❑ Exercice 1

Soit le système dynamique:

$$\ddot{c}(t) + 7\dot{c}(t) + 6c(t) = u(t)$$

Les conditions initiales sont: $c(0) = 1$ et $\dot{c}(0) = 2$.

- *Calcul de la réponse indicielle $c_1(t)$ pour des conditions initiales nulles*

$$s^2C_1(s) + 7sC_1(s) + 6C_1(s) = U(s)$$

$$\frac{C_1(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 7s + 6}$$

Pour $u(t) = \varepsilon(t)$, $U(s) = 1/s$ et par conséquent:

$$C_1(s) = \frac{1}{s^2 + 7s + 6} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s(s+1)(s+6)}$$

En décomposant en éléments simples:

$$C_1(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+6}$$

Le calcul des coefficients A, B, C par la méthode des résidus donne:

$$A = \lim_{s \to 0}\{sC_1(s)\} = \frac{1}{6}$$

$$B = \lim_{s \to -1}\{(s+1)C_1(s)\} = -\frac{1}{5}$$

$$C = \lim_{s \to -6}\{(s+6)C_1(s)\} = \frac{1}{30}$$

Finalement, on obtient la *réponse forcée* du système:

$$c_1(t) = L^{-1}[C_1(s)] = \frac{1}{6} - \frac{1}{5}e^{-t} + \frac{1}{30}e^{-6t} \qquad t \geq 0$$

- *Calcul de la réponse $c_2(t)$ due aux conditions initiales non nulles*

$$L[\dot{c}_2(t)] = sC_2(s) - c_2(0) = sC_2(s) - 1$$

$$\mathcal{L}[\ddot{c}_2(t)] = s^2C_2(s) - sc_2(0) - \dot{c}_2(0) = s^2C_2(s) - s - 2$$

D'où:

$$\begin{cases} [s^2C_2(s) - s - 2] + 7[sC_2(s) - 1] + 6C_2(s) = 0 \\ C_2(s) = \dfrac{s+9}{(s+1)(s+6)} = \dfrac{A}{s+1} + \dfrac{B}{s+6} \end{cases}$$

Par la méthode des résidus on trouve:

$$\begin{cases} A = \lim\limits_{s \to -1} \{(s+1)C_2(s)\} = \dfrac{8}{5} \\ B = \lim\limits_{s \to -6} \{(s+6)C_2(s)\} = -\dfrac{3}{5} \end{cases}$$

Finalement, on obtient la *réponse libre* du système:

$$c_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[C_2(s)] = \frac{8}{5}e^{-t} - \frac{3}{5}e^{-6t} \qquad t \geq 0$$

- *Réponse totale*

$$c(t) = c_1(t) + c_2(t) = \frac{1}{6} + \frac{7}{5}e^{-t} - \frac{17}{30}e^{-6t} \qquad t \geq 0$$

Remarque:

Dans la solution ci-dessus, on a choisi de calculer la réponse totale comme la somme de la réponse forcée et de la réponse libre. On aurait pu tout aussi bien calculer la réponse totale directement à partir de la transformée de Laplace de l'équation dynamique, en tenant compte des conditions initiales différentes de zéro et de l'entrée $u(t)$.

❑ Exercice 2

Soit l'équation différentielle:

$$\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) = -e^{-t}\sin t$$

Les conditions initiales sont: $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 2$.

$$L[\dot{x}(t)] = sX(s) - x(0) = sX(s)$$

$$L[\ddot{x}(t)] = s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) = s^2X(s) - 2$$

$$L[-e^{-t}\sin t] = \frac{-1}{(s+1)^2+1} = -\frac{1}{s^2+2s+2}$$

D'où:

$$s^2X(s) - 2 + 2sX(s) + X(s) = -\frac{1}{s^2+2s+2}$$

$$X(s) = \frac{2s^2+4s+3}{(s+1)^2(s^2+2s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{Cs+D}{s^2+2s+2}$$

Par la méthode des résidus on détermine:

$$A = \lim_{s \to -1} \frac{d}{ds}\{(s+1)^2X(s)\} = 0$$

$$B = \lim_{s \to -1} \{(s+1)^2X(s)\} = 1$$

Par la méthode de réduction au même dénominateur on trouve:

$$C = 0 \text{ et } D = 1$$

Finalement, on obtient:

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{s^2+2s+2} = \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^2+1}$$

$$x(t) = L^{-1}[X(s)] = te^{-t} + e^{-t}\sin t \qquad t \geq 0$$

❑ Exercice 3

a) $$X(s) = \frac{s(s+1)}{(s+2)(s+3)(s+4)}$$

On décompose en éléments simples:

$$X(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{s+4}$$

Par la méthode des résidus, on détermine:

$$\left| \begin{aligned} A &= \lim_{s \to -2} \{(s+2)X(s)\} = 1 \\ B &= \lim_{s \to -3} \{(s+3)X(s)\} = -6 \\ C &= \lim_{s \to -4} \{(s+4)X(s)\} = 6 \end{aligned} \right.$$

Finalement, on obtient:

$$x(t) = e^{-2t} - 6e^{-3t} + 6e^{-4t} \qquad t \geq 0$$

b) $$X(s) = \frac{(s+4)}{(s+1)^2} = \frac{(s+1)+3}{(s+1)^2} = \frac{1}{s+1} + \frac{3}{(s+1)^2}$$

On obtient ainsi:

$$x(t) = e^{-t} + 3te^{-t} \qquad t \geq 0$$

c) $$X(s) = \frac{1}{s^2+s+1} = \frac{1}{(s+0.5)^2 + 0.75}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{0.75}} \cdot \sqrt{0.75}}{(s+0.5)^2 + (\sqrt{0.75})^2} = \frac{1}{\sqrt{0.75}} \cdot \frac{\sqrt{0.75}}{(s+0.5)^2 + (\sqrt{0.75})^2}$$

On obtient ainsi:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{0.75}} e^{-0.5t} sin(\sqrt{0.75}t) \qquad t \geq 0$$