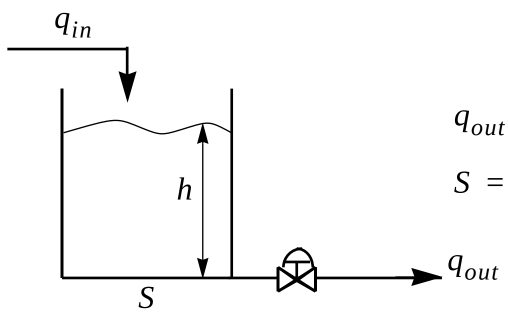
❑ Exercice 1



$$q_{out} = 0.01\sqrt{h} \quad \frac{m^3}{s}$$
$$S = 2m^2$$

- *Etat stationnaire*

$$\bar{q}_{in} = \bar{q}_{out}$$

et par conséquent:

$$0.015\left[\frac{m^3}{s}\right] = 0.01\sqrt{\bar{h}}\left[\frac{m^3}{s}\right] \Rightarrow \bar{h} = 2.25[m]$$

- *Bilan massique*

$$S\rho\frac{dh}{dt} = \rho q_{in} - \rho q_{out} = \rho q_{in} - \rho(0.01\sqrt{h}) \qquad (1)$$

a) <u>*Vider le réservoir de moitié*</u>

Pour $t \geq 0$, $q_{in} = 0$ et ainsi:

$$S\frac{dh}{dt} = -0.01\sqrt{h}$$

En intégrant l'équation par séparation des variables:

$$\int_{\bar{h}}^{\bar{h}/2} \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{0.01}{S}\int_0^T dt \qquad (2)$$

et avec $S = 2[m^2]$ et $\bar{h} = 2.25[m]$ on obtient: $T = 176[s]$

b) *Vider complètement le réservoir*

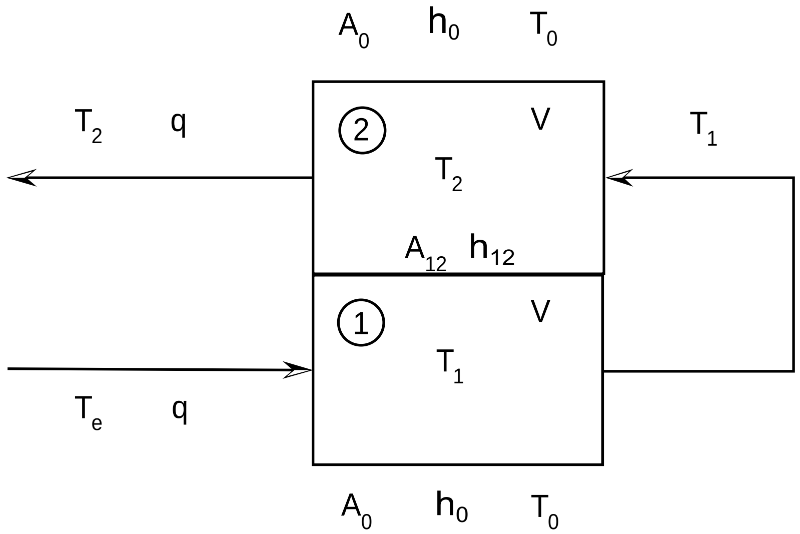
$$\int_{\bar{h}}^{0} \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{0.01}{S}\int_{0}^{T} dt \Rightarrow T = 600[s]$$

Remarque: Si le débit q_{out} était proportionnel à h, $q_{out} = kh$, alors:

$$S\frac{dh}{dt} = -kh \Rightarrow \int_{\bar{h}}^{h} \frac{dh'}{h'} = -\frac{k}{S}\int_{0}^{t} dt' \Rightarrow h(t) = \bar{h}e^{-(k/S)t}$$

et par conséquent $t \to \infty$ pour $h(t) \to 0$.

❑ Exercice 2



a) *Modèle dynamique*

- Bilan thermique pour la zone 1:

$$V\rho c_p \frac{dT_1}{dt} = q\rho c_p(T_e - T_1) - h_{12}A_{12}(T_1 - T_2) - h_0A_0(T_1 - T_0) \quad (1)$$

- Bilan thermique pour la zone 2:

$$V\rho c_p \frac{dT_2}{dt} = q\rho c_p(T_1 - T_2) - h_{12}A_{12}(T_2 - T_1) - h_0A_0(T_2 - T_0) \quad (2)$$

b) *Non-linéarité*

- Dans chaque équation différentielle, on a le produit qT qui apparaît;
- Si q est variable, représentant par exemple la variable d'entrée du système: modèle non linéaire;
- Si q est constant: modèle linéaire.

c) *Equivalence des deux systèmes*

Bilan thermique pour le cas 2 (une seule zone):

$$2V\rho c_p \frac{dT}{dt} = q\rho c_p(T_e - T) - 2h_0 A_0 (T - T_0) \tag{3}$$

Bilan thermique combiné (équations*(1)* et *(2)*) pour le cas 1 (deux zones):

$$V\rho c_p\left(\frac{dT_1}{dt} + \frac{dT_2}{dt}\right) = q\rho c_p(T_e - T_2) - 2h_0 A_0\left(\frac{T_1 + T_2}{2} - T_0\right) \tag{4}$$

- Les deux systèmes ne sont donc pas équivalents;
- Cas 1 correspond au cas 2 pour $T_1 = T_2 = T$.

d) Si les deux zones ne sont pas homogènes, le système devient à paramètres répartis (décrit par des équations différentielles partielles).

❑ **Exercice 3**

a) *Modèle dynamique*

- Hypothèse: $\rho = const$
- Bilan massique:

$$\frac{d}{dt}(\rho V) = \rho q_e - \rho q_s$$

$$\frac{dV(h)}{dt} = q_e - q_s \tag{1}$$

- Calcul du volume $V(h)$:

$$r = \frac{R}{H}h \tag{2}$$

$$V(h) = \int_0^h A(h')dh' = \int_0^h \pi r^2(h')dh' = \frac{\pi R^2}{H^2}\int_0^h h'^2 dh' = \frac{\pi R^2}{3H^2}h^3 \tag{3}$$

- Calcul de dh/dt:

$$\frac{dV(h)}{dh} = \frac{\pi R^2}{3H^2}3h^2 = \frac{\pi R^2}{H^2}h^2 \tag{4}$$

$$\frac{dV(h)}{dt} = \frac{dV(h)}{dh}\frac{dh}{dt} = q_e - q_s \tag{5}$$

(4) dans *(5)*:

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{H^2}{\pi R^2}\frac{q_e - q_s}{h^2} \tag{6}$$

Condition initiale: h_0

b) *Grandeurs caractéristiques*

- entrée: $q_s(t)$
- état: $h(t)$
- sortie: $h(t)$
- paramètres: H, R

Le débit d'entrée q_e est considéré comme une perturbation. En effet, q_e reste normalement constant (perturbation nulle). Si $q_e(t)$, perturbation autour de la valeur nominale $\bar{q}_e$.

c) Le modèle dynamique est *non linéaire* et *stationnaire*.

Etat stationnaire: $\frac{dh}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{q}_e = \bar{q}_s$ $\qquad \bar{h} = quelconque$