## □ Exercice 1

a) Les variables d'état à choisir sont $x_1(t) = x(t)$ et $x_2(t) = \dot{x}(t)$. En dérivant ces deux expressions, on obtient:

$$\dot{x}_1(t) = \dot{x}(t) = x_2(t) \qquad x_1(0) = 0$$

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{x}(t) = -2cos(t)x_2(t) - 2x_1(t) + u(t) \qquad x_2(0) = 0$$

La sortie est quant à elle:

$$y(t) = 3\dot{x}(t) = 3x_2(t)$$

b) Il s'agit d'un système *linéaire* car les variables d'état, l'entrée et la sortie interviennent linéairement dans les équations. Le modèle d'état peut aussi s'écrire de façon matricielle:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2cos(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \qquad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Le modèle est *non stationnaire* puisqu'un élément de la matrice du système est fonction du temps.

## □ Exercice 2

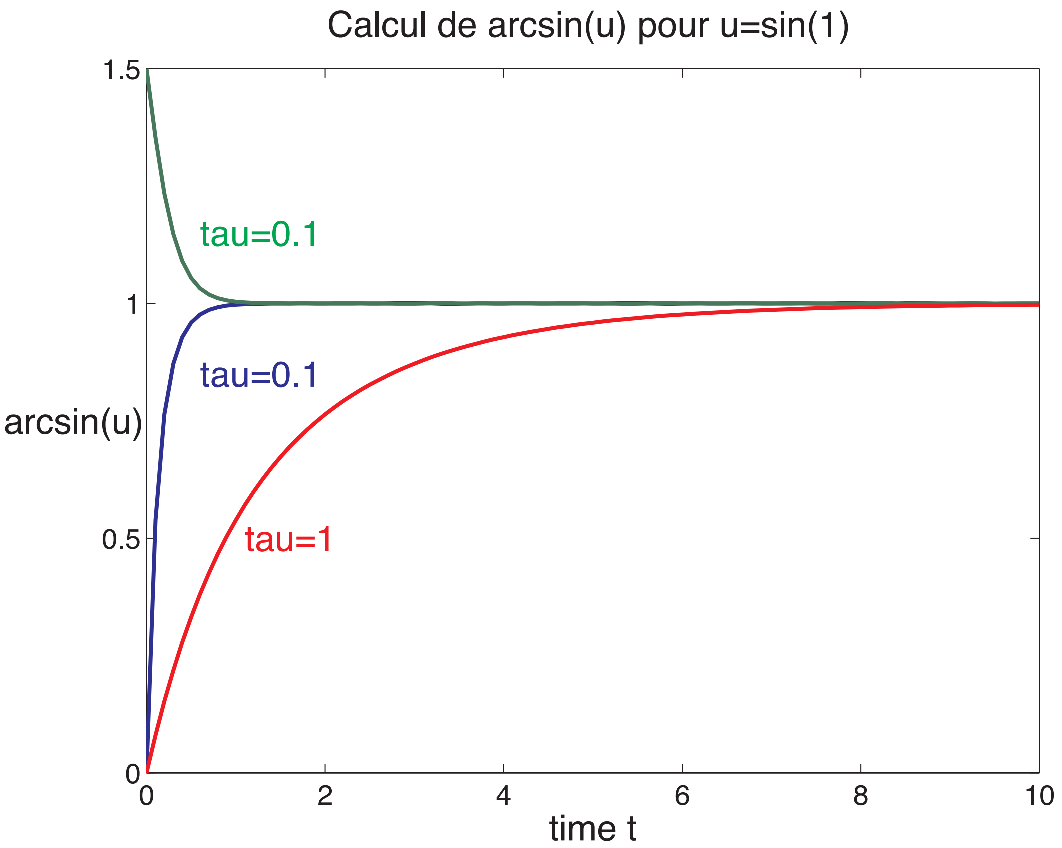
a) Les équations exhibant une dérivée d'ordre un, une seule variable d'état est nécessaire. Il s'agit de $x(t) = \alpha(t)$. En exprimant $\dot{x}(t)$, le modèle d'état suivant est obtenu:

$$\dot{x}(t) = \dot{\alpha}(t) = \frac{e(t)}{\tau} = \frac{1}{\tau}\{u(t) - sin[x(t)]\}$$

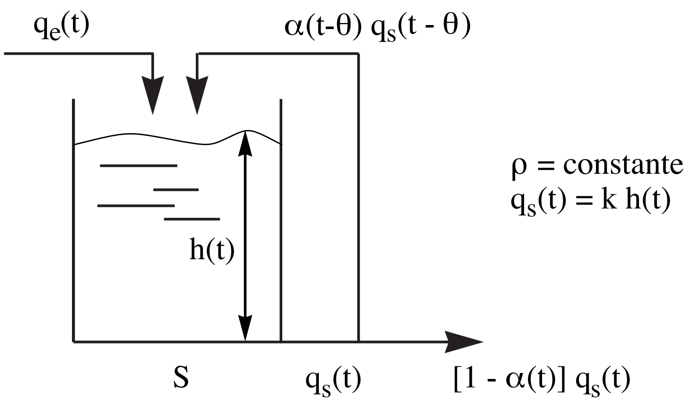
$$y(t) = \alpha(t) = x(t)$$

b) Il s'agit d'un système *non linéaire* à cause du terme $sin(x)$ et *stationnaire* (l'unique paramètre $\tau$ ne dépendant pas du temps).

c) A l'état d'équilibre (pour $t \to \infty$), $\dot{\alpha} = 0$ et $u = sin(\alpha)$. Ainsi, la valeur calculée $\alpha = arcsin(u)$ ne dépendra ni de $\tau$ ni de $\alpha_0 \in [-\pi/2, \pi/2]$. Cela est visible à la figure suivante pour différentes valeurs de $\tau$ et de $\alpha_0$.




## Exercice 3




*a)* *Bilan massique*

$$\rho S\frac{d}{dt}h(t) = \rho q_e(t) + \alpha(t-\theta)\rho q_s(t-\theta) - \rho q_s(t)$$

$$\frac{d}{dt}h(t) = \frac{1}{S}[q_e(t) + \alpha(t-\theta)kh(t-\theta) - kh(t)]$$

*b)* Ce système est particulier car, en plus du retard sur le niveau $h(t-\theta)$, il possède également un retard sur l'entrée. Il faut ainsi connaître les niveaux $[h(t-\theta)\ldots h(t)]$ et les entrées passées $[\alpha(t-\theta)\ldots\alpha(t))$ pour déterminer le futur du système à partir de $\alpha(t)$, $t \geq 0$.

*Grandeurs caractéristiques*

- entrée: $\alpha(t)$
- état: l'état est de dimension infinie, $[h(t-\theta)\ldots h(t)]$ et $[\alpha(t-\theta)\ldots\alpha(t))$
- sortie: $h(t)$
- perturbation: $q_e(t)$
- paramètres: $S$, $k$, $\theta$

*c)* Le système est:

- dynamique (décrit par une équation différentielle);
- non linéaire (à cause du produit $\alpha(t-\theta)h(t-\theta)$);
- stationnaire (paramètres constants).