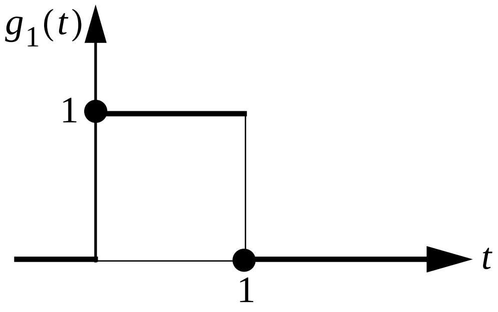
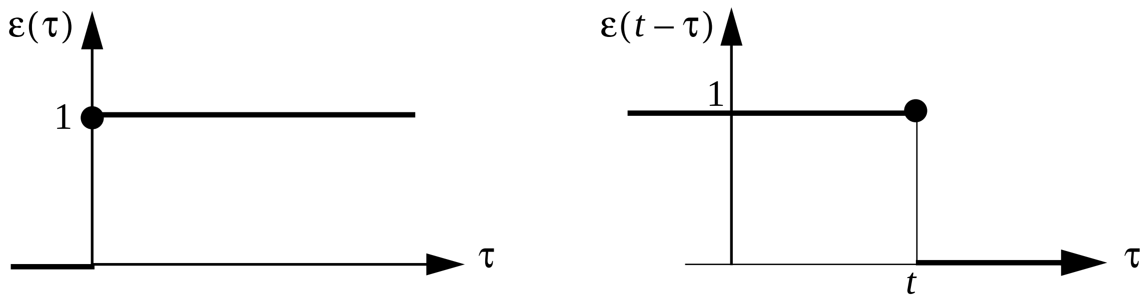
❑ Exercice 1

a) $g_1(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)$

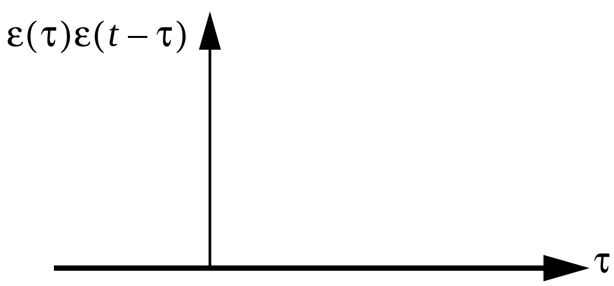


b)

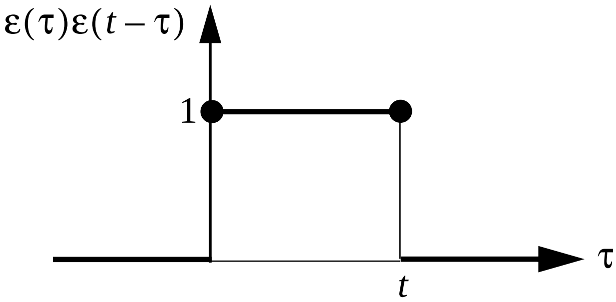
1. $\varepsilon(t) * \varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\tau)\varepsilon(t-\tau)d\tau$



• si $t < 0$:

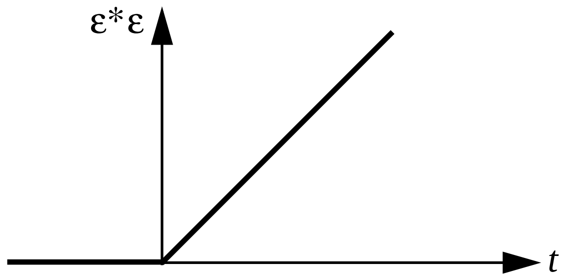


• si $t \geq 0$:



d'où: $\varepsilon(t)*\varepsilon(t) = 0$ pour $t < 0$

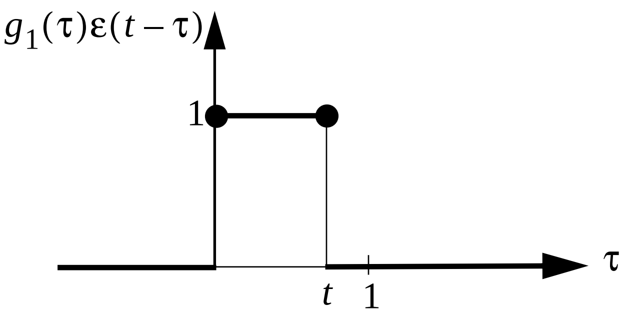
$$\varepsilon(t)*\varepsilon(t) = \int_0^t 1 d\tau = t \quad \text{pour } t \geq 0$$



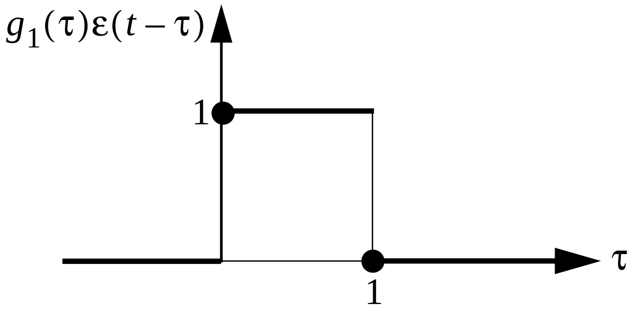
2. $$g_1*\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\tau)\varepsilon(t-\tau)d\tau$$

• si $t < 0$: $g_1(\tau)\varepsilon(t-\tau) = 0$

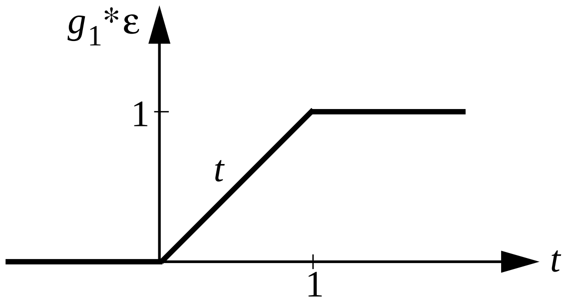
• si $0 \leq t < 1$:



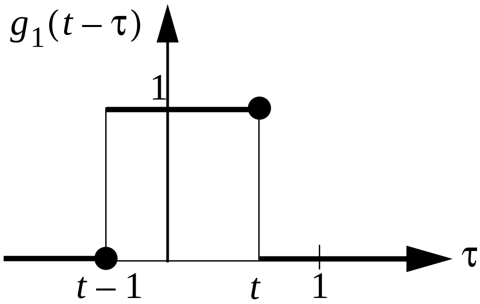
• si $t \geq 1$:



Après intégration, on obtient:

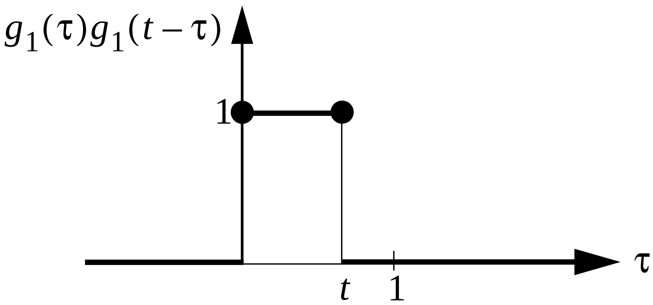


3. $$g_1 * g_1 = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\tau) g_1(t-\tau) d\tau$$

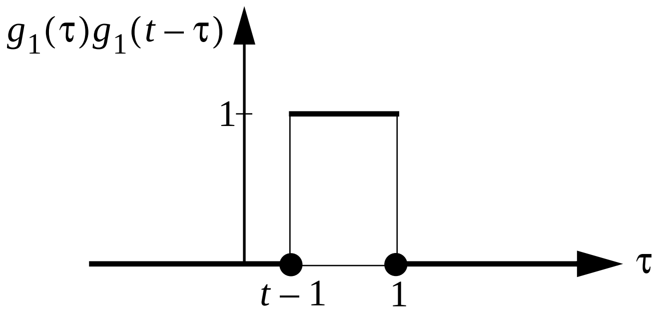


• si $t < 0$: $g_1(\tau)g_1(t-\tau) = 0$

• si $0 \leq t < 1$:

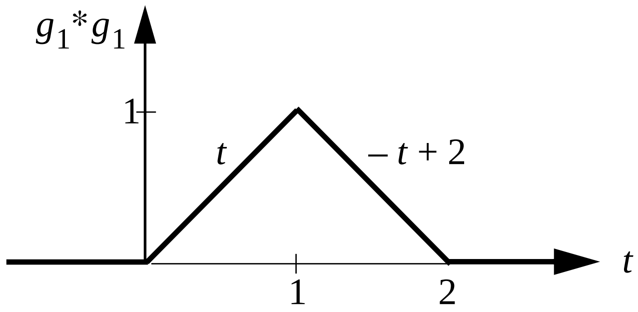


• si $1 \le t < 2$:



• si $t \ge 2$: $g_1(\tau)g_1(t-\tau) = 0$

Après intégration, on obtient:



❑ Exercice 2

a) *Solution numérique*

L'équation différentielle exprimée aux instants $t = kh$ s'écrit:

$$\dot{\omega}(kh) = -a\omega(kh) + bu(kh), \text{ avec } u(kh) = 1$$

Avec l'approximation d'Euler pour la dérivée, la solution numérique est obtenue en appliquant successivement l'équation:

$$\omega(kh + h) = \omega(kh) + h[-a\omega(kh) + b]$$

$$\omega(kh + h) = (1 - ah)\omega(kh) + hb \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad \omega(0) = 0$$

La grandeur h est le pas d'intégration. Sa valeur doit être choisie en relation avec la constante de temps du moteur (dans notre exercice $\tau_{moteur} = 0.2\ s$ et h par exemple 10 ms).

b) Solution analytique

La solution générale de l'équation différentielle est la somme de la solution homogène (sans entrée) et d'une solution particulière. La solution homogène est obtenue de la façon suivante:

$$\frac{d\omega}{dt} = -a\omega,\ \frac{d\omega}{\omega} = -adt,\ \int\frac{d\omega}{\omega} = -a\int dt$$

$$ln\omega = -at + C_1,\ \omega = e^{-at}e^{C_1} = Ce^{-at}$$

La solution particulière est choisie constante, $\omega_p = K$. Ainsi $\dot{\omega}_p = 0$.

L'équation différentielle initiale se présente dans ce cas sous la forme:

$$\dot{\omega}_p = -a\omega_p + b,\ 0 = -aK + b\text{. Ainsi } K = \frac{b}{a}$$

La solution générale est la suivante:

$$\omega = Ce^{-at} + \frac{b}{a}$$

La constante C est déterminée en exploitant la valeur de la condition initiale. Ainsi:

$$\omega(0) = 0 = C + \frac{b}{a}\text{, d'où } C = -\frac{b}{a}$$

$$\omega(t) = \frac{b}{a}(1 - e^{-at})$$

<u>Comparaison numérique</u> (pour $a = 5[s^{-1}]$, $b = 12[rad/Vs^2]$, $h = 0.01[s]$)

$temps[s]$	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05 $\cdots$
$\omega_{num}\left[\frac{rad}{s}\right]$	0	0.120	0.234	0.342	0.445	0.543 $\cdots$
$\omega_{ana}\left[\frac{rad}{s}\right]$	0	0.117	0.228	0.334	0.435	0.531 $\cdots$

❑ **Exercice 3**

Soit $g(t)$ la réponse impulsionnelle du circuit électrique:

$$g(t) = e^{-t} \qquad t \geq 0$$

et $u(t)$ la tension d'alimentation:

$$u(t) = e^{-3t} \qquad t \geq 0$$

a) La réponse du système est le produit de convolution $g(t)*u(t)$:

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_0^t e^{-(t-\tau)}e^{-3\tau}d\tau$$

$$= e^{-t}\int_0^t e^{-2\tau}d\tau = -\frac{1}{2}e^{-t}\left[e^{-2\tau}\Big|_0^t\right]$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-t}[e^{-2t}-1] = -\frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-t}$$

b) La réponse du système dépend de:

- la dynamique du système proportionnelle à e^{-t};

- l'excitation proportionnelle à e^{-3t}.