

□ **Exercice 1**

a) Les variables d'état à choisir sont $x_1(t) = x(t)$ et $x_2(t) = \dot{x}(t)$. En dérivant ces deux expressions, on obtient:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \dot{x}(t) = x_2(t) & x_1(0) &= 0 \\ \dot{x}_2(t) &= \ddot{x}(t) = -2\cos(t)x_2(t) - 2x_1(t) + u(t) & x_2(0) &= 0\end{aligned}$$

La sortie est quant à elle:

$$y(t) = 3\dot{x}(t) = 3x_2(t)$$

b) Il s'agit d'un système *linéaire* car les variables d'état, l'entrée et la sortie interviennent linéairement dans les équations. Le modèle d'état peut aussi s'écrire de façon matricielle:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2\cos(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) & \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Le modèle est *non stationnaire* puisqu'un élément de la matrice du système est fonction du temps.

□ **Exercice 2**

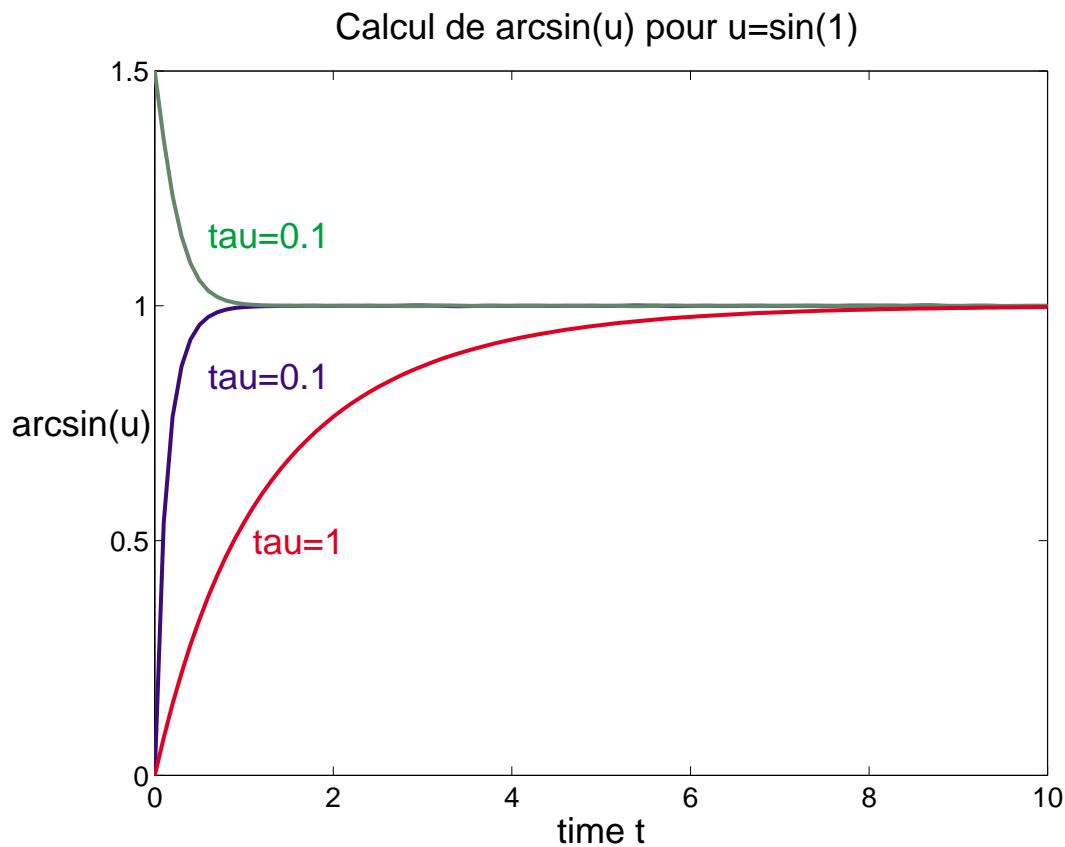
a) Les équations exhibant une dérivée d'ordre un, une seule variable d'état est nécessaire. Il s'agit de $x(t) = \alpha(t)$. En exprimant $\dot{x}(t)$, le modèle d'état suivant est obtenu:

$$\dot{x}(t) = \dot{\alpha}(t) = \frac{e(t)}{\tau} = \frac{1}{\tau} \{u(t) - \sin[x(t)]\}$$

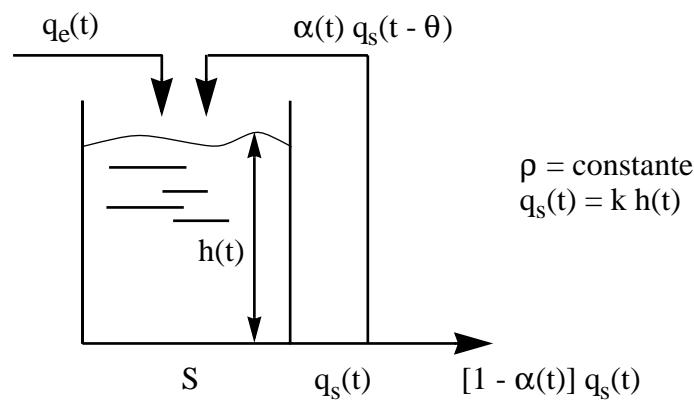
$$y(t) = \alpha(t) = x(t)$$

b) Il s'agit d'un système *non linéaire* à cause du terme $\sin(x)$ et *stationnaire* (l'unique paramètre τ ne dépendant pas du temps).

c) A l'état d'équilibre (pour $t \rightarrow \infty$), $\dot{\alpha} = 0$ et $u = \sin(\alpha)$. Ainsi, la valeur calculée $\alpha = \arcsin(u)$ ne dépendra ni de τ ni de α_0 . Cela est visible à la figure suivante pour différentes valeurs de τ et de α_0 .



Exercice 3



a) Bilan massique

$$\rho S \frac{d}{dt} h(t) = \rho q_e(t) + \alpha(t) \rho q_s(t - \theta) - \rho q_s(t)$$

$$\frac{d}{dt}h(t) = \frac{1}{S}[q_e(t) + \alpha(t)kh(t-\theta) - kh(t)]$$

b) Grandes caractéristiques

- entrée: $\alpha(t)$
- état: $h(t)$
- sortie: $h(t)$
- perturbation: $q_e(t)$
- paramètres: S, k, θ

c) Le système est:

- dynamique (décrit par une équation différentielle);
- non linéaire (à cause du produit $\alpha(t)h(t-\theta)$);
- stationnaire (paramètres constants).