❑ Exercice 1

Soit:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 - (u_1 + u_2) = f_1(x, u) \\ \dot{x}_2 = x_1^2 - (x_2 - 1)^2 + x_1 x_2 - u_1^2 - u_2 = f_2(x, u) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = x_1(1 + x_2) + u_1 = g_1(x, u) \\ y_2 = x_1 + x_2 - u_2 = g_2(x, u) \end{cases}$$

Au point de fonctionnement stationnaire correspondant à $\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = 1$, les variables $\bar{x}_1$ et $\bar{x}_2$ satisfont les relations:

$$\begin{cases} 0 = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 - 2 \\ 0 = \bar{x}_1^2 - (\bar{x}_2 - 1)^2 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 - 2 \end{cases}$$

En résolvant ce système d'équations et en respectant la condition que les valeurs de $\bar{x}_1$ et $\bar{x}_2$ sont positives, on trouve $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 1$.

En linéarisant autour de ce point de fonctionnement, on obtient les matrices A, B, C et D du modèle d'état linéaire:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2\bar{x}_1 + \bar{x}_2 & -2(\bar{x}_2 - 1) + \bar{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2\bar{u}_1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 + \bar{x}_2 & \bar{x}_1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Finalement:

$$\delta\dot{x} = A\delta x + B\delta u \quad \text{et} \quad \delta y = C\delta x + D\delta u$$

❑ Exercice 2

a) L'application de la loi de mouvement de Newton donne:

$$ml^2\ddot{\theta}(t) = -lmg\sin\theta(t) - aF_r\cos\theta(t) + lF(t)$$

La force de rappel due au ressort est $F_r = k\Delta x$ où Δx est l'allongement du ressort. Si on suppose que $\theta = 0$ correspond à la position où le ressort n'est pas tendu, alors $\Delta x = a\sin\theta$ et l'équation du mouvement devient:

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{l}\sin\theta(t) - \frac{a^2k}{ml^2}\sin\theta(t)\cos\theta(t) + \frac{1}{ml}F(t)$$

En sélectionnant respectivement comme variables d'état et comme entrée les grandeurs:

$$x_1 = \theta,\ x_2 = \dot{\theta},\ u = F$$

on obtient le modèle d'état suivant:

$$\left|\begin{array}{ll} \dot{x}_1 = x_2 & x_1(0) = \theta_0 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{a^2k}{ml^2}\sin x_1\cos x_1 + \frac{1}{ml}u & x_2(0) = \omega_0 \end{array}\right.$$

b) En linéarisant le modèle d'état pour de petites oscillations autour de la position verticale $(\bar{x}_1 = 0)$, on obtient le modèle linéarisé suivant:

$$\delta\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos\bar{x}_1 - \frac{a^2k}{ml^2}(-\sin^2\bar{x}_1 + \cos^2\bar{x}_1) & 0 \end{bmatrix}\delta x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml} \end{bmatrix}\delta u$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} - \frac{a^2k}{ml^2} & 0 \end{bmatrix}\delta x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml} \end{bmatrix}\delta u$$

avec $\delta x = x - \bar{x}$ et $\delta u = u - \bar{u}$

Remarque. On constate que la linéarisation autour de $\theta = 0$ correspond aux approximations suivantes: $\sin\theta \approx \theta$ et $\cos\theta \approx 1$.

❑ Exercice 3

a) En sélectionnant respectivement comme variables d'état, comme entrée et comme sortie les grandeurs:

$$x_1 = x,\ x_2 = \dot{x},\ u = i \text{ et } y = x$$

on obtient le modèle d'état suivant:

$$\left|\begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = g - \dfrac{L}{2m(1+x_1)^2}u^2 \end{array}\right.$$

$$\left| y = x_1 \right.$$

b) Le modèle linéarisé a la forme:

$$\delta\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{L\bar{u}^2}{m(1+\bar{x}_1)^3} & 0 \end{bmatrix}\delta x + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{L\bar{u}}{m(1+\bar{x}_1)^2} \end{bmatrix}\delta u$$

$$\delta y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\delta x$$

avec: $\delta x = x - \bar{x}$, $\delta u = u - \bar{u}$ et $\delta y = y - \bar{y}$

Attention, la variable u ne représente pas la tension aux bornes de la bobine, mais la grandeur d'entrée qui est le courant.