à 8. Le résultat est sur la figure ci-dessous :

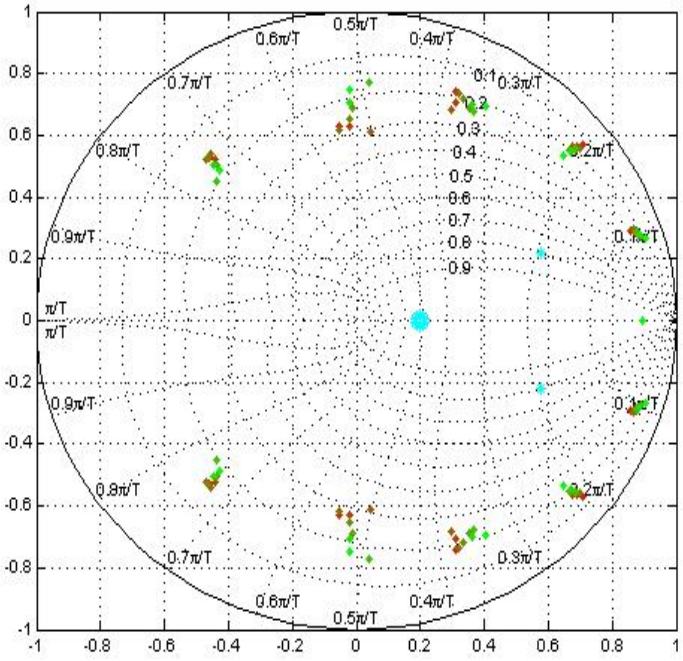

Figure 26 - Lieu des pôles des 9 configurations pour ω_n=20 rad/s ζ = 0.8 ordre régulateur 8

Nous voyons qu'avec l'algorithme de l'optimisation convexe, en dépit de hautes exigences en termes d'amortissement, les 9 configurations ont été stabilisées. Ce qui est important à remarquer, est que en regardant la figure 26, nous voyons qu'en réalité, les systèmes n'opèrent pas à 20 rad/s, car les pôles n'ont pas été placés aux emplacements désirés.

La figure 27 ci-dessous montre l'effet du Loop Shaping sur la fonction de sensibilité de la sortie (en bleu clair, le comportement désiré) :

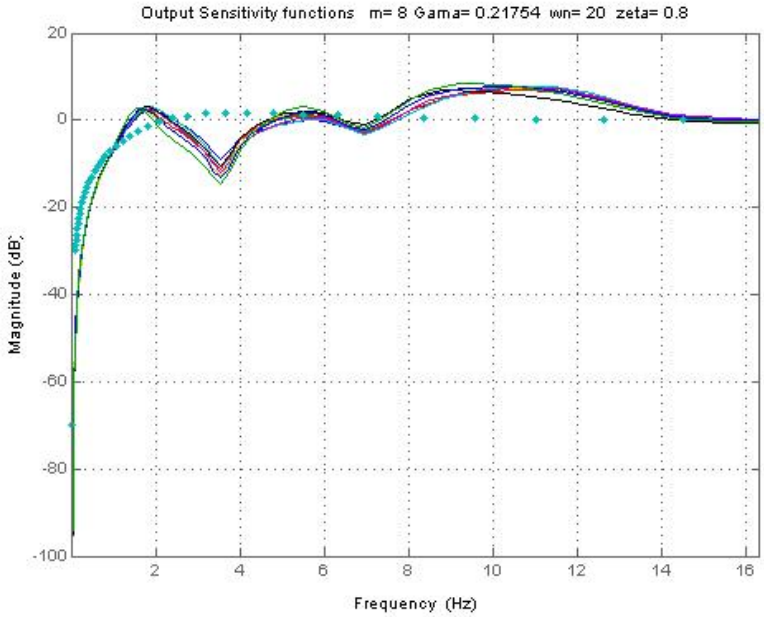

Figure 27 - effet du loop shaping sur la fonction de sensibilité de la sortie

Nous voyons que les fonctions de sensibilités de la sortie ne dépassent pas les 6 dB pour toutes les configurations.

De plus, nous allons faire une simulation pour voir comment nos systèmes agissent-ils en termes de rejet de perturbation. Le résultat est illustré sur la figure ci-dessous :

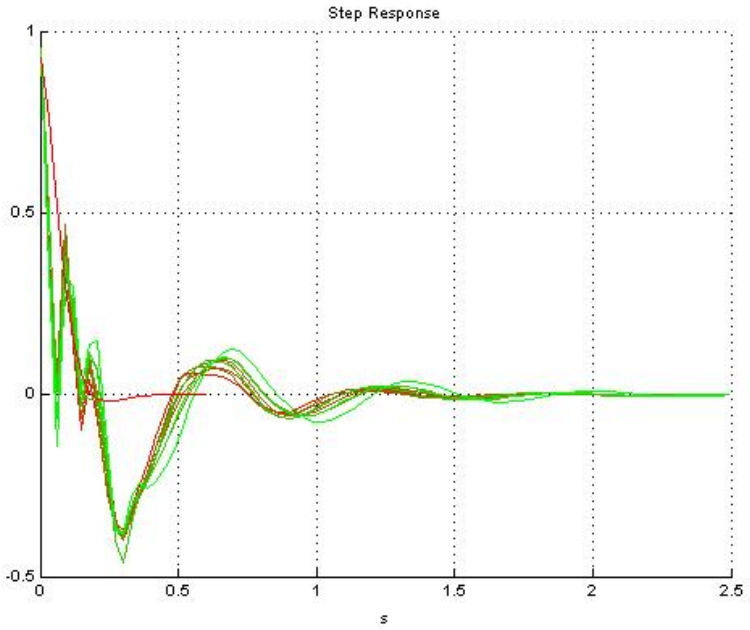

Figure 28 – Simulation des systèmes en rejet de perturbation

Nous voyons que tous les systèmes ont rejetés la perturbation subie en approximativement 1 seconde, et moins de deux oscillations. Ces résultats restent à être vérifiés en pratique.

4. Comparaison avec la méthode de placement de pôles nominale

Maintenant que notre démarche donne de bons résultats en simulation, nous allons la comparer à une méthode plus classique. Nous allons concevoir un régulateur pour le un système donné (le système 2B, car le ressort est attaché au point du milieu sur le bras et sur la plate-forme) avec la méthode de placement de pôles nominale (dont le régulateur va être synthétisé avec la méthode de Diophantine) et l'appliquer aux autres configurations, pour voir s'il peut stabiliser toutes les configurations. En effet, ceci nous permettra aussi de voir si le système que nous avons choisi (le joint flexible) est le bon pour tester la démarche de l'optimisation convexe.

4.1 Synthèse d'un régulateur RST avec la méthode de Diophantine

4.1.1 Régulateur avec intégrateur

En vue de l'ordre de nos modèles identifiés, nous allons définir l'ordre des différents polynômes nécessaires pour synthétiser notre régulateur RST selon [4].

Si on considère la fonction de transfert de nos modèles : $H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$, le degré des polynômes A et B sont :

$\delta A = 4 \qquad \delta B = 3$

Si nous considérons le modèle à poursuivre $H_m(z) = \frac{B_m(z)}{A_m(z)}$, nous choisissons les degrés d'A_m et de B_m comme ceux de A et B, puisque nous n'avons pas l'intension d'ajouter ou de supprimer des zéros ou des pôles à notre système. Donc :

$\delta A_m = 4 \qquad \delta B_m = 3$

L'équation de Diophantine à résoudre est donc :

$$A(z)(z-1)R'(z) + B(z)S(z) = A_m(z)A_0(z)$$

Comme nous pouvons le voir sur la figure ci-dessous (figure 29), les zéros du système sont près de la zone d'instabilité (ou négatifs), et leur simplification (leur inclusion dans le polynôme B^+) pourrait se résulter en l'instabilité de pôles dans la fonction de transfert :

$$\frac{U(z)}{Y(z)} = \frac{A(z)B'_m}{A_m(z)B^+(z)}$$

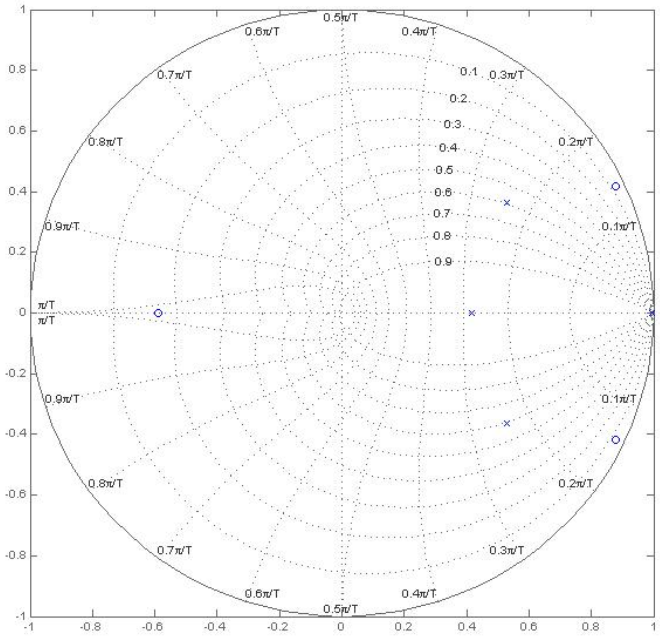

Figure 29 - Lieu des pôles et des zéros du système 2B

Dans ce cas,

$$B = B^-$$

$$B^+ = 1$$

Le degré du polynôme observateur A_0 est déterminé comme suit :

$$\delta A_0 = 2\delta A - \delta A_m + l - 1 = 4$$

Comme nous insérons un seul intégrateur dans notre régulateur $K(z) = \frac{S(z)}{R(z)}$, et que nous avons $R(z) = (z-1)^l R'(z)$, nous avons $l = 1$.

Donc nous pouvons maintenant calculer les degrés de R et S :

$$\delta R' = \delta A_m + \delta A_0 - \delta A - l = 3 \qquad \delta S = \delta A + l - 1 = 3$$

L'équation de Diophantine se résout comme suit, avec la matrice de Sylvester :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & b_1 & b_0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \\ a_4 & a_3 & a_2 & 0 & b_3 & b_2 & b_1 \\ 0 & a_4 & a_3 & 0 & 0 & b_3 & b_2 \\ 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ c_3 - a_3 \\ c_4 - a_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \end{bmatrix}$$

Avec :

- a_i (i = 1,…,4) les coefficients du polynôme A(z), monique
- b_i (i = 0,…,3) les coefficients du polynôme B(z)
- r_i (i = 1,…,3) les coefficients du polynôme R'(z), monique
- s_i (i = 0,…,3) les coefficients du polynôme S(z)
- c_i (i =1,…,4) les coefficients du polynôme $A_m(z)A_0(z)$

Il ne faut pas oublier de multiplier le polynôme R'(z) obtenu par (z-1) pour obtenir le polynôme R(z). Il nous reste à calculer T(z). Si on choisi le modèle à poursuivre suivant :

$$H_m(z) = \frac{B^-(z)B_m'}{P_A(z)\,P_D(z)} \qquad où \quad B_m' = P_A(1)\frac{P(1)}{B^-(1)}$$

Le polynôme $P_A(z)$ est celui qui englobe tous les pôles auxiliaires, et $P_D(z)$ tous les dominants. Ainsi, le polynôme T(z) est calculé :

$$T(z) = B_m' A_0(z)$$

Il est nécessaire de rappeler que pour l'asservissement, il faudra adapter le polynôme T(Z). Dans ce cas :

$$T = S(1)$$

4.1.2 Régulateur avec intégrateur et zéro en -1

L'ajout d'un zéro en -1 dans le numérateur du régulateur (S(z)), comme expliqué §3.4.6, aide à atténuer l'effet des bruits sur l'entrée du système à commander (donc atténue la réponse fréquentielle de la fonction de sensibilité de l'entrée de hautes fréquences). L'équation de Diophantine devient dans ce cas :

$$A(z)(z-1)R'(z) + B(z)(z+1)S'(z) = A_m(z)A_0(z)$$

Pour résoudre ce problème, nous allons inclure le polynôme (z-1) dans A(z) et (z+1) dans B(z) :

$$A'(z) = (z-1)A(z)$$
$$B'(z) = (z+1)B(z)$$

Le problème se transforme donc en :

$$A'(z)R'(z) + B'(z)S'(z) = A_m(z)A_0(z)$$

Nous allons donc résoudre le problème pour A'(z) et B'(z), puis après avoir trouvé les polynômes R'(z) et S'(z), nous allons les multiplier par (z-1) et (z+1) respectivement, pour obtenir les polynômes R(z) et S(z). Le calcul des degrés des différents polynômes est comme suit :

$$\delta A' = 5 \qquad \delta B' = 4$$
$$\delta A_m = 5 \qquad \delta B_m = 4$$
$$\delta A_0 = 2\delta A - \delta A_m - 1 = 4$$
$$\delta R' = \delta A_m + \delta A_0 - \delta A = 4$$
$$\delta S = \delta A - 1 = 4$$

Il faut également noter qu'il n'y a pas de simplification de zéros comme dans §4.1.1. De ce fait :

$$B = B^-$$
$$B^+ = 1$$

Dans ce cas, L'équation de Diophantine se résout comme suit, avec la matrice de Sylvester :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 & b_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & 0 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & 0 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 \\ 0 & a_5 & a_4 & a_3 & 0 & 0 & b_4 & b_3 & b_2 \\ 0 & 0 & a_5 & a_4 & 0 & 0 & 0 & b_4 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ c_3 - a_3 \\ c_4 - a_4 \\ c_5 - a_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \\ c_9 \end{bmatrix}$$

Avec :

- a_i (i = 1,…,5) les coefficients du polynôme A'(z), monique
- b_i (i = 0,…,4) les coefficients du polynôme B'(z)
- r_i (i = 1,…,4) les coefficients du polynôme R'(z), monique
- s_i (i = 0,…,4) les coefficients du polynôme S'(z)
- c_i (i =1,…,5) les coefficients du polynôme $A_m(z)A_0(z)$

Il ne faut pas oublier de multiplier les polynômes R'(z) et S'(z) par (z-1) et (z+1) respectivement pour obtenir les polynômes R(z) et S(z). Le polynôme T(z) est calculé comme dans §4.1.1.

4.2 Simulation pour la méthode de placement de pôles nominale

Dans ce paragraphe, nous allons comme déjà dit, appliquer le régulateur synthétisé pour stabilisé la configuration 2B, aux 8 autres configurations (en simulation), pour voir s'il peut les stabiliser. En effet, nous allons exiger de plus en plus en termes de spécifications d'amortissement pour voir jusqu'où la méthode tient-elle la route :

- ω_n = 10 rad/s , ζ = 0.8 , Pôles auxiliaires à 0.4 :

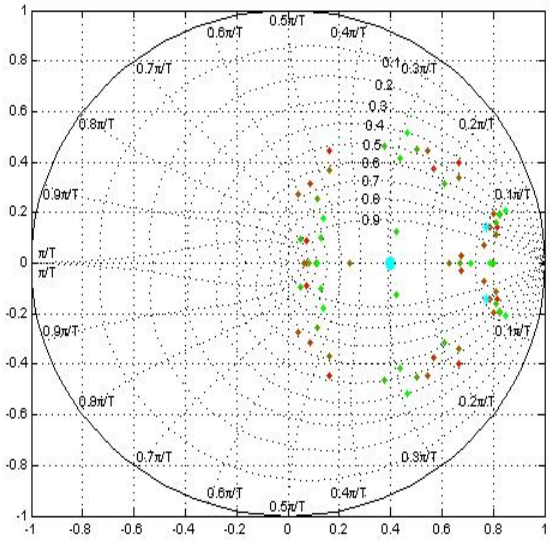

Figure 30 - lieu des pôles pour la méthode nominale, - ω_n = 10 rad/s , ζ = 0.8 , Pôles auxiliaires à 0.4

Nous voyons que le régulateur à réussi à stabiliser toutes les configurations avec une bonne marge. Pour ce qui est les fonctions de sensibilités :

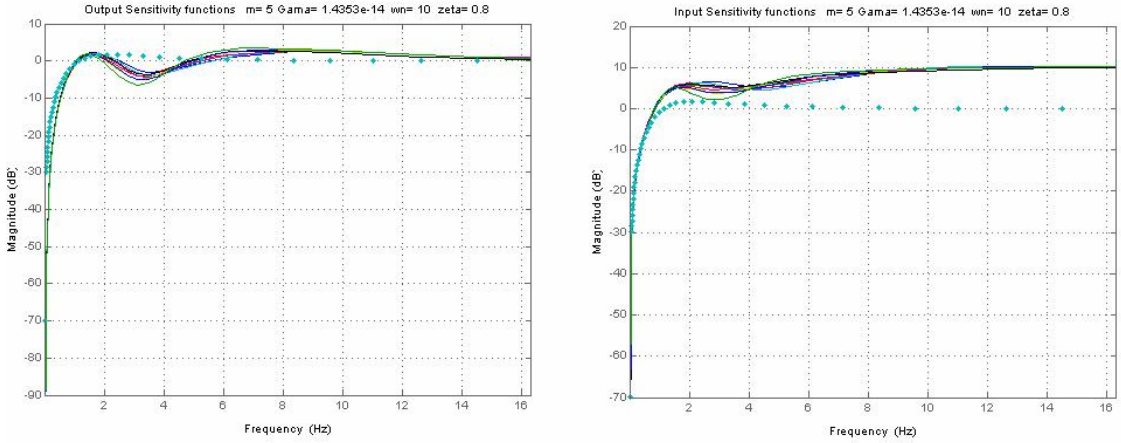

Figure 31 - Fonction de sensibilité de sortie (gauche) et d'entrée (droite) , méthode nominale, ω_n = 10 rad/s , ζ = 0.8 , Pôles auxiliaires à 0.4

Nous voyons que la fonction de sensibilité de sortie ne dépasse pas les 6 dB et la fonction de sensibilité de l'entrée les 20 dB pour toutes les configurations.

Nous avons ainsi imposé des spécifications d'amortissement plus exigentes (en bougeant les pôles dominants et auxiliaires vers des régions du lieu des pôles plus rapides, c'est-à-dire à gauche), pour voir les limites ce de régulateur. À ω_n = 16 rad/s et ζ= 0.8, avec des pôles auxiliaires placés à 0.2, nous avons :

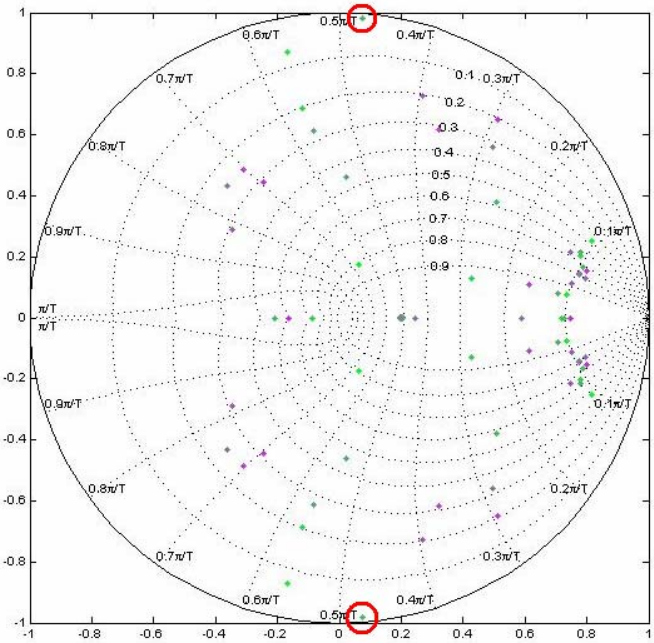

Figure 32 - lieu des pôles pour la méthode nominale, - ω_n = 16 rad/s , ζ = 0.8 , Pôles auxiliaires à 0.2

Nous voyons que l'un des systèmes est à la limite de l'instabilité. Ce système est celui de la configuration 3C.

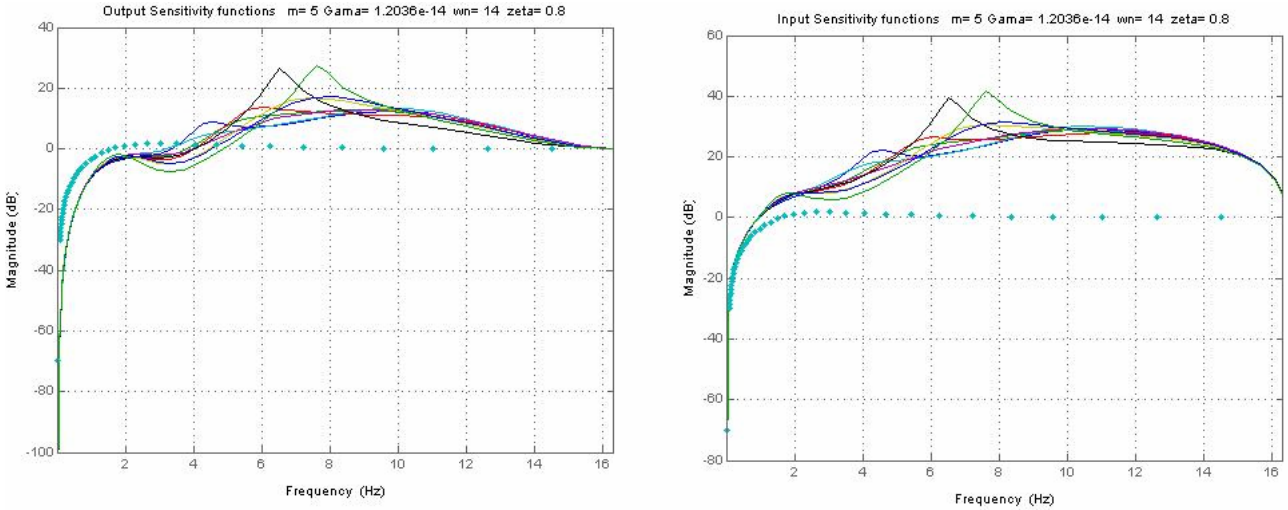

Figure 33 - Fonction de sensibilité de sortie (gauche) et d'entrée (droite) , méthodenominale, ω_n = 16 rad/s , ζ = 0.8 , Pôles auxiliaires à 0.2

Nous voyons que la fonction de sensibilité de la sortie pour la configurations 3C (courbe verte) dépasse largement les 6 dB, et celui de l'entrée dépasse largement les 20 dB. Il est nécessaire de rappeler que dans ce cas, nous avons inclus un polynôme (z+1) dans le numérateur du régulateur. La simulation du comportement de la sorite en rejet de perturbation est illustrée sur la figure ci-dessous :

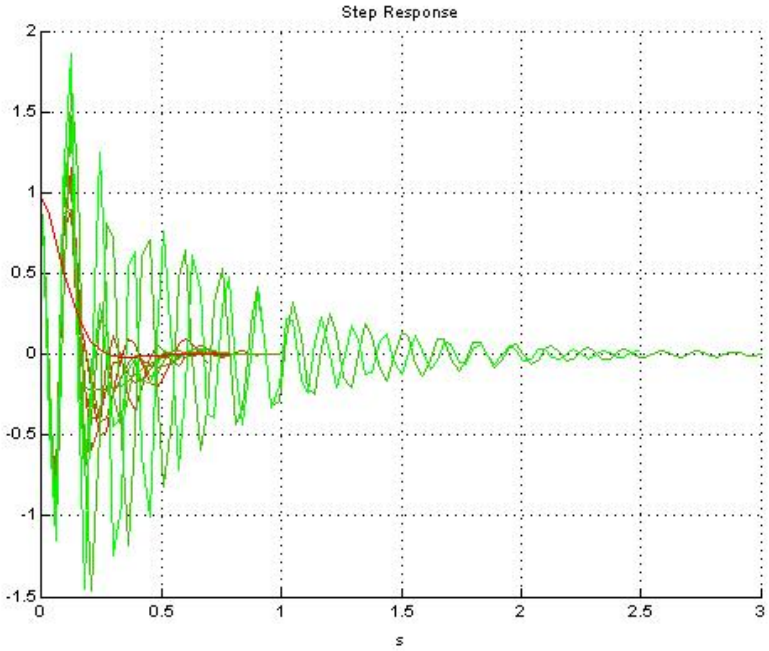

Figure 34 – Sortie en rejet de perturbation pour la méthode nominale, - ω_n = 16 rad/s , ζ = 0.8 , Pôles auxiliaires à 0.2

Nous voyons que le système 3C (et un autre système) est à la limite de la stabilité, et que pour ce système, la perturbation est rejetée après beaucoup d'oscillations.

4.3 Comparaison en pratique

Nous allons maintenant procéder à la comparaison des deux méthodes, en implantant les résultats sur le système en pratique. Nous allons commencer avec des spécifications d'amortissement relativement bas, pour ensuite les hausser en déplaçant les pôles auxiliaires et dominants vers la gauche du lieu des pôles.

Les régulateurs pour les deux méthodes vont être synthétisés pour la configurations 2B, puis vont être implémentés sur la configuration 3C, puisque nous avons vu lors du paragraphe 4.2 que la méthode nominale donnait un régulateur qui poussait le système 3C pour des spécifications d'amortissement relativement exigeantes.

Pour le régulateur synthétisé avec l'optimisation convexe, nous allons effectuer un Loop Shaping (afin d'exploiter au mieux cette méthode) au cas où cela ne détériore pas

nos résultats. L'ordre du régulateur ainsi synthétisé ne peux pas dépasser 8, à cause des limites imposées pour l'implémentation.

Nous allons insérer un polynôme (z+1) dans le numérateur du régulateur (polynôme S) en cas de besoin, pour atténuer l'effet des bruits sur l'entrée du système (atténuation de la fonction de sensibilité d'entrée en hautes fréquences.

Enfin pour chaque cas, nous faisons subir au système un saut indiciel, suivit d'une perturbation. Nous veillerons bien sûr à ne pas saturer l'entrée du système.

4.3.1 Pôles dominants et auxiliaires lents

Pour débuter la comparaison, nous imposons les paramètres suivants :

- $\omega_n = 10$ rad/s
- $\zeta = 0.8$
- Pôles auxiliaires à 0.4
- Pas de polynôme (z+1) dans S(z)

Ces conditions sont relativement cléments en vue de l'expérience que nous avons du comportement du système, et de sa bande passante qui se situe à 6 rad/s. Pour ce cas, nous voulons avoir des conditions égales pour les deux méthodes, donc nous choisissons un régulateur d'ordre 5 pour l'optimisation convexe, celui synthétisé par la méthode nominale étant fixe à 5.

Le résultat de l'implémentation est illustré sur la figure ci-dessous :

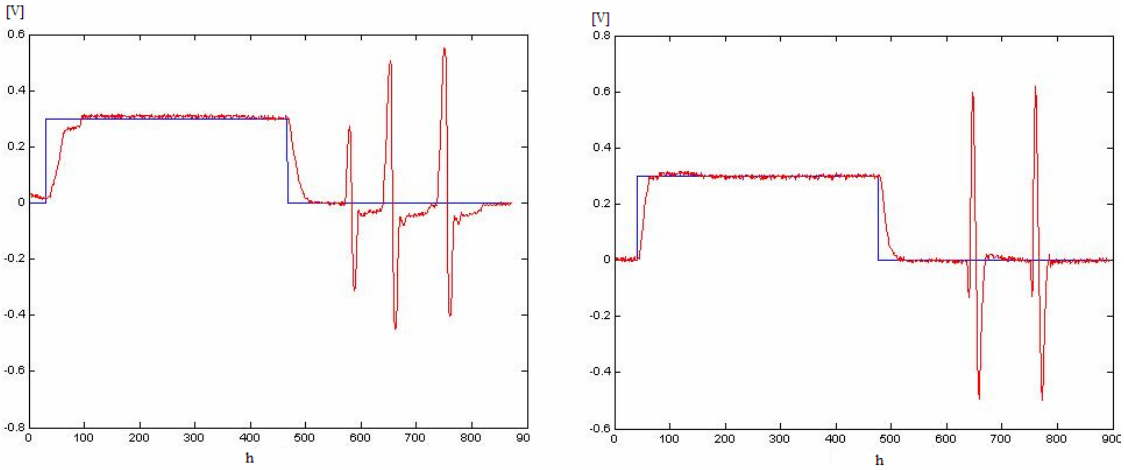

Figure 35 - Résultat de l'implémentaion, optim. cnvx ordre 5 (figure gauche), méthode nominale (figure droite) pour $\omega_n = 10$ rad/s , $\zeta = 0.8$, Pôles auxiliaires à 0.4

Nous voyons un temps d'établissement d'environ 65h (h=0.03, période d'échantillonnage) pour la réponse indicielle du système 3C avec le régulateur synthétisé avec la méthode d'optimisation convexe, et d'environ 40h pour celui avec le régulateur synthétisé avec la méthode nominale. Les deux méthodes ne montrent aucune différence quant au rejet de perturbation, qui est rejetée après une oscillation pour les deux cas.

Vérifions si la simulation confirme ces résultats :

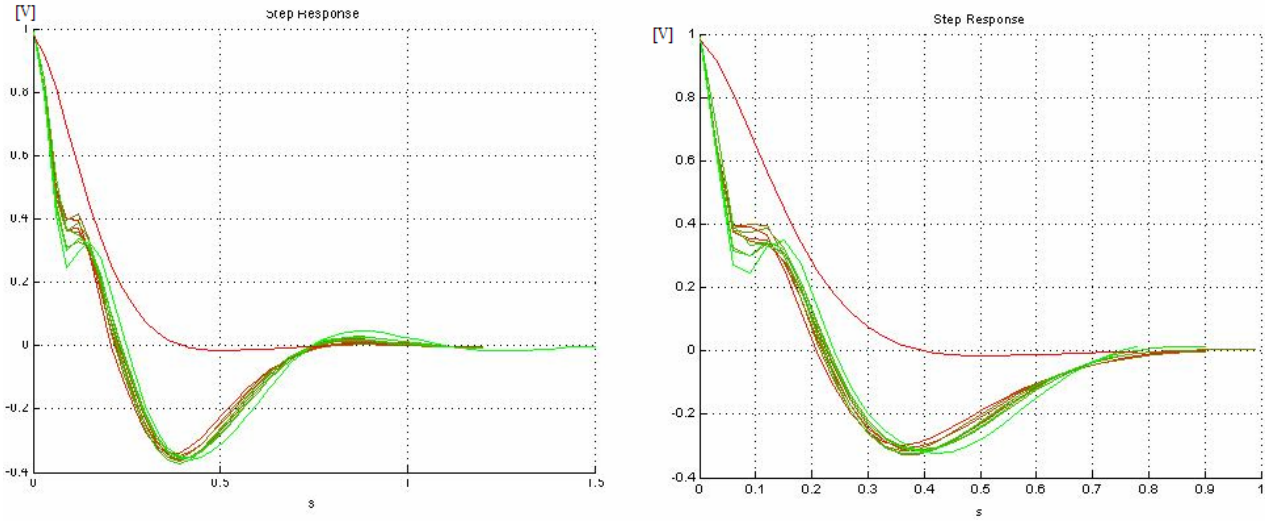

Figure 36 – Simulation du rejet de perturbation, optim. cnvx ordre 5 (figure gauche), méthode nominale (figure droite) pour ω_n = 10 rad/s , ζ = 0.8 , Pôles auxiliaires à 0.4

Nous voyons que la simulation confirme les résultats obtenus. Nous remarquons aussi que le régulateur synthétisé avec la méthode de l'optimisation convexe rejette la perturbation après environ 1 seconde, mais celui avec la méthode nominale après environ 0.8 secondes, ce qui reflète bien les temps d'établissements obtenus en pratique.

4.3.2 Augmentation de l'ordre du régulateur

Après les résultats du paragraphe précédent légèrement favorables à la méthode de Dophantine, nous allons exploiter les avantages de l'optimisation convexe, pour savoir si on peut améliorer ses résultats. Pour ce faire, nous allons augmenter l'ordre du régulateur synthétisé par l'optimisation convexe, afin de donner plus de degrés de liberté à l'algorithme, qui aura donc moins de contraintes pour exécuter l'optimisation. L'ordre sera donc augmenté à 8. Les conditions restent identiques au paragraphe précédent.

Le résultat de l'implémentation est illustré sur la figure ci-dessous :

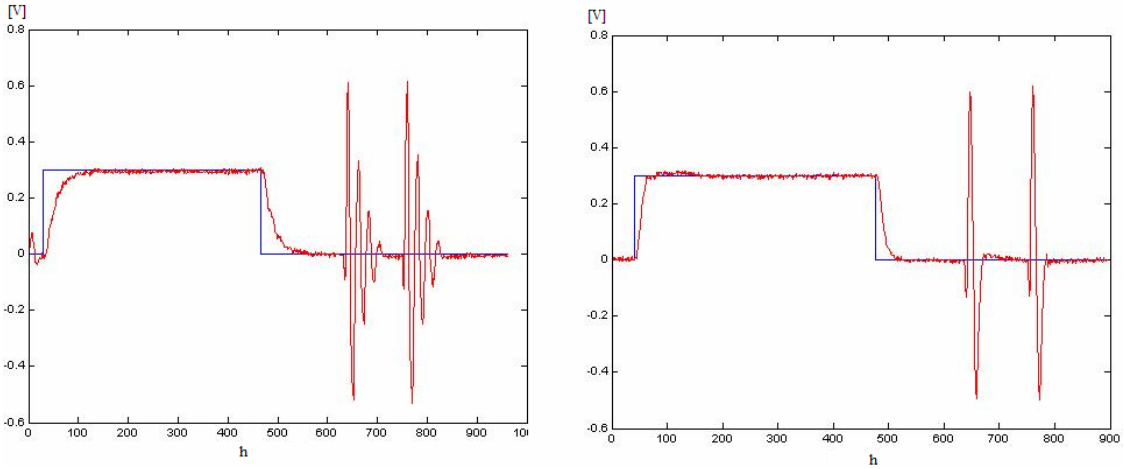

Figure 37 - Résultat de l'implémentaion, optim. cnvx ordre 8(figure gauche), méthode nominale (figure droite) pour ω_n = 10 rad/s , ζ = 0.8 , Pôles auxiliaires à 0.4

Nous voyons un temps d'établissement d'environ 100h (h=0.03, période d'échantillonnage) pour la réponse indicielle du système 3C avec le régulateur synthétisé avec la méthode d'optimisation convexe, et d'environ 40h pour celui avec le régulateur synthétisé avec la méthode nominale. Les perturbations sont rejetées après plus de 3 oscillations pour la méthode de l'optimisation convexe, et toujours après une seule oscillation pour la méthode nominale.

Vérifions si la simulation confirme ces résultats :

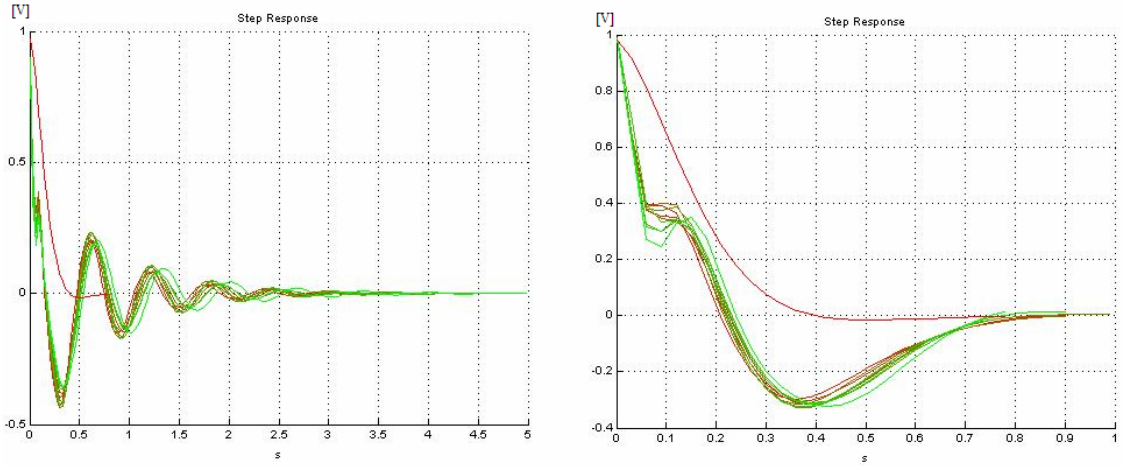

Figure 38 - Simulation du rejet de perturbation, optim. cnvx ordre 8 (figure gauche), méthode nominale (figure droite) pour ω_n = 10 rad/s , ζ = 0.8 , Pôles auxiliaires à 0.4

Nous voyons que la simulation confirme les résultats obtenus. Nous remarquons aussi que le régulateur synthétisé avec la méthode de l'optimisation convexe rejette la perturbation après environ 2.5 secondes, mais celui avec la méthode nominale après environ 0.8 secondes, ce qui reflète bien les temps d'établissements obtenus en pratique.

Pour expliquer les raisons de cette détérioration, nous allons d'abord jeter un coup d'œil au lieu des pôles pour les deux méthodes :

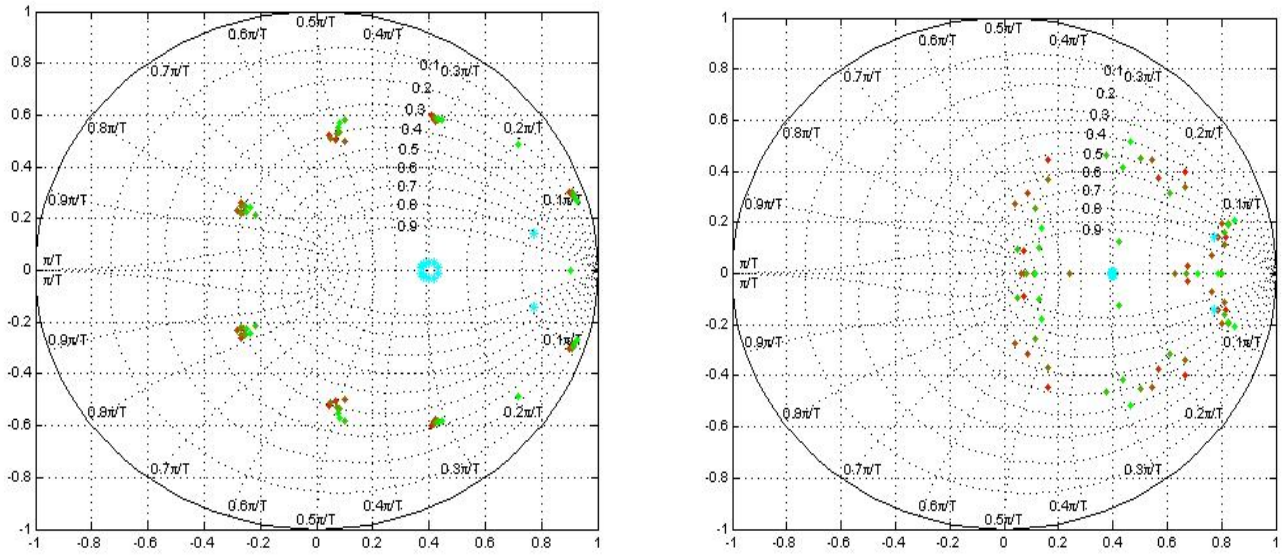

Figure 39 – Lieu des pôles, optim. cnvx ordre 8 (figure gauche), méthode nominale (figure droite) pour ω_n = 10 rad/s , ζ = 0.8 , Pôles auxiliaires à 0.4

Nous voyons que dans le cas de l'optimisation convexe, les pôles des systèmes sont placés plus ou moins sur la courbe de $\zeta = 0.4$, ce qui explique la mauvaise atténuation des amplitudes sur la figures 38 droite. Tandis que pour la méthode nominale, il y a certains pôles qui sont placés sur des courbes avec des z plus grands, ce qui pourrait expliquer la bonne atténuation des amplitudes dans la figure 38 gauche.

Il est utile de remarquer que ni l'un ni l'autre des méthodes, ne réalisent les attentes que nous avions en termes de spécifications d'amortissement (sauf la méthode nominale pour le système 2B). La méthode de l'optimisation convexe doit faire un compromis pour pouvoir stabiliser tous les systèmes, et pour la méthode nominale, comme les systèmes sont différents, il est évident que le régulateur synthétisé pour amener les pôles de la configuration 2B aux emplacements désirés, ne peut pas amener les pôles des autres systèmes aux mêmes emplacements.

Nous pourrions penser que la fonction de sensibilité de la sortie pourrait expliquer ces résultats (en effet, il montre combien la sortie de la boucle fermée est sensible aux changement de paramètres, mais la figure ci-dessous ne permet pas de tirer cette conclusion :

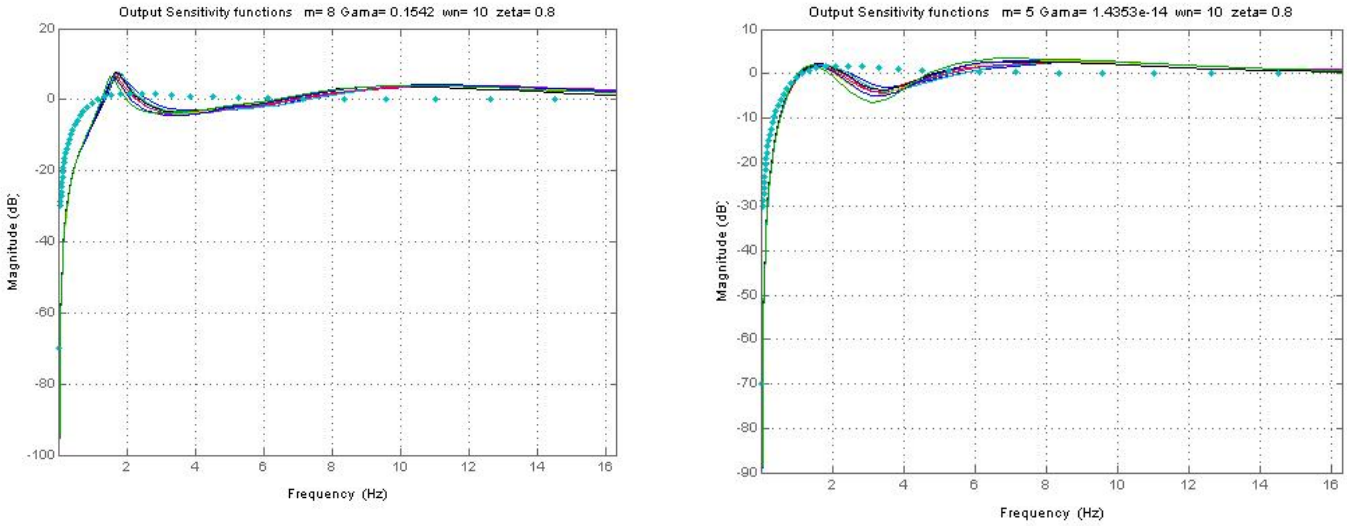

Figure 40 – Fonction de sensibilité de la sortie, optim. cnvx ordre 8 (figure gauche), méthode nominale (figure droite) pour ω_n = 10 rad/s , ζ = 0.8 , Pôles auxiliaires à 0.4

En effet, nous voyons qu'aucun des deux ne dépasse les 6 dB.

4.3.3 Déplacement des pôles auxiliaires à gauche

Pour ce cas, nous imposons les paramètres suivants :

- ω_n = 10 rad/s
- ζ = 0.8
- Pôles auxiliaires à 0.2
- Polynôme (z+1) dans S(z)

, pour voir l'effet des pôles auxiliaires plus rapides sur nos résultats. L'ordre du régulateur synthétisé par la méthode de l'optimisation convexe est 8.

Le résultat de l'implémentation est illustré sur la figure ci-dessous :

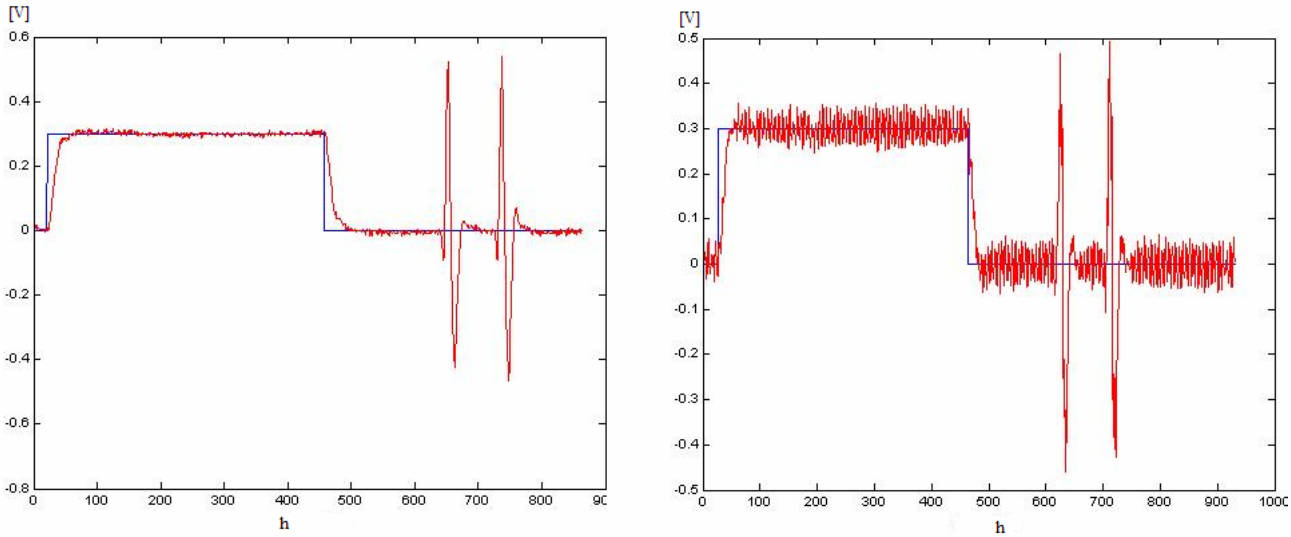

Figure 41 - Résultat de l'implémentaion, optim. cnvx ordre 8(figure gauche), méthode nominale (figure droite) pour ω_n = 10 rad/s , ζ = 0.8 , Pôles auxiliaires à 0.2

Nous voyons beaucoup d'oscillations sur le signal de sortie du système en boucle fermée avec le régulateur synthétisé par la méthode nominale, en dépit de l'insertion d'un polynôme (z+1) dans le numérateur du régulateur.

Vérifions si la simulation confirme ces résultats :

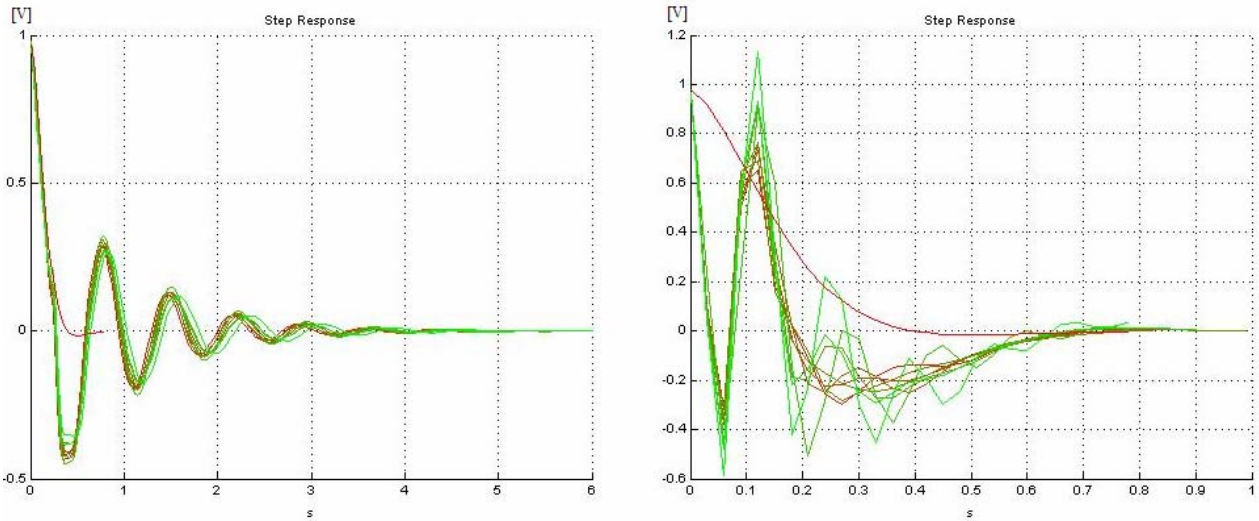

Figure 42 - Simulation du rejet de perturbation, optim. cnvx ordre 8 (figure gauche), méthode nominale (figure droite) pour ω_n = 10 rad/s , ζ = 0.8 , Pôles auxiliaires à 0.2

En effet, nous pouvons voir que pour la méthode nominale (figure 42, gauche), le signal de sortie du système 3C en vert, montre des oscillations. Ceci devrait être dû à la fonction de sensibilité de l'entrée (qui montre la sensibilité de l'entrée du système aux bruits). Vérifions cette fonction :

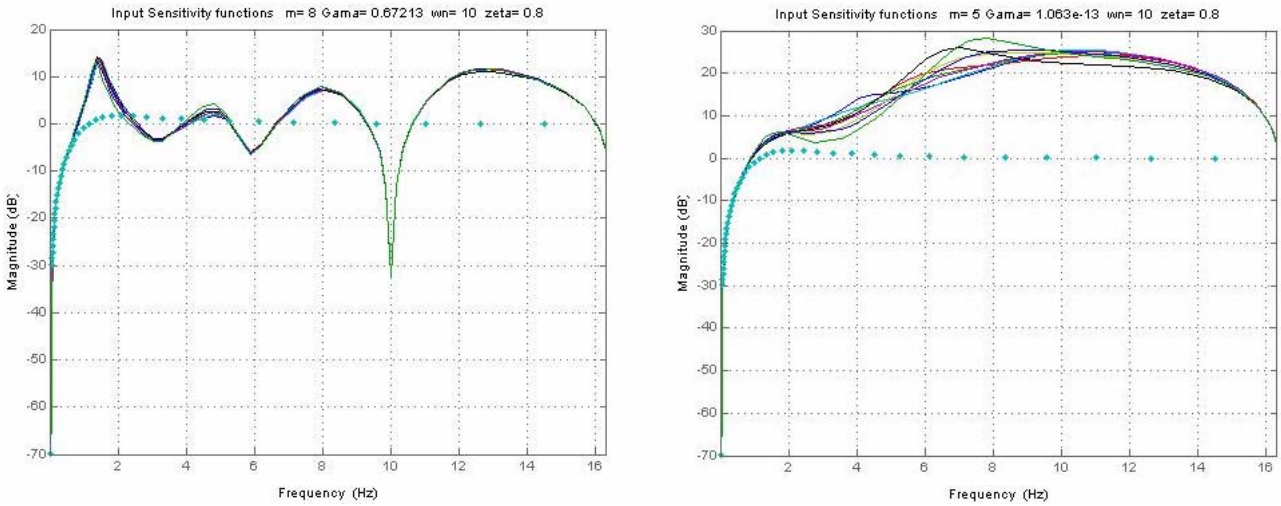

Figure 43 - Fonction de sensibilité de l'entrée, optim. cnvx ordre 8 (figure gauche), méthode nominale (figure droite) pour ω_n = 10 rad/s , ζ = 0.8 , Pôles auxiliaires à 0.4

En effet, nous voyons que cette fonction ne dépasse pas les 20 dB pour la méthode d'optimisation convexe, mais que pour la méthode nominale, la fonction de sensibilité de l'entrée pour le système 3C (courbe en vert, figure 43, droite) monte jusqu'à environ 30 dB (aux alentours de 8 Hz).

4.3.4 Déplacement des pôles dominants à gauche

Pour ce cas, nous imposons les paramètres suivants :

- ω_n = 14 rad/s
- ζ = 0.8
- Pôles auxiliaires à 0.4
- Pas de polynôme (z+1) dans S(z)

, pour voir l'effet des pôles dominants plus rapides sur nos résultats. L'ordre du régulateur synthétisé par la méthode de l'optimisation convexe est 8.

Le résultat de l'implémentation est illustré sur la figure ci-dessous :

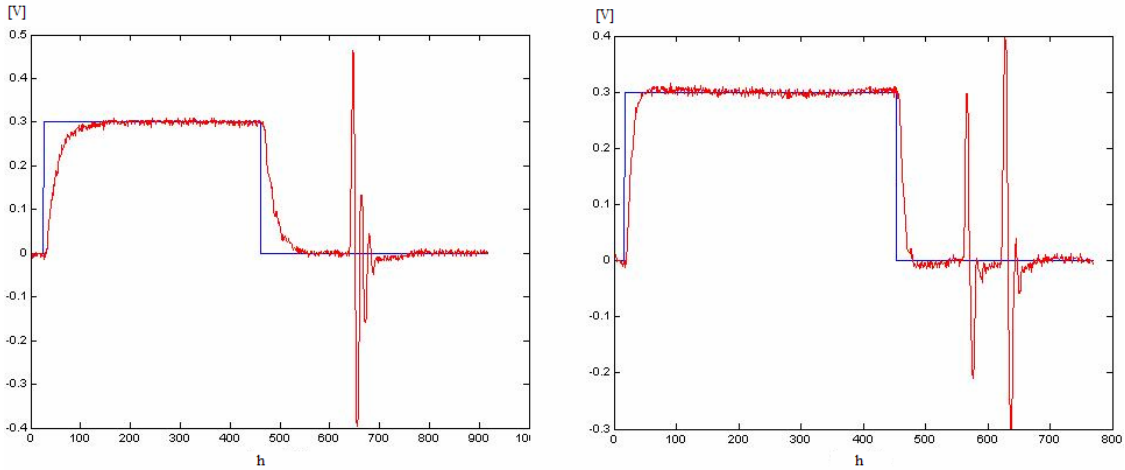

Figure 44 - Résultat de l'implémentaion, optim. cnvx ordre 8(figure gauche), méthode nominale (figure droite) pour ω_n = 14 rad/s , ζ = 0.8 , Pôles auxiliaires à 0.4

Nous voyons un temps d'établissement d'environ 120h (h=0.03, période d'échantillonnage) pour la réponse indicielle du système 3C avec le régulateur synthétisé avec la méthode d'optimisation convexe, et d'environ 40h pour celui avec le régulateur synthétisé avec la méthode nominale. Les perturbations sont rejetées après plus de 2 oscillations pour la méthode de l'optimisation convexe, et toujours après une seule oscillation pour la méthode nominale.

Vérifions si la simulation confirme ces résultats :

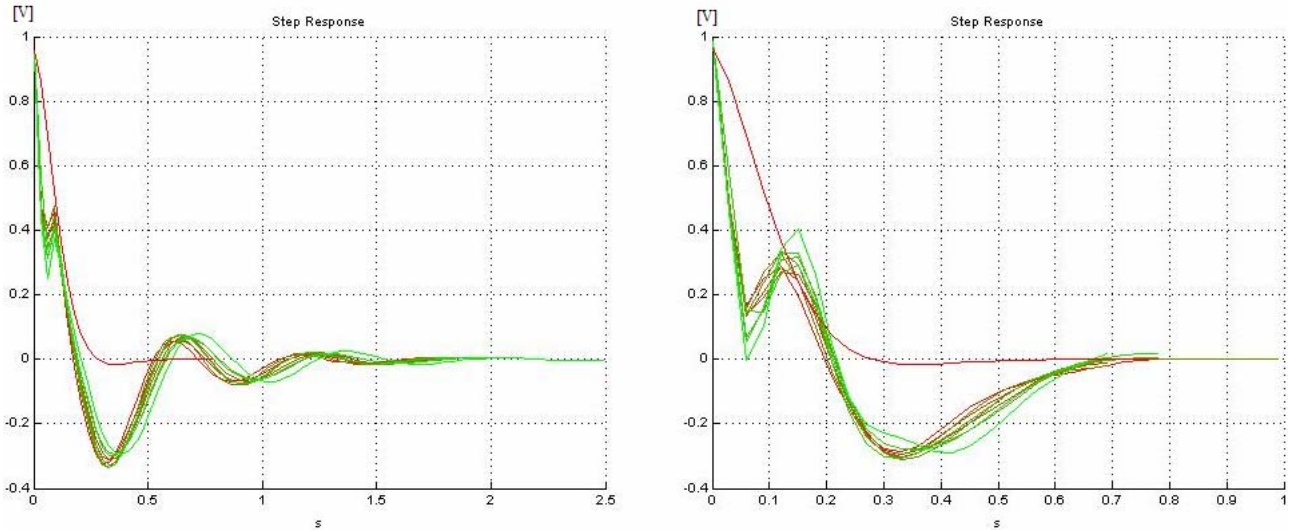

Figure 45 - Simulation du rejet de perturbation, optim. cnvx ordre 8 (figure gauche), méthode nominale (figure droite) pour ω_n = 14 rad/s , ζ = 0.8 , Pôles auxiliaires à 0.4

Nous voyons que la simulation confirme les résultats obtenus. Nous remarquons aussi que le régulateur synthétisé avec la méthode de l'optimisation convexe rejette la perturbation après environ 1.5 secondes, mais celui avec la méthode nominale, après environ 0.8 secondes, ce qui reflète bien les temps d'établissements obtenus en pratique.

Pour expliquer la raison de cette différence, nous allons jeter un coup d'œil au lieu des pôles pour les deux méthodes :

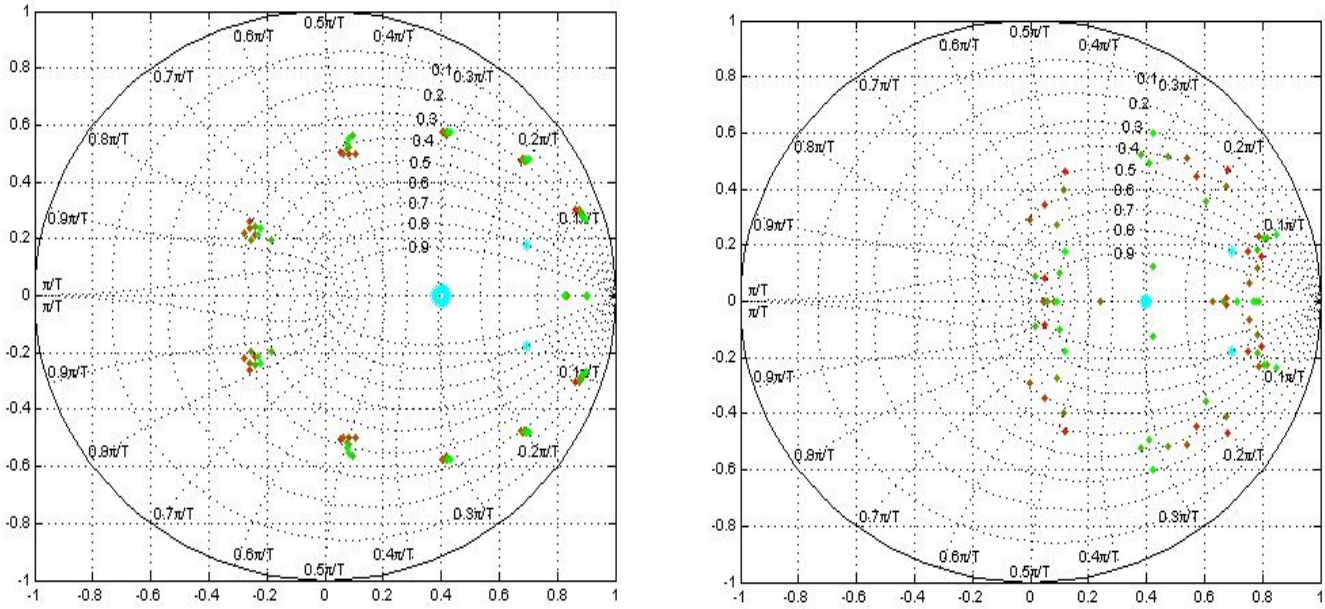

Figure 46 - Lieu des pôles, optim. cnvx ordre 8 (figure gauche), méthode nominale (figure droite) pour ω_n = 14 rad/s , ζ = 0.8 , Pôles auxiliaires à 0.4

En effet, nous voyons le même phénomène que lors du §4.3.2 et sur la figure 39. Les mêmes raisons alors citées pourraient être à l'origine de l'avantage de la méthode nominale dans ce cas. Comme précédemment, la fonction de sensibilité de la sortie ne permet pas d'expliquer cette différence :

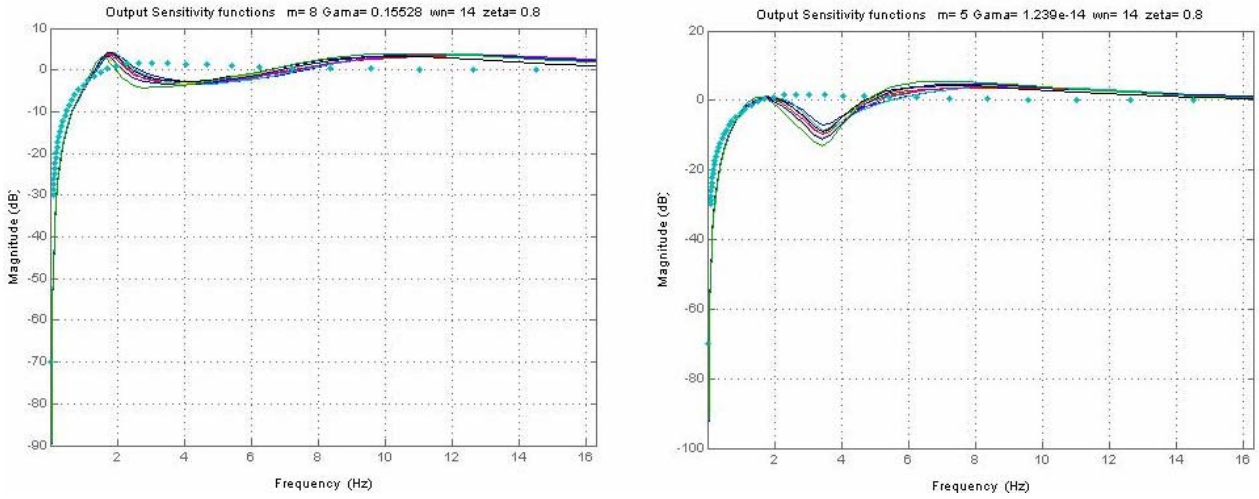

Figure 47 - Fonction de sensibilité de la sortie, optim. cnvx ordre 8 (figure gauche), méthode nominale (figure droite) pour ω_n = 14 rad/s , ζ = 0.8 , Pôles auxiliaires à 0.4

4.3.5 Déplacement des pôles auxiliaires et dominants à gauche

Pour ce cas, nous imposons les paramètres suivants :

- $\omega_n = 16$ rad/s
- $\zeta = 0.8$
- Pôles auxiliaires à 0.2
- Polynôme (z+1) dans S(z)

, pour voir l'effet des pôles auxiliaires et dominants plus rapides sur nos résultats et aussi pour pousser l'une des méthodes à montrer ses limites, en imposant des spécifications exigeantes d'amortissement. L'ordre du régulateur synthétisé par la méthode de l'optimisation convexe est 8. Un Loop Shaping a été réalisé.

Le résultat de l'implémentation est illustré sur la figure ci-dessous :

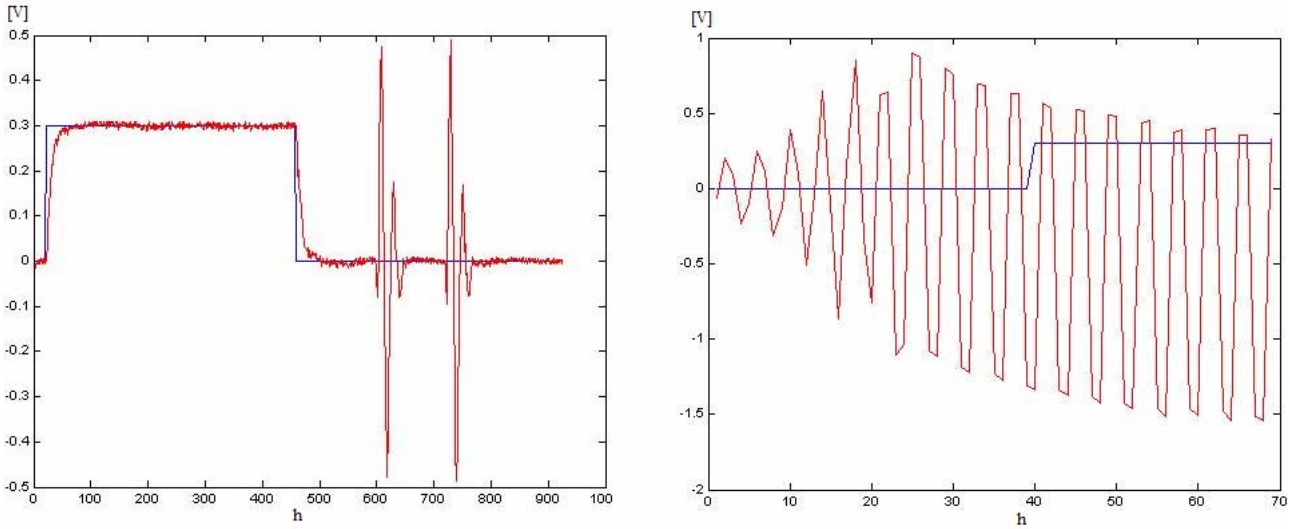

Figure 48 - Résultat de l'implémentaion, optim. cnvx ordre 8(figure gauche), méthode nominale (figure droite) pour $\omega_n = 14$ rad/s , $\zeta = 0.8$, Pôles auxiliaires à 0.4

Vérifions si la simulation confirme ces résultats :

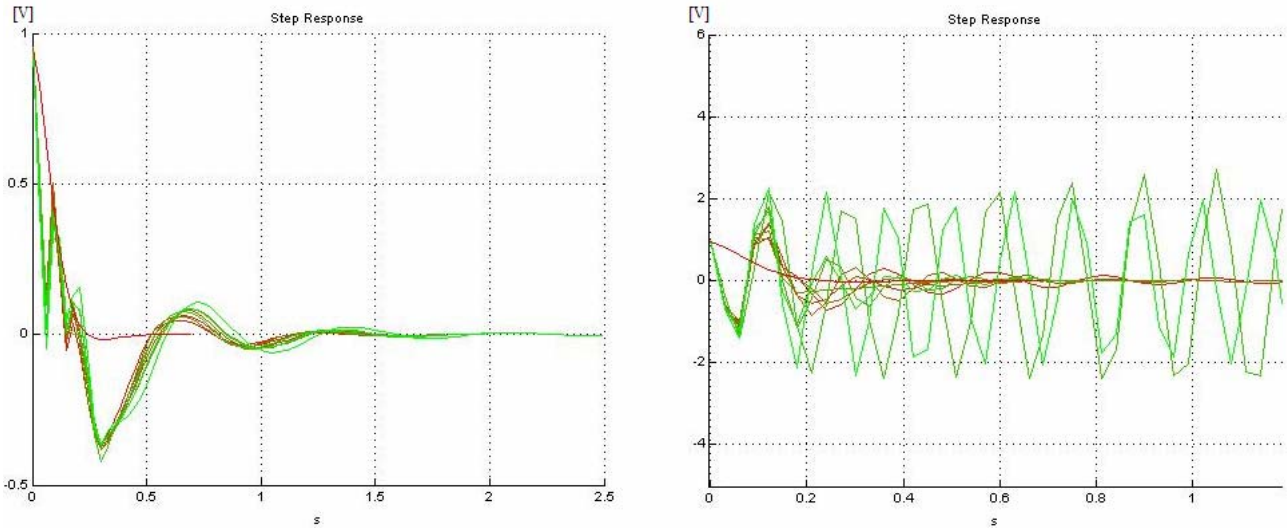

Figure 49 - Simulation du rejet de perturbation, optim. cnvx ordre 8 (figure gauche), méthode nominale (figure droite) pour ω_n = 16 rad/s , ζ = 0.8 , Pôles auxiliaires à 0.2

En effet, la simulation confirme bien que pour la méthode de l'optimisation convexe, la perturbation est rejetée après 2 oscillations. Jetons un coup d'œil aux lieu des pôles :

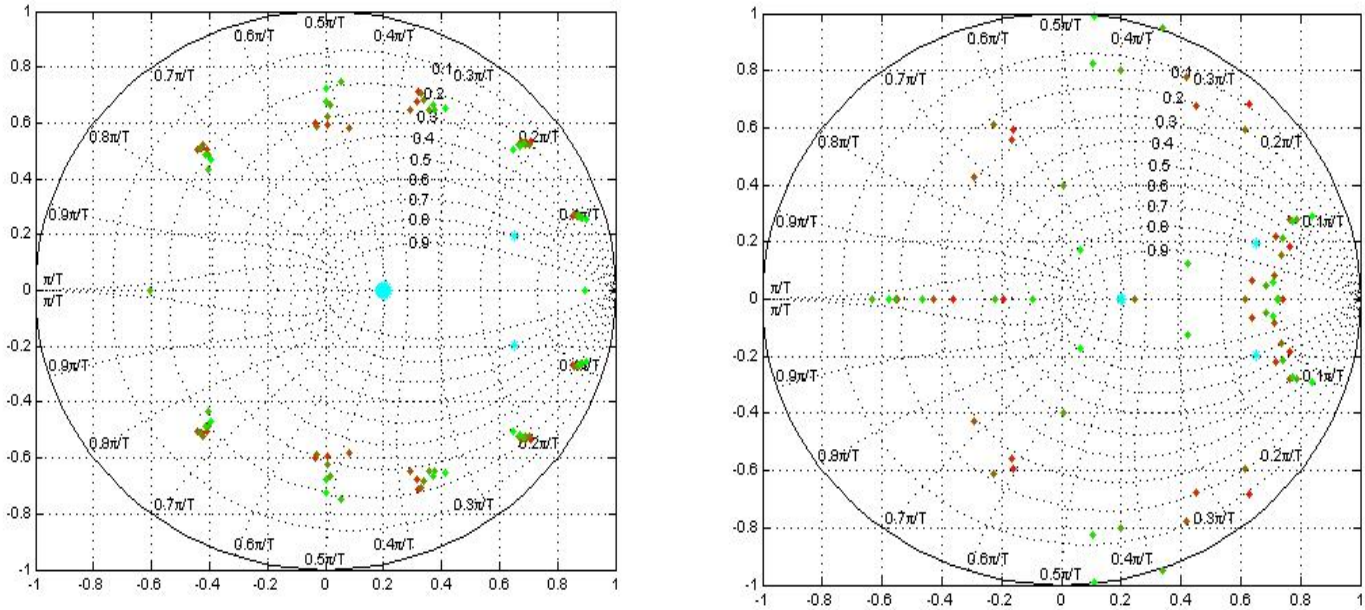

Figure 50 – Lieu des pôles, optim. cnvx ordre 8 (figure gauche), méthode nominale (figure droite) pour ω_n = 16 rad/s , ζ = 0.8 , Pôles auxiliaires à 0.2

En effet, comme nous pouvons le voir sur la figure 50 droite, et comme nous l'avions vu sur la figure 32 du §4.2, nous pourrions penser que ceci est du fait que le système 3C est sur limite critique de la stabilité pour ces conditions. Mais la figure 48 droite montre que le système devient instable avant même d'avoir subi une entrée (donc à 0V) ! Ceci devait être dû à la fonction de sensibilité de l'entrée du système en boucle fermée, car en l'absence d'entrée, seule un bruit amplifié pourrait causer cet effet. Vérifions cette fonction de sensibilité de l'entrée :

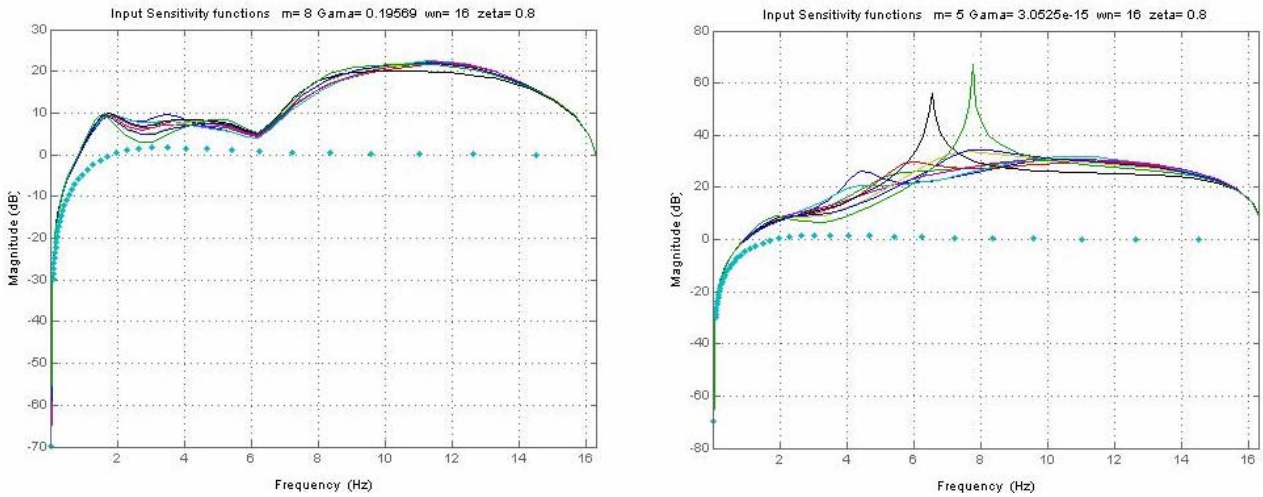

Figure 51 - Fonction de sensibilité de l'entrée, optim. cnvx ordre 8 (figure gauche), méthode nominale (figure droite) pour ω_n = 16 rad/s , ζ = 0.8 , Pôles auxiliaires à 0.2

En effet, nous voyons sur la figure 51 droite, que l'amplitude de la fonction de sensibilité de l'entrée pour le système 3C (méthode nominale) monte à plus de 60 dB aux alentours de 8 Hz.

4.3.6 Régulateur avec ordre très grand

Nous allons maintenant exploiter au maximum la méthode de l'optimisation convexe, pour obtenir un bon résultat, car nous songeons que dans les conditions du §4.3.1, quand les spécification d'amortissement sont assez cléments, nous devrions pouvoir obtenir au moins d'aussi bons résultats. Pour ce faire, nous allons choisir un ordre très grand, 24, qui dépasse nos limites d'implantation.

Nous imposons les paramètres suivants :

- ω_n = 10 rad/s
- ζ = 0.8
- Pôles auxiliaires à 0.4
- Pas de polynôme (z+1) dans S(z)

Pour le régulateur avec l'optimisation convexe, nous plaçons nos pôles auxiliaires à -0.2, ce qui est permis si ça nous permet d'améliorer nos résultats en étant plus exigeant. Comme nous ne pouvions pas implémenter ceci sur le système réel, et comme les résultats du §4.3 avait permit de vérifier que la simulation confirmait bien à chaque fois la réalité, nous sommes resté au stade de la simulation.

Le résultat de la simulation est illustré sur la figure ci-dessous :

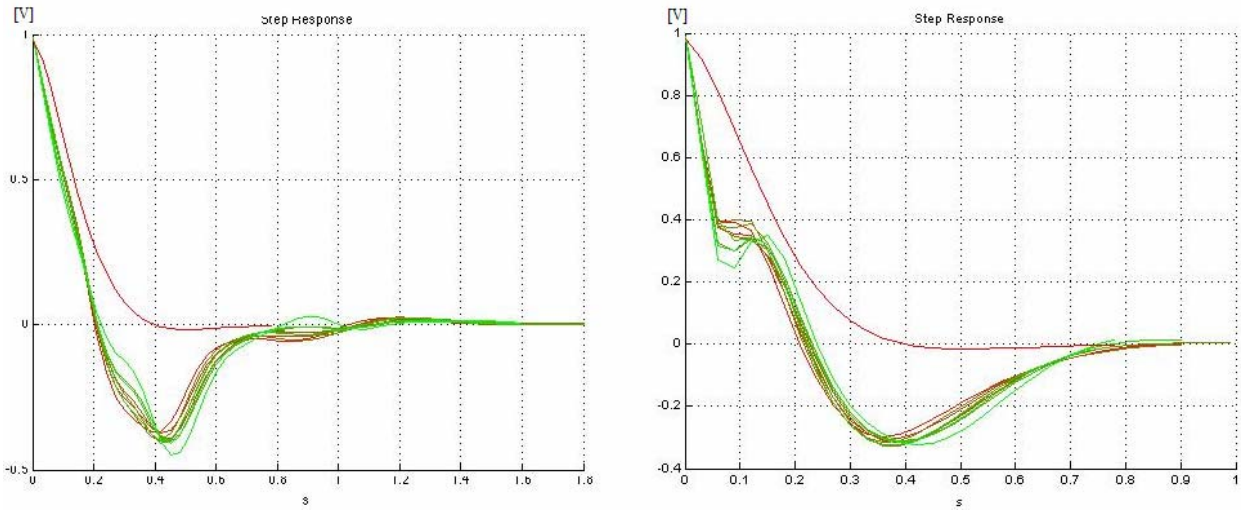

Figure 52 - Simulation du rejet de perturbation, optim. cnvx ordre 24 (figure gauche), méth.nominale (figure droite) pour ω_n = 10 rad/s , ζ = 0.8 , Pôles auxiliaires à 0.4 (nominale), -0.2 (opt cnvx)

En effet nous voyons que les pour les deux méthodes, la perturbation est rejetée après une seule oscillation et après environ 0.8 secondes.

4.3.7 Nouvelle formulation de l'optimisation convexe

En vue des résultats des paragraphes précédents, nous nous sommes dit que nous pouvions améliorer la méthode d'optimisation convexe, afin d'obtenir de bons résultats avec des régulateurs qui n'ont pas de très grands ordres.

Le problème d'optimisation du §2 se présentait comme suit (seulement placement de pôles):

$$\min imiser\ \gamma_i$$

$$\left\| \frac{c_i}{d} - 1 \right\| < \gamma_i \qquad for\ i = 1,....,9$$

Car nous avons 9 systèmes. $c_i(z)$ est le dénominateur en boucle fermé des systèmes $(b_i y + a_i x)$ qui doit être rapproché de d(z). Donc pour chaque système, nous avons un γ. Donc s'il existe un γ beaucoup plus grand pour un système que les autres, pour obtenir un équilibre pour les γ_i, l'algorithme va devoir « sacrifier » les systèmes qui on un γ faible,

pour améliorer ceux avec un grand γ. La solution que nous avons trouvé, est de non pas minimiser γ_i, mais minimiser $\sum \gamma_i$. Donc les systèmes qui ont un faible γ, ne vont pas être lésés. Le problème d'optimisation (placement de pôles) se transforme comme ci-dessous :

$$\min imiser \sum \gamma_i$$

$$\left\| \frac{c_i}{d} - 1 \right\| < \gamma_i \qquad for\ i = 1,....,9$$

En raison de restrictions de temps et de matériel, nous n'avons pas eu l'occasion d'implémenter cette nouvelle démarche sur le système réel. Mais vu que comme déjà mentionné, la simulation se rapproche beaucoup de la réalité pour nos essais, nous allons présenter ici les résultats le la simulation.

Les résultats du §4.3.2 n'étaient pas très satisfaisants, malgré une augmentation de l'ordre du régulateur, comme nous montrent les figures 37 et 38. Nous allons donc appliquer la nouvelle méthode de l'optimisation convexe, puis comparer nos résultats avec la méthode nominale, pour voir s'il y a amélioration. Les conditions sont ici comme ceux imposées dans le §4.3.2 :

- ω_n = 10 rad/s
- ζ = 0.8
- Pôles auxiliaires à 0.4
- Pas de polynôme (z+1) dans S(z)

Avec comme ordre du régulateur synthétisé par la méthode de l'optimisation convexe à 8.

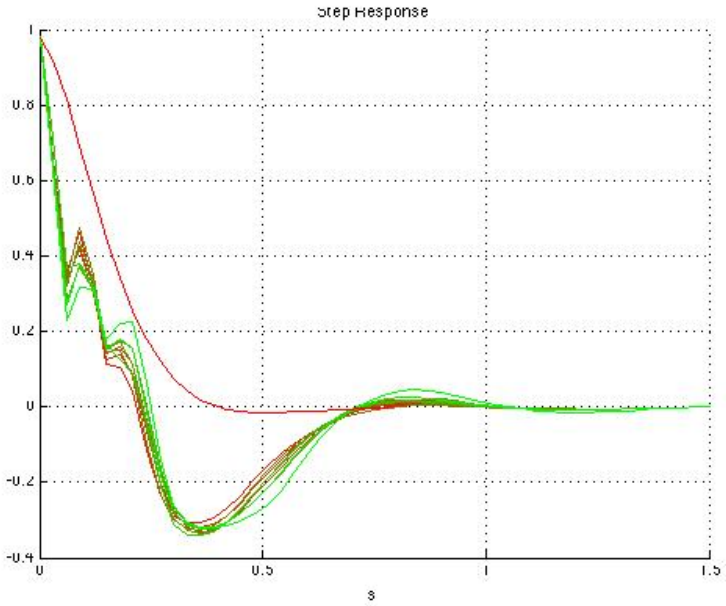

Figure 53 - Simulation du rejet de perturbation, optim. cnvx ordre 8 (nouvelle méthode) pour ω_n = 10 rad/s , ζ = 0.8 , Pôles auxiliaires à 0.4

Cette figure montre une nette amélioration par rapport à la figure 38 gauche, en terme d'oscillations avant d'atteindre la valeur finale (1 par rapport à 3)et temps d'atteinte de la valeur finale (moins de 0.8s par rapport à 2.5s).

En comparaison avec la méthode nominale (figure 38, droite), nous voyons que les deux méthodes arrivent à rejeter la perturbation après une seule oscillation, et atteignent la valeur finale après moins de 0.8s.

5. Conclusion

En vue des résultats du §4 (sauf le §4.3.7), donc pour l'ancienne formulation de l'optimisation convexe, nous avons remarqué un désavantage de cette méthode face à la méthode de placement de pôles nominale jusqu'à un certain niveau d'exigences en termes de spécifications d'amortissement. Ceci peut s'expliquer par le fait que pour toujours garantir la stabilité de toutes les configurations (si le problème d'optimisation est faisable, bien sûr), il y a un prix de payer pour la méthode de l'optimisation convexe, qui se traduit par une perte de performance. Ceci est un inconvénient de cette méthode.

Mais au-delà de certaines exigences (spécifications d'amortissement), la méthode de l'optimisation convexe se montre plus performante, ceci grâce à un placement de pôles plus « intelligente ». Il faut toutefois rappeler, comme déjà cité dans le §4.3.2, que ni l'un ni l'autre des méthodes, ne peut réaliser les attentes que nous avions en termes de spécifications d'amortissement.

L'avantage absolue de la méthode de l'optimisation convexe se repose sur le fait que quoi qu'il arrive, il donne une garantie de stabilité pour toutes les configurations (et autres configurations intermédiaires), si toutefois le problème d'optimisation est faisable.

Aussi, nous l'avons vu au §4.3.6, la méthode de l'optimisation convexe a l'avantage de posséder beaucoup de degrés de liberté (liberté dans le choix de l'ordre du régulateur notamment), afin d'améliorer ses résultats.

Cette méthode a aussi l'avantage de donner la possibilité de réaliser un Loop Shaping, qui comme vu dans le §4.3.5, pourrait permettre d'avoir de meilleures résultats en pratique, et d'éviter de mauvaises surprises en termes de sensibilités face aux paramètres, qui pourrait se résulter à des comportements chaotiques.

Mais compte tenu des résultats, nous avions conclu que notre système (le joint flexible) n'était pas approprié pour prouver la supériorité de la méthode de l'optimisation convexe, car ses diverses configurations, étaient finalement assez proches les uns des autres (en termes de comportement dynamique), et que pour faire la comparaison, un système avec des configurations moins ressemblantes serait mieux (pour lequel la méthode de placement de pôles nominale donnerait des systèmes instables pour des spécifications d'amortissement assez clémentes, ou simplement des résultats moins bons).

Finalement, la nouvelle formulation du problème d'optimisation, nous a montré une nette amélioration des résultats, et a ouvert un nouveau chemin pour la comparaison des méthodes. Un manque de temps et de matériel nous a empêché de refaire la comparaison pour les deux méthodes, mais l'hypothèse est maintenant ouverte, que la méthode de l'optimisation convexe, pourrait prendre le dessus sur la méthode de placement de pôles nominale pour le joint flexible.

Références

[1] Introduction à l'Analyse et la Commande des systèmes Non Linéaires, Philippe Mullhaupt, EPFL-LA, May 2006, pp. 84

[2] Robust Control of Polytopic Systems by Convex Optimization, Alireza Karimi, Hamid Khatibi, Roland Longchamp, EPFL-LA

[3] Identification de Systèmes Dynamiques, D. Bonvin, A.Karimi, EPFL-LA, oct. 2005, pp.88-89

[4] Commande Numérique de Systèmes Dynamiques, Roland Longchamp, EPFL-LA. PPUR, pp.229-234

Seyed-Hanif TABATABAEE

Ecublens, le 30.06.2006