❑ Exercice 1

La signal $u(t)$ peut s'écrire comme la somme des deux signaux $u_1(t)$ et $u_2(t)$ définis ci-dessous:

$$u_1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A\,sin(\omega t) & t \geq 0 \end{cases}$$

$$u_2(t) = \begin{cases} 0 & t < \dfrac{\pi}{\omega} \\ -A\,sin(\omega t) = A\,sin(\omega t - \pi) & t \geq \dfrac{\pi}{\omega} \end{cases}$$

Ces deux signaux sont identiques à une translation de $\tau = \pi / \omega$ près:

$$u_2(t) = u_1(t - \tau)$$

A l'aide des propriétés de linéarité et de translation dans le temps de la transformation de Laplace, on peut calculer $U(s)$:

$$\begin{aligned} U(s) &= L[u(t)] \\ &= L[u_1(t) + u_2(t)] \\ &= L[u_1(t) + u_1(t - \tau)] \\ &= L[u_1(t)] + exp(-s\tau)L[u_1(t)] \end{aligned}$$

D'où finalement:

$$U(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}[1 + exp(-s\tau)]$$

❑ Exercice 2

a) A l'aide de la définition de la transformation de Laplace:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_0^{T}(1 + e^{\alpha t})e^{-st}dt - \int_T^{\infty} e^{(\alpha - s)t}dt$$

$$F(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-sT}) + \frac{1}{(\alpha - s)}(2e^{(\alpha - s)T} - 1), \text{ pour } Re(s) > \alpha$$

b) On constate que:

$$f(t) = t\sin(\omega t) = -\frac{\partial}{\partial\omega}\cos(\omega t)$$

Par conséquent:

$$F(s) = L[t\sin(\omega t)] = -\frac{\partial}{\partial\omega}L[\cos(\omega t)] = -\frac{\partial}{\partial\omega}\left[\frac{s}{s^2 + \omega^2}\right]$$

$$= \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$$

Une autre méthode consiste à appliquer directement la relation (grammaire, entrée IX, $n = 1$):

$$F(s) = L[t f(t)] = -\frac{d}{ds}F(s) = -\frac{d}{ds}\left[\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\right] = \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$$

❑ Exercice 3

• En appliquant le théorème de la valeur finale, on trouve:

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} [sF(s)] = \lim_{s \to 0}\left[s\frac{10}{s-3}\right] = 0$$

• En calculant la valeur finale dans le domaine temporel à l'aide du dictionnaire de la section 5.3, on obtient:

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{t \to \infty} \{L^{-1}[F(s)]\} = \lim_{t \to \infty}\left\{L^{-1}\left[\frac{10}{s-3}\right]\right\} = \lim_{t \to \infty} 10e^{3t} = \infty$$

• Nous constatons que les deux résultats sont différents et que le théorème de la valeur finale nous fournit une réponse erronée. Ceci est dû au fait que l'utilisation du théorème n'est pas possible dans notre exemple car la fonction $sF(s)$ contient un pôle ($s = 3$) qui se trouve dans la moitié droite du plan complexe.